This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Over dit boek

Dit is een digitale kopie van een boek dat al generaties lang op bibliotheekplanken heeft gestaan, maar nu zorgvuldig is gescand door Google. Dat doen we omdat we alle boeken ter wereld online beschikbaar willen maken.

Dit boek is zo oud dat het auteursrecht erop is verlopen, zodat het boek nu deel uitmaakt van het publieke domein. Een boek dat tot het publieke domein behoort, is een boek dat nooit onder het auteursrecht is gevallen, of waarvan de wettelijke auteursrechttermijn is verlopen. Het kan per land verschillen of een boek tot het publieke domein behoort. Boeken in het publieke domein zijn een stem uit het verleden. Ze vormen een bron van geschiedenis, cultuur en kennis die anders moeilijk te verkrijgen zou zijn.

Aantekeningen, opmerkingen en andere kanttekeningen die in het origineel stonden, worden weergegeven in dit bestand, als herinnering aan de lange reis die het boek heeft gemaakt van uitgever naar bibliotheek, en uiteindelijk naar u.

Richtlijnen voor gebruik

Google werkt samen met bibliotheken om materiaal uit het publieke domein te digitaliseren, zodat het voor iedereen beschikbaar wordt. Boeken uit het publieke domein behoren toe aan het publiek; wij bewaren ze alleen. Dit is echter een kostbaar proces. Om deze dienst te kunnen blijven leveren, hebben we maatregelen genomen om misbruik door commerciële partijen te voorkomen, zoals het plaatsen van technische beperkingen op automatisch zoeken.

Verder vragen we u het volgende:

+ *Gebruik de bestanden alleen voor niet-commerciële doeleinden* We hebben Zoeken naar boeken met Google ontworpen voor gebruik door individuen. We vragen u deze bestanden alleen te gebruiken voor persoonlijke en niet-commerciële doeleinden.

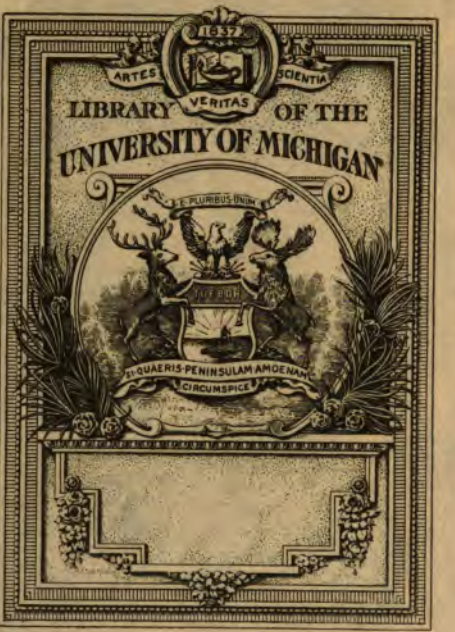
+ *Voer geen geautomatiseerde zoekopdrachten uit* Stuur geen geautomatiseerde zoekopdrachten naar het systeem van Google. Als u onderzoek doet naar computervertalingen, optische tekenherkenning of andere wetenschapsgebieden waarbij u toegang nodig heeft tot grote hoeveelheden tekst, kunt u contact met ons opnemen. We raden u aan hiervoor materiaal uit het publieke domein te gebruiken, en kunnen u misschien hiermee van dienst zijn.

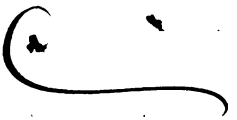
+ *Laat de eigendomsverklaring staan* Het “watermerk” van Google dat u onder aan elk bestand ziet, dient om mensen informatie over het project te geven, en ze te helpen extra materiaal te vinden met Zoeken naar boeken met Google. Verwijder dit watermerk niet.

+ *Houd u aan de wet* Wat u ook doet, houd er rekening mee dat u er zelf verantwoordelijk voor bent dat alles wat u doet legaal is. U kunt er niet van uitgaan dat wanneer een werk beschikbaar lijkt te zijn voor het publieke domein in de Verenigde Staten, het ook publiek domein is voor gebruikers in andere landen. Of er nog auteursrecht op een boek rust, verschilt per land. We kunnen u niet vertellen wat u in uw geval met een bepaald boek mag doen. Neem niet zomaar aan dat u een boek overal ter wereld op allerlei manieren kunt gebruiken, wanneer het eenmaal in Zoeken naar boeken met Google staat. De wettelijke aansprakelijkheid voor auteursrechten is behoorlijk streng.

Informatie over Zoeken naar boeken met Google

Het doel van Google is om alle informatie wereldwijd toegankelijk en bruikbaar te maken. Zoeken naar boeken met Google helpt lezers boeken uit allerlei landen te ontdekken, en helpt auteurs en uitgevers om een nieuw leespubliek te bereiken. U kunt de volledige tekst van dit boek doorzoeken op het web via `http://books.google.com`


1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



MATHEMAT
QA
IS
.V9

922

THEORIE

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF ILLINOIS

DER

ALGEBRA,

DOOR

G. A. VORSTERMAN VAN OIJEN,

Onderwijzer in de Wis- en Natuurkunde.

Eerste Deel.

SCHOONHOVEN,

S. E. VAN NOOTEN.

1868.

AAN DEN LEZER.

Ingevolge de belofte, door mij gedaan in het voorbericht van het tweede deel mijner *Theorie der Algemeene Rekenkunde*, verschijnt thans van mijne hand eene *Theorie der Algebra*, bij wier samenstelling ik, even als bij het zoo even aangehaalde werk, getracht heb, om in een beperkt bestek zooveel zaken samen te vatten, als maar eenigszins mogelijk was, zonder ergens het logisch verband uit het oog te verliezen, of van de leidende gedachte af te wijken. Want, was ook mijn doel, den Lezer in een betrekkelijk korten tijd op eene zekere hoogte te brengen, steeds zweefde mij daarbij de waarheid voor den geest, dat de Wiskunde, meer dan eenige andere wetenschap, moet dienen tot ontwikkeling van het verstand, tot scherping van het oordeel en dat noch de eene, noch de andere verkregen worden, door sprongen te maken en in eens te veel van den geest te vergen; maar dat zij beide het gevolg zijn van een *geleidelijken*, daarom *zekeren* vooruitgang. Nergens ben ik dan ook — al bleef mijn streven in een' zoo kort mogelijken tijd een goed end wegs af te leggen, — luchtigjes over de zaken heen geloopen; nergens heb ik maar eventjes aangestipt, wat uitvoerige behandeling vereischte; maar ook nergens heb ik mij langer opgehouden, dan mij volstrekt noodzakelijk toescheen. — De jonge lieden onzer dagen hebben den tijd niet, om elken regel, dien zij geleerd hebben, „einzuüben" door een honderd of vijf vraagstukken ter toepassing; het pad, dat zij hebben af te leggen, is lang; en dat de meesten vermoeid en uitgeput halfweg al blijven rusten, zelden den moed hebben verder te gaan, en vaak op hunne

schreden terugkeeren, is nog al dikwijls de schuld van het leerboek, dat hen te lang in lager sfeeren houdt; dat hunnen geest te veel gewent aan het kruipen, om zich ooit weder tot eene zekere hoogte op te heffen. Niet dat ik den practischen arbeid gering schat: dat zij verre! Maar ik hecht weinig aan langdurigen practischen arbeid, die ons niet veel verder brengt, dan dat we eenigszins vlugger worden in het machinale der bewerking. — Alles hangt af van den Onderwijzer. Hij moet zorgen, dat het theoretisch gedeelte *begrepen* en *gekend* wordt: een paar practische voorbeelden worden op het zwarte bord uitgewerkt; een paar andere worden aan de leerlingen medegegeven om tehuis uit te werken; nogmaals wordt hun in de volgende les rekenschap hunner bewerking gevraagd; om de drie maanden houdt men eene flinke repetitie van het geleerde — ik twijfel niet of men zal vorderingen bij zijne leerlingen bespeuren, zoowel in de theorie als in de practijk.

Ziedaar de methode, die met mijne leerboeken tot handboek zal moeten gevolgd worden; de methode, die ik met mijne Rekenkunde zelf volg en die mij tot de meest voldoende uitkomsten geleid heeft; eene methode, die ook de aanmerking van den heer VAN LOGHEM *) „dat dit werk, ofschoon het veel schoons en voor velen veel nieuws bevat voor de lagere klassen onzer Hoogere Burgerscholen niet geschikt is, vooral om zijne uitgebreidheid en wijze van behandeling" doet vervallen, tenzij de geachte schrijver slechts die trage verstanden op het oog hebbe, voor wie DE GELDER eenmaal eene Meetkunde schreef.

Eene andere aanmerking, nauw verwant met de vorige, is mij wel eens persoonlijk gemaakt, namelijk, dat mijne Rekenkunde te moeilijk is voor hem, die met de theorie een aanvang maakt. Daar deze Theorie der Algebra hoogst waarschijnlijk tot dezelfde aanmerkingen aanleiding zal geven, acht ik het niet ongepast hier te doen opmerken, dat er in geen enkel vak der Wiskunde van moeilijkheid of gemakkelijkheid sprake kan zijn; daarin is slechts quaestie van juistheid, nauwkeurigheid, logische rangschikking; daarin moet alles gezegd worden, wat men noo-

*) J. v. LOGHEM. *Theorie der Algem. Rekenk. Voorber.* VII.

dig heeft te weten, maar ook niets meer. Zulk eene logische beknoptheid moge schijnbaar moeilijk zijn, maar al die lange praatjes, die huismiddeltjes om wat van buiten te leeren, dat rekken en pluizen, dat schikken en scheiden, dat anatomiseeren behoort niet te huis in een leerboek; zulks is het werk van verhandelingen over afzonderlijke deelen; men verlangt een geheel, een goed geordend geheel, een geheel, dat levenskracht bezit. Opbouwen is het doel van alle aanvankelijk onderwijs; afdalen tot in de kleinste bijzonderheden, de analysis, verlangt al eene groote mate van kennis.

Bovendien ligt het moeilijke van een goed leerboek in het minder ontwikkeld zijn der leerlingen. Zij vatten den zin der bepalingen, de beteekenis der stellingen, de kracht eener sluitrede niet; om dan terecht geholpen te worden, wenden zij zich tot den onderwijzer. Hij moet trachten een duidelijk denkbeeld van de beteekenis van een woord te geven; hij moet, behalve wiskundige, goed taalkundige zijn. Met eene kleine verandering maak ik hier de woorden van den dichter de mijne:

„Wees meester van de taal, gij zijt het van 't verstand."

De weg, door mij in mijne Rekenkunde gevolgd, is ook nu wederom door mij ingeslagen; uitgaande van eenige axioma's, mag niets meer worden aangenomen *waar* te zijn, zonder dat zulks bewezen wordt.

De rechtstreeksche oplossing der derde- en vierde-machtsvergelijkingen zijn door mij naar hare plaats terug gebracht, namelijk naar de *lagere algebra*; ik heb ze nog al eenigszins uitvoerig behandeld om den Lezers gelegenheid te geven, zich, zoo zij zulks verkiezen, onder het aanleeren dier bewerkingen tevens in de practijk te oefenen. — De beteekenis der uitdrukkingen $\frac{0}{0}$, $0 \times \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ heb ik ook tamelijk breed behandeld, omdat men zich daarvan nog al vaak geheel verkeerde voorstellingen maakt *); terwijl ik aan de leer der onbepaalde vraagstukken eene geheele afdeeling heb gewijd. De redenen, die ik daarvoor

*) Hoe zelfs schrijvers over de rekenkunde zich daarvan verkeerde voorstellingen maken, kan men zien in v. Loghem's en Donck's *Theoriën*.

had, zijn zeer gewichtig. Zoo één gedeelte der algebra het vindingsvermogen ontwikkelt, dan geschiedt dit zeker wel door het rationeel maken van verschillende polynomia. Ondanks de algemeene regels, die ik daarvoor heb aangegeven, zijn er nog zoovele bijzondere vormen, waarop deze regels niet rechtstreeks kunnen toegepast worden; zoovele andere, waarbij zij voor zooveel vereenvoudiging vatbaar zijn, dat de leerling in de opgegeven vraagstukken, zoo ik hoop, eene welkome gelegenheid zal hebben, om zijne krachten te beproeven en zijn vindingsvermogen in te spannen. Bovendien heeft de onbepaalde analysis nog dit nut, dat zij ons bekend maakt met den aard en samenstelling van vele vormen; zij geeft ons een dieperen blik in de structuur der polynomia en legt zoodoende een goeden grond voor de Hoogere analysis, in 't bijzonder voor de Hoogere Theorie der Getallen en voor de Integraalrekening, waar kortere bewerkingen gewoonlijk een gevolg zijn van een dieperen blik in den aard van den vorm.

Juist om met den aard en samenstelling der polynomia bekend te worden, heb ik ook FOURRIER's Oplossing der vergelijkingen breedvoerig behandeld; de beschouwingen, die ons tot zijne oplossing brengen, maken ons bekend met fraaie eigenschappen der afgeleide functiën.

De logarithmische en goniometrische functiën zijn zoo nauwkeurig mogelijk behandeld, terwijl het geheel besloten wordt met eene verhandeling over de Determinanten, die men nog in geen Nederlandsch leerboek aantreft.

Ik heb getracht dit werk op te voeren tot de tegenwoordige hoogte der wetenschap; daartoe zijn door mij tal van schrijvers geraadpleegd, die in den tekst allen zijn opgegeven. Nog leerling, verwonderde het mij ten hoogste, dat men in de Natuurkunde aan elken uitvinder recht liet wedervaren; dat men sprak van het stelsel van NEWTON, van de theorie van VAN REES, den electrometer van BENNET, terwijl ik in wiskundige werken zelden den schrijver vermeld vond, aan wien wij eene of andere stelling, een of ander fraai bewijs te danken hadden; tevens miste ik in de meeste zoodanige werken de bronnen, uit welke men geput had, en verwijzingen naar uitvoeriger verhandelin-

gen over bijzondere gedeelten. Uit KLÜGEL's Woordenboek en BALTZER's schriften zijn mij vele werken bekend geworden, die voor eene grondige studie der Wiskunde onmisbaar zijn; die bronnen zijn door mij, voor zoo verre mij zulks mogelijk was, met elkander vergeleken; ik heb daaruit mijne aanteekeningen gemaakt en deze in aanmerkingen, die door het geheele werk verspreid zijn, aan den Lezer medegedeeld. — Deze wijze van handelen, reeds in mijne Rekenkunde gevolgd, heb ik voor eene zekere verdienste van dat werk gehouden. Heb ik daarin mis gezien? — Tot nog toe is mij geene andere beoordeeling mijner Rekenkunde onder de oogen gekomen, dan eene zeer gunstige van de eerste twee afleveringen; intusschen vindt men hierin niets aangaande deze losse aanteekeningen; het overige gedeelte van dat werk schijnt door de kritiek eenvoudig weg geïgnoreerd te worden. — Ik zou haast met GEORGE PRIMROSE kunnen uitroepen: „Every man of them was employed in praising his friends and himself, or condemning his enemies; and unfortunately as I had neither, I suffered the cruellest mortification, neglect", ware het niet, dat het goede debiet mij verzekerde, dat dit werk zijn' weg reeds ten deele gevonden heeft.

Eene nadere beslissing over het al of niet doelmatige dier aanteekeningen afwachtende, roep ik intusschen voor dezelve zoowel als voor het geheele werk ieders toegevendheid in. Elke terechtwijzing zal mij welkom zijn; van iedere bruikbare aanmerking zal aanteekening gehouden worden, om daarvan, zoo een tweede druk mocht noodig worden, een dankbaar gebruik te maken. *)

---

*) Zou dat „geheel vergeten worden" van de kritiek een gevolg zijn van de noot in het voorbericht mijner Rekenkunde? Eene soort van straf, omdat ik aan ongeteekende be- en veroordeelingen alle waarde ontzeide. — Op dat punt ben ik nog niet van opinie veranderd. Iemand, die op wetenschappelijk gebied eene kritiek levert, hoe zij dan ook zij, moet daarbij zijn' naam ten beste geven; zoo hij dat niet doet, dan herinner ik hem aan het puntdicht van HAUG:

A. Mein Werkchen kommt im Druck heraus, doch meinen Namen lass' ich aus.

B. Lass deinen Namen drucken Claus, und lass dein Werkchen aus.

Ondanks eene zeer nauwlettende correctie, heb ik in de afgedrukte vellen nog eenige onnauwkeurigheden en misstellingen ontdekt, ik zal ze gaande weg verbeteren en in een errata mededeelen, voor zoo verre zij zinstorend zijn. Den HH. J. W. SLAGER en P. VAN TOORENBURG, die mij bij het corrigeeren der drukproeven de behulpzame hand geboden hebben, breng ik hierbij mijnen hartelijken dank.

En hiermede beveel ik ook dezen arbeid aan de welwillendheid van den Lezer. Mocht hij strekken om de studie der Wiskunde vruchtbaarder en algemeener te maken, dan waren mijne stoutste wenschen vervuld.

G. A. VORSTERMAN VAN OIJEN.

AARDENBURG,
29 Maart 1868.

§ 1. Inleiding.

1. Wanneer wij twee getallen, twee gelijksoortige grootheden, twee algebraïsche vormen met elkander vergelijken, dan zal ons blijken, dat zij of gelijk, of ongelijk zijn. De ongelijkheid is tweeërlei: het eerste getal, de eerste grootheid, de eerste algebraïsche vorm is grooter of kleiner dan de tweede, zoodat men, de eerste grootheid A, de tweede B noemende, na vergelijking tot het besluit zal komen, dat

$$A = B, \text{ of } A > B, \text{ of } A < B;$$

welke drie uitkomsten, als het resultaat van *vergelijken*, eene *vergelijking* worden genoemd.

Aanmerking. Bij het vergelijken van getallen en algebraïsche vormen kan er natuurlijk alleen sprake zijn van de waarde, die met elkander vergeleken wordt. — De vergelijking van grootheden, als zijnde geheel eene werking onzer zintuigen, moet altijd onnauwkeurig zijn; door meten en passen zal men slechts eene benaderde waarde der grootheid voor de grootheid in de plaats kunnen stellen. De aard der werktuigen, de oplettendheid van den waarnemer, enz. zullen van grooten invloed op de nauwkeurigheid der vergelijking zijn. De vergelijking van getallen en algebraïsche vormen, als zijnde eene werking van 't verstand, kan volkomen nauwkeurig zijn.

2. Ingevolge de voorgaande beschouwing zal door eene vergelijking blijken, of twee getallen, grootheden, algebraïsche vor-

men, *gelijk* of *ongelijk* zijn. Blijkt de gelijkheid, dan noemt men de vergelijking eene *vergelijking van gelijkheid* ook *vergelijking* in engeren zin; blijkt de ongelijkheid, dan noemt men de vergelijking eene *vergelijking van ongelijkheid.*

Wij zullen in den loop dezer verhandeling zien, hoe beide deze vergelijkingen aan ons doel worden dienstbaar gemaakt. Voorloopig zullen wij ons echter meestal alleen bezig houden met de vergelijkingen van gelijkheid en deze eenvoudig weg *vergelijkingen* noemen. Indien intusschen die vergelijkingen alleen dienden, om de bestaande gelijkheid aan te wijzen, dan zouden zij ons een betrekkelijk gering nut opleveren; want ze zouden slechts dienen, om bestaande feiten te constateeren. Zij zouden ons bij onze analytische beschouwingen volstrekt geene diensten bewijzen. Hare grootste toepassing vinden zij in haar vermogen, om de voorwaarden op te geven, bij welker vervulling eene begeerde gelijkheid ontstaan zal.

3. Laat, om het zoo even gezegde op te helderen, gevraagd worden: *het getal een en twintig in twee deelen te verdeelen, zoodanig, dat het één deel vijf eenheden meer bevat, dan het andere.* Wanneer ik nu aanneem, dat het eene deel x eenheden bevat, dan zal het andere deel $x+5$ of $x-5$ eenheden moeten bevatten, naargelang x het kleinste of het grootste deel is. Deze deelen nu wederom bij elkaâr opgeteld, moeten het geheele getal 21 opleveren, zoodat men dus heeft:

$$\left.\begin{array}{l} x+x+5=21 \\ x+x-5=21 \end{array}\right\} \text{ waarin } x \text{ het } \left\{\begin{array}{l} \text{kleinste} \\ \text{grootste} \end{array}\right\} \text{ deel is.}$$

Nemen wij nu de eerste vergelijking $2x+5=21$, dan zien wij daaruit, op welke wijze het kleinste deel onder de gestelde voorwaarde van het geheele getal afhangt. — Ware het vraagstuk algemeen opgegeven: *het getal a in twee deelen te verdeelen, zoodanig, dat het eene deel b eenheden meer bevat, dan het andere*, dan zou men het kleinste deel, eveneens x stellende, vinden:

$$2x+b=a,$$

wijzende hier de vergelijking voor alle mogelijke getallen aan, onder welke voorwaarden men een getal in twee deelen kan verdeelen, welke een gegeven aantal eenheden verschillen.

4. Ofschoon men zich in de rekenkunde, zoowel bijzondere als algemeene, herhaaldelijk van vergelijkingen bedient, zijn deze daar niet op hare plaats, dan voor zoover hare herleidingen direct berusten op de axioma's, die in mijne *Theorie der Algemeene Rekenkunde* § 4 zijn opgegeven. Alle andere herleidingen der vergelijkingen, zoowel als het opsporen van de waarde van een of meer onbekenden, die van een zeker aantal gegevens afhangen; door middel van vergelijkingen, is het werk der *Algebra*.

In de algebra, zoowel als in de rekenkunde, bedient men zich alleen van abstracte getallen; voor zoover deze uit eenig vraagstuk voortkomen, worden de concrete getallen noodzakelijk als abstract beschouwd en kunnen ook alleen als zoodanig behandeld worden. Verder heeft men de gewoonte de bekenden van eenig vraagstuk door de eerste letters, de onbekenden door de laatste letters van het alphabet voor te stellen, terwijl de middelste letters dikwijls dienen, gelijk zulks ook in de Algemeene Rekenkunde gezien is, om iets zeer algemeens uit te drukken.

Aanmerking. 1. De verandering, die de gedaante eener vergelijking ondergaat, door de vergelijking op 0 te herleiden, heette bij de Spaansche Arabieren Algebra; later heeft men het woord in 't algemeen gebruikt voor letterrekening; tegenwoordig omvat het meer in het bijzonder de leer der niet-identieke vergelijkingen. (Zie R. Baltzer *Elem.*)

2. Tot in het begin der zeventiende eeuw noemde men de Algebra Regula Cos; algebraïsche vormen noemde men *cossische getallen*. Viëta, † 1603, heeft, zoo ver men weet, ook voor het eerst de gegeven grootheden door letters voorgesteld en zoo eene eigenlijke letterrekening in 't leven geroepen. Hij noemt die letters *species*, en daarom zijne rekenwijze *logistica speciosa*. Verder bedient hij zich nog van uitdrukkingen, die thans geheel vergeten zijn: zoo noemt hij het brengen van een term uit het eene lid der vergelijking naar het andere, *antithesis;* het deelen van alle termen door een getal, *hypobibasmus*, enz. Kleine letters zijn voor het eerst gebruikt door Harriot (1560—1621). Uitvoerige aanteekeningen dienaangaande vindt men bij A. G. Kästner. *Geschichte der Mathematik.* 1799. III.

3. De woorden *stelkunde* en *stelkundigen vorm* vermijd ik met opzet, omdat ze niet juist het begrip uitdrukken, dat men daaraan hechten moet. Ik vermoed, dat de naam *stelkunde* ontstaan is door de gewoonte, om bij 't in vergelijking brengen van vraagstukken te zeggen: STEL *de onbekende* enz. — Het eerste werk, waarin de *algebra stelkunde* wordt genoemd, is *Eene Korte en Klare onderwijsing in de Beginselen van de Algebra* of *Stelkonst* enz. enz. door PIETER VENEMA, *Mr. in de Mathesis en Schrijfkonst*. Dit werkje, waarvan in 1803 een zevende en laatste druk verscheen, bevat hoofdzakelijk oplossingen van vraagstukken uit WILKENS ± 1610, BARTJENS ± 1650, DE GRAAF ± 1660.

5. Om in deze theorie der algebra een geregelden gang te houden, verdeelen wij dit onderdeel der wiskunde in drie afdeelingen. De eerste afdeeling zal handelen over de vergelijkingen in 't algemeen, hare verdeeling, herleiding en oplossing; in de tweede afdeeling wordt het onbepaalde vraagstuk behandeld, terwijl het derde gedeelte, dat ook onder den naam van *hoogere algebra* voorkomt, de gronden van de leer der functiën zal bevatten. Herhaaldelijk zullen wij gelegenheid hebben te zien, hoe nauw de algebra verwant is met de meetkunde; daar, waar zulks aanleiding kan geven tot nuttige toepassingen of tot meerdere duidelijkheid, zullen wij ons van meetkundige vraagstukken en meetkundige bewijzen bedienen; waarbij wij ons echter, om niet te veel meetkundige kennis bij den lezer te veronderstellen, zooveel mogelijk op het gebied der lagere meetkunde zullen bewegen. Voor het overige zullen alle meetkundige vraagstukken en oplossingen van dien aard zijn, dat het aan het verband van het geheel niets schaadt, of zij overgeslagen worden. — Alleen de laatste afdeeling veronderstelt eene voldoende kennis van goniometrie en trigonometrie.

§ 2. Verdeeling der vergelijkingen en herleiding tot hare algemeene gedaante.

1. Wanneer een algebraïsche vorm door herleiding uit een anderen vorm is afgeleid en men den afgeleiden gelijk stelt aan den oorspronkelijken, dan ontstaat er eene *identieke* vergelijking, d. i. eene zoodanige, die voor alle waarden der daarin voorkomende letters doorgaat. Heeft men bijv.:

$$(a+b)(a-b) = a^2-b^2,$$
$$(x^2+xy+y^2)(x-y) = x^3-y^3,$$
$$(a+b+c)(a+b-c) = a^2+b^2-c^2+2ab,$$

dan zijn deze vergelijkingen identiek, omdat, welke waarde men ook moge nemen voor de daarin voorkomende letters, steeds het eerste lid der vergelijking eene zelfde waarde verkrijgt, als het tweede lid.

2. Wanneer men een willekeurig polynomium of monomium gelijk stelt aan een ander, dan ontstaat er ook eene vergelijking, welke echter in den regel niet door zal gaan voor alle waarden, die men aan de daarin voorkomende letters geeft. Neemt men bijv.:

$$2a^2+b = 3a+2b,$$

en stelt men daarin $a=3$ en $b=9$ of $a=2$ en $b=2$, enz., dan zal men wel vinden $18+9=9+18$, $10=10$, enz.; doch neemt men $a=4$ en $b=5$, dan zou men verkrijgen $37=22$, ten bewijze, dat de vergelijking waar blijft voor sommige, maar niet voor alle waarden van de daarin voorkomende letters. Die waarden, waarvoor de vergelijking waar blijft, worden gezegd *aan de vergelijking te voldoen*, terwijl de vergelijking zelve *niet identiek* genoemd wordt.

3. Een vergelijking wordt *valsch* genoemd, wanneer men door het teeken $=$ vormen of grootheden aan elkander verbindt, welke, uit geen enkel oogpunt beschouwd, aan elkander gelijk kunnen zijn. Zijn x, y en z bijv. drie rechte lijnen, die een bepaald plat vlak insluiten, dan is de vergelijking

$$x+y=z$$

eene valsche, omdat onder voorwaarde, dat deze drie lijnen een plat vlak volkomen begrenzen, $x + y > z$;
gelijk in de meetkunde wordt bewezen. (EUCL. I. 20). *)

4. Wanneer men eene *niet-identieke* vergelijking heeft, dan zal men voor alle daarin voorkomende letters op ééne na bepaalde waarden kunnen aannemen, om vervolgens op te sporen, hoedanig de waarde van de laatste letter van de vorigen afhangt, ten einde uit de aangenomene waarden ook voor deze laatste eene waarde te vinden, die aan de vergelijking voldoet. Zoodanige handelwijze noemt men de vergelijking *ten opzichte* van die *letter oplossen;* die letter zelve is de *onbekende;* de gevondene waarde voor de onbekende in de vergelijking overbrengen heet *substitueeren.* — Heeft men bijv.:

$$5a + 2b = cd,$$

en beschouwt men in deze vergelijking d als onbekende, dan ziet men al aanstonds, dat het zeer toevallig zijn zou, dat willekeurige waarden voor a, b, c, d de vergelijking waar lieten blijven; maar ook tevens dat, welke waarden men neemt voor a, b en c, d altijd het c^{de} gedeelte moet zijn van $5a + 2b$. Brengt men nu deze waarde van d in de oorspronkelijke vergelijking over, dan vindt men:

$$5a + 2b = c \times \frac{5a + 2b}{c},$$

welke laatste vergelijking identiek is, d. i. door zal gaan voor alle willekeurige waarden van de thans daarin overgeblevene letters.

5. Elke vergelijking, 't zij voortgevloeid uit een vraagstuk, 't zij willekeurig aangenomen, kan eene of meer onbekenden bevatten. In het eerste geval mag men aan de onbekenden natuurlijk geene willekeurige waarden geven, omdat men dan gegevens aan het vraagstuk toe zou voegen; in het tweede geval is zulks blijkens het vorige N°. wel geoorloofd. Naar het aantal der onbekenden spreekt men van *vergelijkingen met ééne, met twee, met drie*, enz. *onbekenden.*

*) Bij aanhalingen uit EUCLIDES bedien ik mij van de *Elementa Euclidea Geometriae, Auct.* ANDREA TACQUET, *novissimam hanc Editionem adornavit, plurimisque corollariis varios propositionum usus exhibentibus illustravit, et schemata XL addidit* GULIELMUS WHISTON. *A. M.* — *Amstelodami, Apud Petrum de Coup.* MDCCXXV.

6. De grootste som der exponenten van de onbekenden, die in één term der vergelijking voorkomen, bepaalt *den graad* der vergelijking. Eene vergelijking is tot hare *algemeene gedaante* gebracht, wanneer het eerste lid een polynomium is, gerangschikt volgens de afdalende machten van eene der onbekenden, terwijl het tweede lid der vergelijking $= 0$ is; tevens zorgt men, dat de coëfficiënt van de hoogste macht eener onbekende gelijk is aan de eenheid. Na zoodanige herleiding hebben de vergelijkingen met ééne onbekende de volgende gedaante:

$$x + A_1 = 0$$
$$x^2 + A_1 x + A_2 = 0$$
$$x^3 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3 = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots\ldots A_{n-1} x + A_n = 0.$$

Met twee onbekenden:

$$x + Py + Q = 0$$
$$x^2 + (Py + Q)x + (Ry^2 + Sy + T) = 0$$
$$x^3 + (Py+Q)x^2 + (Ry^2 + Sy + T)x + (Uy^3 + Vy^2 + Wy + Z) = 0,$$

enz.

$$x^n + (Py+Q)x^{n-1} + \ldots\ldots (Ay^n + A_1 y^{n-1} + \ldots A_{n-1} y + A_n) = 0,$$

welke vergelijkingen achtereenvolgens van den eersten, tweeden, derden ..... $n$den graad zijn.

Op dergelijke wijze kan men de vergelijkingen met meer dan twee onbekenden en van verschillende graden tot eene algemeene gedaante herleiden, die met de opgegevene zoo zeer overeenkomt, dat het wel niet noodig zal zijn, daarvan eene afzonderlijke opgave te doen.

7. De herleiding van vergelijkingen berust geheel op axioma's, die ofschoon in de algemeene rekenkunde reeds opgegeven, hier om het verband dienen aangevoerd te worden. Zij luiden:

I. *Gelijke getallen mogen met gelijke vermeerderd, verminderd, vermenigvuldigd, door gelijke gedeeld, tot eene zelfde macht verheven worden en daaruit kan een gelijknamige machtswortel getrokken worden, zonder dat dit de gelijkheid der uitkomsten kan verstoren.*

II. *Men mag een term van het eene lid eener vergelijking naar het andere overbrengen, mits men dien term het tegengestelde teeken geeft.*

III. *Men mag de overeenkomstige leden van vergelijkingen bij elkaâr optellen, van elkaâr aftrekken, met elkaâr vermenigvuldigen of door elkaâr deelen.*

Kunnende men het 2de en het 3de dezer axioma's aanmerken als geheel opgesloten in het eerste.

IV. *Ongelijke getallen, met gelijke vermeerderd, verminderd, vermenigvuldigd, door gelijke gedeeld, tot eene zelfde macht verheven, of daaruit een gelijknamige machtswortel getrokken zijnde, leveren nog ongelijke uitkomsten, en wel de uitkomst zal daar de grootste zijn, waar oorspronkelijk het meeste was.*

V. *Gelijke getallen met ongelijke vermeerderd of vermenigvuldigd, geven ongelijke uitkomsten; en die uitkomst is de grootste, waar de toevoeging of de vermenigvuldiger het grootst waren.*

VI. *Gelijke getallen met ongelijke verminderd of door ongelijke gedeeld, geven ongelijke uitkomsten en daar zal de uitkomst het grootst zijn, waar de subtrahendus en de deeler het kleinst zijn.*

Tot opheldering van deze axioma's dienen de volgende voorbeelden:

I. Is gegeven $2a+b(a+2c)=3ac+b$,
en is p een willekeurig getal, dan is ook:

$$2a+b(a+2c)\pm p = 3ac+b\pm p;$$
$$2ap+bp(a+2c) = p(3ac+b);$$
$$\frac{2a+b(a+2c)}{p} = (3ac+b):p;$$
$$\sqrt[p]{\{2a+b(a+2c)\}} = \sqrt[p]{(3ac+b)}.$$

II. Uit dezelfde vergelijking volgt nog:

$$2a+b(a+2c)-3ac-b=0;$$
$$0=3ac+b-2a-b(a+2c);$$
$$b(a+2c)=3ac+b-2a.$$

III. Zijn gegeven de vergel. $a=b$ en $c=d$, dan heeft men:

$$a\pm c=b\pm d,\ ac=bd,\ \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$ of ook:

$$a\pm d=b\pm c,\ ad=bc,\ \frac{a}{d}=\frac{b}{c}.$$

IV. Zij $A>B$ en $p=q$, dan is:

$$A\pm p>B\pm q,\ Ap>Bq,\ \frac{A}{p}>\frac{B}{q},\ A^p>B^q,\ \sqrt[p]{A}>\sqrt[q]{B}.$$

V. $A = B$ en $p > q$.

$$A + p > B + q \text{ en } Ap > Bq.$$

VI. Onder dezelfde gegevens als in V:

$$A - p < B - q,\ A : p < B : q.$$

Het is van het uiterste belang bij de meeste dezer herleidingen op te merken, dat de aangewezen bewerking steeds op het geheele lid, niet op een enkelen term moet worden toegepast.

Aanmerking. Naderhand zullen wij gelegenheid hebben op te merken, dat de toepassing van deze axioma's niet onvoorwaardelijk mag plaats hebben. Men vergelijke § 10.

8. *Herleidt tot hare algemeene gedaante de vergelijking:*

$$\frac{x^2+1}{x+1} - a^2b(x^2-4) + \frac{3x}{2b} = \frac{a}{b(x-1)} - \frac{x^2}{a}.$$

Om deze vergelijking tot hare algemeene gedaante, d. i. op 0 te herleiden, brengt men eerst alle termen uit het tweede lid naar het eerste, 't geen geschiedt, door aan die termen het tegengestelde teeken te geven. Men vindt dus onmiddellijk:

$$\frac{x^2+1}{x+1} - a^2b(x^2-4) + \frac{3x}{2b} - \frac{a}{b(x-1)} + \frac{x^2}{a} = 0.$$

Vermenigvuldigt men nu de beide leden der vergelijking met het kleinste gemeene veelvoud van de noemers der breuken, die in het eerste lid voorkomen, dan zullen alle gebroken vormen in geheele vormen veranderen, zoodat men, na ontwikkeling der verschillende producten en na behoorlijke rangschikking, een polynomium zal verkrijgen, dat volgens de afdalende machten van x gerangschikt is.

Het kleinste gemeene veelvoud der noemers nu is $2ab(x^2-1)$ en hiermede vermenigvuldigende, vindt men:

$$\left.\begin{array}{l} 2ab(x^2+1)(x-1) - 2a^2b^2(x^2-4)(x^2-1) + 3ax(x^2-1) \\ -2a^2(x+1) + 2bx^2(x^2-1) \end{array}\right\} = 0.$$

en na ontwikkeling:

$$\left.\begin{array}{rrrrrr} & 2abx^3 & - & 2abx^2 & + 2a^2x & - 2ab \\ -2a^4b^2x^4 & & + & 10a^4b^2x^2 & & - 8a^4b^2 \\ & + 3ax^2 & & & - 3ax & \\ & & & & - 2a^2x & - 2a^2 \\ +2bx^4 & & - & 2bx^2 & & \end{array}\right\} = 0.$$

dat is:

$$\left.\begin{array}{r} 2b(1-a^4b)x^4 + a(3+2b)x^3 + 2b(5a^4b-a-1)x^2 \\ + a(2b-2a-3)x - 2a(4a^3b^2+a+b) \end{array}\right\} = 0.$$

Deelt men nu al de termen dezer vergelijking door den coëfficiënt van de hoogste macht van x, dan vindt men eindelijk:

$$x^4 + \frac{a(3+2b)}{2b(1-a^4b)}x^3 + \frac{5a^4b-a-1}{1-a^4b}x^2 + \frac{a(2b-2a-3)}{2b(1-a^4b)}x - \frac{a(4a^3b^2+a+b)}{b(1-a^4b)} = 0,$$

welke vergelijking van den vierden graad is.

Hierin nu is $A_1 = \frac{a(3+2b)}{2b(1-a^4b)}$, $A_2 = \frac{5a^4b-a-1}{1-a^4b}$,

$$A_3 = \frac{a(2b-2a-3)}{2b(1-a^4b)},\ A_4 = \frac{a(4a^3b^2+a+b)}{b(a^4b-1)}.$$

9. *Herleidt tot hare algemeene gedaante de vergelijking:*

$$\frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{x}}{a} = 3.$$

Om deze vergelijking tot hare algemeene gedaante te herleiden, verdrijven wij even als in het vorige vraagstuk de gebrokens, door met $a\sqrt{y}$ te vermenigvuldigen en vinden dan:

$$ax + \sqrt{xy} = 3a\sqrt{y}.$$

Dezen vorm brengen wij tot de tweede macht, om ten minste het wortelteeken uit het tweede lid te verdrijven.

Zulks geeft:

$$a^2x^2 + 2ax\sqrt{xy} + xy = 9a^2y;$$

hiervoor kan men door overbrenging van termen ook schrijven:

$$2ax\sqrt{xy} = 9a^2y - a^2x^2 - xy,$$

waaruit door machtsverheffing volgt:

$$4a^2x^2y = 81a^4y^2 + a^4x^4 + x^2y^2 - 18a^4x^2y - 18a^2xy^2 + 2a^2x^3y,$$

of na rangschikking en vereeniging der termen:

$$a^4x^4 - 2a^2yx^3 + (y^2-18a^4y)x^2 - 18a^2y^2x + 81a^4y^2 = 0$$

Deelt men nu nog door den coëfficiënt van x^4, dan heeft men eindelijk voor de begeerde algemeene gedaante:

$$x^4 - \frac{2y}{a^2}x^3 + \frac{y^2-18a^4y}{a^4}x^2 - \frac{18y^2}{a^2}x + 81y^2 = 0.$$

Merkt men nu op, dat deze vergelijking met twee onbekende

van den 4en graad is en dus, ingevolge § 2, 6, tot algemeene gedaante heeft:

$$\left.\begin{array}{l} x^4+(Ay+A_1)x^3+(By^2+B_1y+B_2)x^2+ \\ +(Cy^3+C_1y^2+C_2y+C_3)x+(Dy^4+D_1y^3+D_2y^2+D_3y+D_4) \end{array}\right\}=0,$$

dan ziet men, dat door achtereenvolgens

$$A=-\frac{2}{a^2},\ A_1=0;$$

$$B=\frac{1}{a^4},\ B_1=-18,\ B_2=0;$$

$$C=0,\ C_1=-\frac{18}{a^2},\ C_2=0,\ C_3=0;$$

$$D=0,\ D_1=0,\ D_2=81,\ D_3=0,\ D_4=0,$$

in de laatste vergelijking te substitueeren, de eerste vergelijking gevonden wordt.

Aanmerking. De beide vorige voorbeelden zijn voldoende, om aan te wijzen, hoe men eene vergelijking tot hare algemeene gedaante herleidt. De volgorde der verschillende bewerkingen valt zoo gemakkelijk in het oog, dat daarvoor geen afzonderlijke regel van bewerking behoeft opgegeven te worden. Overigens zal de lezer in de volgende vraagstukken en bij het opsporen van de wortels eener vergelijking herhaaldelijk gelegenheid hebben, om zich te oefenen in het herleiden eener vergelijking tot hare algemeene gedaante.

10. VRAAGSTUKKEN TER TOEPASSING.

Herleidt tot hare algemeene gedaante de vergelijkingen:

1) $x+\frac{ax}{b\sqrt{x}}=\frac{cx}{\sqrt{x}}-c.$

2) $\frac{2x+1}{x-a}+\frac{3x^2}{x+a}=\frac{4}{x^2-a^2}+x^2.$

3) $\frac{5x^2+x}{\sqrt{(x^2-1)}}\times\frac{x-1}{x(x^2+1)}=\frac{5(x+2)}{\sqrt{(x+1)}}\times\sqrt{(x-1)}+4\sqrt{\frac{x-1}{x^2+1}}.$

4) $\frac{x(x+y)}{x-y}-\frac{4xy}{2(x+y)}+7=x^2.$

5) $\sqrt{\frac{y-2}{x-3}}=\frac{\sqrt{(2-y)}-\frac{1}{2}\sqrt{(3-x)}}{\sqrt{(x-3)}\times\sqrt{-1}}+\frac{1}{6}\sqrt{(y-2)}.$

ANTWOORDEN.

1) $x^2 + \left\{2c - (c - \frac{a}{b})^2\right\}x + c^2 = 0$. Van den tweeden graad.

2) $x^4 - 3x^3 - (a^2 - 3a + 2)x^2 - (2a + 1)x - (a - 4) = 0$. Van den vierden graad.

3) $x^4 + \frac{3}{5}\frac{1}{5}x^3 + 1\frac{3}{1}\frac{2}{0}\frac{2}{0}x^2 + \frac{3}{5}\frac{7}{0}x + \frac{1}{4}\frac{3}{0} = 0$. Van den vierden graad.

4) $x^4 - x^3 - (y^2 + 7)x^2 - 3y^2x + 7y^2 = 0$. Van den vierden graad.

5) $y - 11 = 0$. Van den eersten graad.

---

§ 3. Over de imaginaire getallen en eenige hunner voornaamste eigenschappen.

1. In de *Theorie der Algem. Rekenk.*, § 18, 10 hebben wij reeds gezien, wat wij verstaan moeten door imaginaire getallen. Hier zullen nu eenige hunner eigenschappen voorkomen, die voor het juiste begrip van het volgende onmisbaar zijn.

2. De gewone gedaante, waaronder een imaginair getal voorkomt, is $a + b\sqrt{-1}$ of $a + \mathrm{i}b$.

Van zoodanig getal is $\sqrt{(a^2 + b^2)}$ de *modulus*.

De twee imaginaire getallen

$$a + \mathrm{i}b \quad \text{en} \quad a - \mathrm{i}b$$

zegt men, dat elkander *geconjungeerd* of *toegevoegd* zijn. Geconjungeerde imaginaire getallen hebben natuurlijk denzelfden modulus.

3. Stelling. *Indien* $a + \mathrm{i}b = c + \mathrm{i}d$, *dan is ook* $a = c$ *en* $b = d$.

Bewijs. Dewijl $a + \mathrm{i}b = c + \mathrm{i}d$, is ook $a - c = (d - b)\mathrm{i}$. Hierin nu is eene reeële grootheid gelijk aan eene imaginaire; 't geen alleen waar kan zijn, indien $a - c = 0$ en $b - d = 0$, waardoor de stelling bewezen is.

4. Stelling. *Alle sommen, verschillen, producten, machten en quotiënten van imaginaire vormen van de gedaante* $a + \mathrm{i}b$, *kunnen weder tot de gedaante* $A + \mathrm{i}B$ *herleid worden.*

Bewijs. 1e. $(a+\mathrm{i}b)+(a_1+\mathrm{i}b_1)+(a_2+\mathrm{i}b_2)+\ldots\ldots=$
$=(a+a_1+a_2\ldots)+(b+b_1+b_2+\ldots)\mathrm{i}=A+\mathrm{i}B.$

2e. $(a+\mathrm{i}b)-(a_1+\mathrm{i}b_1)-(a_2+\mathrm{i}b_2)-\ldots\ldots=$
$=(a-a_1-a_2-\ldots\ldots)+(b-b_1-b_2-\ldots\ldots)\mathrm{i}=A+\mathrm{i}B.$

3e. $(a+\mathrm{i}b)(a_1+\mathrm{i}b_1)=(aa_1-bb_1)+(ab_1+a_1b)\mathrm{i}=A+\mathrm{i}B.$

Stellen wij hierin $aa_1-bb_1=p$ en $ab_1+a_1b=q$, dan heeft men:

$$(a+\mathrm{i}b)(a_1+\mathrm{i}b_1)(a_2+\mathrm{i}b_2)=(p+\mathrm{i}q)(a_2+\mathrm{i}b_2)=$$
$$=(pa_2-qb_2)+(qa_2+pb_2)\mathrm{i}=A+\mathrm{i}B;$$

waaruit ten duidelijkste blijkt, dat de stelling ook doorgaat voor drie en meer factoren.

4e. Neemt men in de vorige producten $a=a_1=a_2=\ldots\ldots$ en $b=b_1=b_2=\ldots\ldots$, dan heeft men:
$(a+\mathrm{i}b)(a_1+\mathrm{i}b_1)=(a+\mathrm{i}b)^2=(a^2-b^2)+2ab\mathrm{i}=A+\mathrm{i}B.$
Voor de derde en hoogere machten is het bewijs volkomen analoog.

5e. $$\frac{a+\mathrm{i}b}{a_1+\mathrm{i}b_1}=\frac{(a+\mathrm{i}b)(a_1-\mathrm{i}b_1)}{(a_1+\mathrm{i}b_1)(a_1-\mathrm{i}b_1)}=\frac{(aa_1+bb_1)+(a_1b-ab_1)\mathrm{i}}{a_1^2+b_1^2}$$
$$=\frac{aa_1+bb_1}{a_1^2+b_1^2}+\frac{a_1b-ab_1}{a_1^2+b_1^2}\mathrm{i}=A+\mathrm{i}B.$$

Door de beide gebrokens respectievelijk gelijk p en q te stellen, kan men ook het quotiënt $\left(\frac{a+\mathrm{i}b}{a_1+\mathrm{i}b_1}\right):(a_2+\mathrm{i}b_2)$ nader bepalen. Uit die te verrichten bewerking ziet men ten duidelijkste, dat ook hier wederom het quotiënt van de gedaante $A+\mathrm{i}B$ zal zijn.

Aanmerking. Ofschoon het herleiden van de imaginaire vormen tot de imaginaire eenheid eerst door GAUSS op alle vormen in toepassing is gebracht, was de aangehaalde stelling reeds bekend aan CASTILLIONEUS, Commentator van NEWTON's *Arithm. universalis.* T. II. pag. 11.

5. Stelling. *De modulus van het product van twee of meer imaginaire vormen, is gelijk aan het product van de moduli dier vormen.*

Bewijs. Indien gegeven zijn de vormen $a+\mathrm{i}b$ en $c+\mathrm{i}d$, wier moduli zijn $\sqrt{(a^2+b^2)}$ en $\sqrt{(c^2+d^2)}$, dan zal men moeten bewijzen, dat de modulus van $(a+\mathrm{i}b)(c+\mathrm{i}d)$ gelijk is aan $\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$. Ontwikkelt men het product van $(a+\mathrm{i}b)$

en $(c+\mathbf{i}d)$, dan vindt men onmiddellijk: $(ac—bd)+(ad+bc)\mathbf{i}$, welks modulus volgens N°. 2 gelijk is aan

$$\sqrt{\{(ac—bd)^2+(ad+bc)^2\}} =$$

$$= \sqrt{\{a^2c^2—2abcd+b^2d^2+a^2d^2+2abcd+b^2c^2\}} =$$

$$= \sqrt{(a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2)} = \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)},$$

waardoor het gestelde bewezen is. In verband met N°. 4, 3°. volgt hieruit nu onmiddellijk, dat de stelling voor een willekeurig aantal factoren doorgaat. Het bewijs daarvan kan den lezer niet meer moeilijk vallen.

6. Stelling. *De modulus van het quotiënt van twee imaginaire vormen is gelijk aan het quotiënt van de moduli dier vormen.*

Bewijs. In N°. 4, 5°. vonden wij:

$$\frac{a+\mathbf{i}b}{a_1+\mathbf{i}b_1} = \frac{aa_1+bb_1}{a_1^2+b_1^2} + \frac{a_1b—ab_1}{a_1^2+b_1^2}\mathbf{i}.$$

De modulus der laatste grootheid is:

$$\sqrt{\left\{\left(\frac{aa_1+bb_1}{a_1^2+b_1^2}\right)^2 + \left(\frac{a_1b—ab_1}{a_1^2+b_1^2}\right)^2\right\}} =$$

$$= \sqrt{\frac{a^2a_1^2+2aa_1bb_1+b^2b_1^2+a_1^2b^2—2aa_1bb_1+a^2b_1^2}{(a_1^2+b_1^2)^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(a^2+b^2)(a_1^2+b_1^2)}{(a_1^2+b_1^2)^2}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a_1^2+b_1^2}} = \frac{\sqrt{(a^2+b^2)}}{\sqrt{(a_1^2+b_1^2)}}.$$

In verband met N°. 4, 5°. volgt hieruit nu onmiddellijk, dat de stelling voor een willekeurig aantal vormen doorgaat. Ook hiervan laat ik het bewijs aan den lezer.

7. Stelling. *De modulus van de som en het verschil van twee imaginaire vormen ligt tusschen het verschil en de som der moduli van elken vorm afzonderlijk.*

Bewijs. Wanneer gegeven zijn de imaginaire vormen $a+\mathbf{i}b$ en $c+\mathbf{i}d$, dan is de som hunner moduli $\sqrt{(a^2+b^2)}+\sqrt{(c^2+d^2)}$ en derzelver verschil $\sqrt{(a^2+b^2)}—\sqrt{(c^2+d^2)}$. De modulus hunner som is $\sqrt{\{(a+c)^2+(b+d)^2\}}$; die van hun verschil $\sqrt{\{(a—c)^2+(b—d)^2\}}$. Nu is:

$$(ac+bd)^2+(ad—bc)^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2);$$

derhalve $(ac+bd)^2 =$ of $< (a^2+b^2)(c^2+d^2)$, omdat $(ad—bc)^2$, als zijnde een vierkant, altoos nul of een positief getal is.

Verder is ook $ac+bd =$ of $< \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$, derhalve ligt de waarde van $ac+bd$ altijd (vergel. ook de volgende §) tusschen $-(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}(c^2+d^2)^{\frac{1}{2}}$ en $+(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}(c^2+d^2)^{\frac{1}{2}}$; waaruit dan verder volgt, dat $2ac+2bd$ gelegen is tusschen

$-2(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}(c^2+d^2)^{\frac{1}{2}}$ en $+2(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}(c^2+d^2)^{\frac{1}{2}}$,

en dat $a^2+b^2-(2ac+2bd)+c^2+d^2$ en

$a^2+b^2+(2ac+2bd)+c^2+d^2$

gelegen zijn tusschen

$a^2+b^2-2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}+c^2+d^2$ en

$a^2+b^2+2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}+c^2+d^2$;

of wat hetzelfde is, dat:

$(a-c)^2+(b-d)^2$ en $(a+c)^2+(b+d)^2$

gelegen zijn tusschen

$\left\{\sqrt{(a^2+b^2)}-\sqrt{(c^2+d^2)}\right\}^2$ en $\left\{\sqrt{(a^2+b^2)}+\sqrt{(c^2+d^2)}\right\}^2$,

of eindelijk, dat

$\sqrt{\left\{(a-c)^2+(b-d)^2\right\}}$ en $\sqrt{\left\{(a+c)^2+(b+d)^2\right\}}$

gelegen zijn tusschen

$\pm\left\{\sqrt{(a^2+b^2)}-\sqrt{(c^2+d^2)}\right\}$ en $\pm\left\{\sqrt{(a^2+b^2)}-\sqrt{(c^2+d^2)}\right\}$;

waarbij men zorgen moet, dat de vorm steeds positief blijft, door het teeken $+$ of $-$ te gebruiken, naargelang $c^2+d^2 <$ of $> a^2+b^2$.

8. Stelling. *De som en het product van twee geconjungeerde imaginaire vormen zijn reëel; het verschil en het quotiënt blijven imaginair.*

Bewijs. $(a+b\sqrt{-1})+(a-b\sqrt{-1}) = 2a.$

$a+b\sqrt{-1}-(a-b\sqrt{-1}) = 2b\sqrt{-1}.$

$(a+b\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1}) = a^2+b^2.$

$$(a+b\sqrt{-1}) : (a-b\sqrt{-1}) = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} + \frac{2ab}{a^2+b^2}\sqrt{-1}.$$

Aanmerking. Het zal nauwelijks eenige nadere aanwijzing behoeven, dat in de vormen $a+ib$ alle mogelijke imaginaire eentermige vormen begrepen zijn en dat men, door in de bovenstaande formules $a = 0$ te stellen, de stellingen bewezen heeft voor eentermige imaginaire getallen. Voor het overige moet ik hier verwijzen, naar hetgeen dien-

aangaande voorkomt in mijne *Theorie der Algemeene Rekenkunde*, § 18, 10 sqq. en naar de oplossing der binomiaalvergelijkingen.

9. Om in het gebruik van imaginaire getallen eenige vaardigheid te krijgen, raad ik den lezer aan, zich op de volgende vraagstukken te oefenen.

Hoeveel is:

1. $(\sqrt{-12}+\sqrt{-b}+\sqrt{-9})\times\sqrt{-3}$.
2. $8:(-1+\sqrt{-3})$.
3. $-14:(4\sqrt{-3}-2\sqrt{-5})$.
4. $(6-\sqrt{-2}):(1+\sqrt{-2})$.
5. $(4\sqrt{5}-20):(\frac{1}{2}\sqrt{-10}-5\sqrt{-\frac{1}{2}})$.
6. $\{14-\sqrt{15}-(7\sqrt{3}+2\sqrt{5})\sqrt{-1}\}:(7-\sqrt{-5})$.
7. $(a\sqrt{-1}+b\sqrt{-1})^2$,
8. $\sqrt{(-5+2\sqrt{6})}$.
9. $\sqrt{(-6-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}-2\sqrt{6})}$.
10. $\sqrt{(4-4\sqrt{-1}+4\sqrt{-2}-4\sqrt{2})}$.

ANTWOORDEN.

1. $-6-\sqrt{3b}-3\sqrt{5}$.
2. $2(-1-\sqrt{-3})$.
3. $2\sqrt{-3}+\sqrt{-5}$.
4. $\frac{1}{2}-\frac{7}{2}\sqrt{-2}$.
5. $2\sqrt{-2}+2\sqrt{-10}$.
6. $2-\sqrt{-3}$.
7. $-(a^2+2ab+b^2)$.
8. $\pm\{\sqrt{-3}-\sqrt{-2}.\}$.
9. $\pm\{\sqrt{-1}+\sqrt{-2}+\sqrt{-3}.\}$.
10. $\pm\{2+\sqrt{-2}-\sqrt{2}.\}$.

§ 4. Over de gemiddelde waarde.

1. Door *gemiddelde waarde* tusschen verschillende willekeurige grootheden of getallen, hetzij die positief of negatief zijn, verstaat men iedere grootheid of ieder getal, dat grooter, dan het kleinste en kleiner, dan het grootste is. Zijn de grootheden onderling ongelijk, dan zijn er verschillende gemiddelde waarden; zijn zij gelijk, dan is er slechts eene, die gelijk is aan de gegeven grootheden.

Aanmerking. In mijne *Theorie der Algem. Rekenk.* komt een hoofdstuk voor over dit onderwerp, waarin meer bijzonder het *arithmetisch midden* behandeld wordt. Bij de theorie der vergelijkingen somtijds gebruik moetende maken van de gemiddelde waarde tusschen eenige getallen, zijn ze hier in een hoofdstuk te zamen gevoegd. De meeste Nederlandsche boeken zwijgen hierover; bij Fransche en Engelsche schrijvers vindt men er somtijds gewag van gemaakt; Duitsche schrijvers daarentegen behandelen dit onderwerp dikwijls zeer breedvoerig. De volgende verhandeling is ontleend aan GRUNERT, *Suppl.*

2. Stelling. *Indien eenige getallen* a, a_1, a_2, a_3 *gegeven zijn, dan is ieder getal, dat eene gemiddelde waarde is tusschen twee dier getallen, ook eene gemiddelde waarde tusschen allen.*

Bewijs. Het bewijs hiervan vloeit zoo onmiddellijk voort uit de bepaling, dat wij het overlaten aan den lezer.

3. Stelling. *Wanneer wij de gemiddelde waarde tusschen* a *en* b *voorstellen door* $^{\mu}(a,b)$, *dan is het product van*

$$\{a - {}^{\mu}(a,b)\} \quad \{{}^{\mu}(a,b) - b\}$$

steeds positief. N. B. *Is het gelijk aan* 0, *dan wordt het als positief aangemerkt.*

Bewijs. Is $a > b$, dan is $^{\mu}(a,b) < a$ en $^{\mu}(a,b) > b$;

derhalve is $a - {}^{\mu}(a,b)$, zoowel als $^{\mu}(a,b) - b$, positief.

Is $a < b$, dan is $^{\mu}(a,b) > a$ en $^{\mu}(a,b) < b$;

derhalve zijn dan $a - {}^{\mu}(a,b)$ en $^{\mu}(a,b) - b$ negatief.

In ieder geval zal intusschen hun product positief zijn.

4. Stelling. *Is het product van a—A en A—b positief, dan is A eene gemiddelde waarde tusschen a en b.*

Bewijs. Is het product gelijk aan 0, dan is of $a = A$, of $b = A$; in beide gevallen is intusschen A eene $^{\mu}(a,b)$. Is het product niet gelijk 0, dan zijn a—A en A—b te gelijk positief of te gelijk negatief, waaruit wederom onmiddellijk volgt, dat A eene $^{\mu}(a,b)$ is.

5. Stelling. *Wanneer A eene $^{\mu}(a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots.)$ is, en r een willekeurig positief of negatief getal, dan is*

$$rA \text{ eene } {}^{\mu}(ra_1, ra_2, ra_3, ra_4 \ldots.).$$

Bewijs. Noemen wij het kleinste van alle getallen a_1, a_2, a_3 .....: α, en het grootste γ, dan is A eene $^{\mu}(\alpha,\gamma)$ en bijgevolg het product

$$(\alpha—A)(A—\gamma)$$

positief. Omdat nu verder r^2 altijd positief is, is zulks ook het geval met

$$r^2(\alpha—A)(A—\gamma) = (r\alpha—rA)(rA—r\gamma);$$

bijgevolg is rA eene gemiddelde waarde tusschen $r\alpha$ en $r\gamma$, derhalve ook

$$rA \text{ eene } {}^{\mu}(ra_1, ra_2, ra_3, ra_4 \ldots..).$$

6. Stelling. *Wanneer A eene $^{\mu}(a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots..)$ is, dan is, voor elke waarde van r*

$$A \pm r \text{ eene } {}^{\mu}(a_1 \pm r, a_2 \pm r, a_3 \pm r, a_4 \pm r \ldots..).$$

N. B. *Hierbij behooren de bovenste en de onderste teekens bij elkander.*

Bewijs. Geven wij wederom aan α en γ de beteekenis van het vorige N°., dan is A eene $^{\mu}(\alpha,\gamma)$ en het product $(\alpha—A)(A—\gamma)$ positief; derhalve is ook

$$(\alpha \pm r — A \pm r)(A \pm r — \gamma \pm r)$$

positief. Hieruit volgt, dat $A \pm r$ eene $^{\mu}(\alpha \pm r, \gamma \pm r)$ is, en dus is

$$A \pm r \text{ eene } {}^{\mu}(a_1 \pm r, a_2 \pm r, a_3 \pm r, a_4 \pm r).$$

7. Stelling. *Wanneer de getallen* $a_1, a_2, a_3, \ldots$ *allen positief zijn en* A *eene* $^{\mu}(a_1, a_2, a_3 \ldots)$, *dan is ook voor elke waarde van* r:

$$A^r \text{ eene } {}^{\mu}(a_1{}^r, a_2{}^r, a_3{}^r, \ldots)$$

Bewijs. Geeft men aan α en γ wederom de beteekenis van het vorige N°., dan is A eene $^{\mu}(\alpha,\gamma)$.

Is nu $A = \alpha$ of $A = \gamma$, dan is het product

$$(\alpha^r - A^r)(A^r - \gamma^r) = 0, \text{ derhalve positief.}$$

Is daarentegen A niet gelijk aan α, noch aan γ, dan is $A > \alpha$ en $< \gamma$. Het product blijft intusschen positief, derhalve is A^r eene $^{\mu}(\alpha^r,\gamma^r)$ en daarom is

$$A^r \text{ eene } {}^{\mu}(a_1{}^r, a_2{}^r, a_3{}^r, a_4{}^r \ldots).$$

8. Stelling. *Wanneer* $a_1, a_2, a_3, \ldots$ *willekeurige getallen beteekenen,* r *positief en* A *eene* $^{\mu}(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ *is, dan is altijd:*

$$r^A \text{ eene } {}^{\mu}(r^{a_1}, r^{a_2}, r^{a_3}, r^{a_4}, \ldots).$$

Bewijs. Hebben α en γ weder onze gewone beteekenis, dan is A eene $^{\mu}(\alpha,\gamma)$. Is nu A gelijk aan α of γ, dan is het product $(r^{\alpha} - r^{A})(r^{A} - r^{\gamma})$ gelijk aan 0, dus positief. Is daarentegen A ongelijk met α en γ, dan is:

$$A > \alpha \text{ en } A < \gamma;$$

omdat nu volgens de veronderstelling r positief is, is ook:

$$r^A > r^{\alpha} \text{ en } r^A < r^{\gamma},$$

wanneer $r > 1$. Daarentegen is

$$r^A < r^{\alpha} \text{ en } r^A > r^{\gamma}$$

wanneer $r < 1$. In ieder geval hebben de verschillen

$$r^{\alpha} - r^A \text{ en } r^A - r^{\gamma}$$

gelijke teekens, zoodat het product

$$(r^{\alpha} - r^A)(r^A - r^{\gamma})$$

positief is; derhalve is r^A eene $^{\mu}(r^{\alpha}, r^{\gamma})$;

en ook r^A eene $^{\mu}(r^{a_1}, r^{a_2}, r^{a_3}, r^{a_4} \ldots)$.

9. Stelling. *Wanneer* $a_1, a_2, a_3, \ldots$ *positieve getallen zijn en* A *is eene* $^{\mu}(a_1, a_2, a_3, \ldots)$, *dan is in ieder logarithmen stelsel*

$$\log. A \text{ eene } ^{\mu}(\log. a_1, \log. a_2, \log. a_3, \ldots).$$

Bewijs. Nemen wij wederom α en γ in de ons bekende beteekenis, dan is volgens de hypothese A eene $^{\mu}(\alpha,\gamma)$.

Verder hebben de verschillen $\log. \alpha - \log. A$ en $\log. A. - \log. \gamma$ steeds hetzelfde voorteeken, derhalve is het product

$$(\log. \alpha - \log. A)\ (\log. A - \log. \gamma)$$

positief en $\log. A$ eene $^{\mu}(\log. \alpha, \log. \gamma)$; dus is

$$\log. A \text{ eene } ^{\mu}(\log. a_1, \log. a_2, \log. a_3 \ldots).$$

10. Stelling. *Wanneer* $a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots$ *willekeurige,* $b_1, b_2, b_3 \ldots$ *daarentegen getallen zijn met hetzelfde teeken, terwijl het aantal van beiden even groot is, dan is:*

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots}{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots} \text{ eene } ^{\mu}\left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \ldots\right).$$

Bewijs. Zijn α en γ wederom de kleinste en grootste der breuken $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2} \ldots$, dan zijn de verschillen:

$$\frac{a_1}{b_1} - \alpha,\ \frac{a_2}{b_2} - \alpha,\ \frac{a_3}{b_3} - \alpha,\ \frac{a_4}{b_4} - \alpha,\ \ldots$$

$$\gamma - \frac{a_1}{b_1},\ \gamma - \frac{a_2}{b_2},\ \gamma - \frac{a_3}{b_3},\ \gamma - \frac{a_4}{b_4},\ \ldots$$

allen positief, dewijl nu $b_1, b_2, b_3, b_4 \ldots$ een zelfde voorteeken hebben, zullen de vormen, die men verkrijgt door de termen der beide reeksen respectievelijk met $b_1, b_2, b_3 \ldots$ te vermenigvuldigen, gelijke voorteekens hebben. Uit

$$a_1 - \alpha b_1,\ a_2 - \alpha b_2,\ a_3 - \alpha b_3,\ a_4 - \alpha b_4, \ldots$$

$$\gamma b_1 - a_1,\ \gamma b_2 - a_2,\ \gamma b_3 - a_3,\ \gamma b_4 - a_4, \ldots$$

volgt, dat ook de sommen:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots - \alpha(b_1 + b_2 + b_3 + b_4 \ldots)$$

en $\gamma(b_1 + b_2 + b_3 + b_4 \ldots) - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \ldots)$

gelijke teekens hebben. Zulks zal nu ook het geval zijn met

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots}{b_1+b_2+b_3+b_4+\ldots} - \alpha \text{ en } \gamma - \frac{a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots}{b_1+b_2+b_3+b_4+\ldots}$$

derhalve is ook het product

$$\left(\alpha - \frac{a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots}{b_1+b_2+b_3+b_4+\ldots}\right)\left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots}{b_1+b_2+b_3+b_4} - \gamma\right)$$

positief, waaruit onmiddellijk volgt:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4\ldots}{b_1+b_2+b_3+b_4\ldots} \text{ is eene } \mu(\alpha,\gamma),$$

derhalve ook:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots}{b_1+b_2+b_3+b_4+\ldots} \text{ is eene } \mu\left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \frac{a_4}{b_4}\ldots\right).$$

Stelt men hierin $b_1=b_2=b_3=b_4=\ldots=1$, dan vindt men:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots}{n} = \mu(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots)$$

in welke formule de regel begrepen is voor het zoeken van het *arithmetisch midden* tusschen eenige grootheden of getallen.

11. Stelling. *Wanneer* $a_1, a_2, a_3, a_4\ldots$ *en* b_1, b_2, b_3, b_4 *twee reeksen van positieve getallen zijn, dan is:*

$$(a_1a_2a_3a_4\ldots)^{\frac{1}{b_1+b_2+b_3+b_4\ldots}} \text{ eene } \mu\left(\sqrt[b_1]{a_1}, \sqrt[b_2]{a_2}, \sqrt[b_3]{a_3}, \sqrt[b_4]{a_4}\ldots\right)$$

Bewijs. Nemen wij de log. van

$$\sqrt[b_1+b_2+b_3+\ldots]{a_1, a_2, a_3\ldots} \text{ en } \sqrt[b_1]{a_1}, \sqrt[b_2]{a_2}, \sqrt[b_3]{a_3}, \ldots,$$

dan vinden wij:

$$\frac{\log. a_1 + \log. a_2 + \log. a_3 + \ldots}{b_1+b_2+b_3+\ldots} \text{en} \frac{\log. a_1}{b_1}, \frac{\log. a_2}{b_2}, \frac{\log. a_3}{b_3}, \ldots$$

Verder is volgens N°. 10:

$$\frac{\log. a_1 + \log. a_2 + \log. a_3 + \ldots}{b_1+b_2+b_3+\ldots} \text{ eene } \mu\left(\frac{\log. a_1}{b_1}, \frac{\log. a_2}{b_2}, \frac{\log. a_3}{b_3}\ldots\right)$$

en nu volgens N°. 9 tot de getallen overgaande vindt men:

$$\sqrt[b_1+b_2+b_3+\ldots]{a_1 . a_2 . a_3 \ldots} \text{ is eene } \mu\left(\sqrt[b_1]{a_1}, \sqrt[b_2]{a_2}, \sqrt[b_3]{a_3}\ldots\right)$$

Stelt men hierin $b_1=b_2=b_3=\ldots=1$, dan wordt

$$\sqrt[n]{a_1 . a_2 . a_3 . \ldots} \text{ eene } \mu(a_1, a_2, a_3 \ldots).$$

Den vorm aan de linkerzijde noemt men het *geometrisch midden* der grootheden a_1, a_2, a_3.....

Wanneer de wortelgrootheden $\sqrt[b_1]{a_1}$, $\sqrt[b_2]{a_2}$, $\sqrt[b_3]{a_3}$ ..... aan elkander gelijk zijn, dan is $\sqrt[b_1]{a_1} = \sqrt[b_2]{a_2} = \sqrt[b_3]{a_3}$, ... eene gemiddelde waarde tusschen die grootheden, derhalve is in dat geval

$$\sqrt[b_1+b_2+b_3+\ldots]{a_1 . a_2 . a_3 \ldots} = \sqrt[b_1]{a_1} = \sqrt[b_2]{a_2} = \ldots$$

12. Stelling. *Wanneer de breuken* $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2}$, $\frac{a_3}{b_3}$, ... *allen aan elkander gelijk zijn, dan is altijd:*

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \ldots = \pm \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots}{b_1^2+b_2^2+b_3^2+\ldots}},$$

waarin men het bovenste of onderste teeken moet nemen, naargelang de breuken allen positief of negatief zijn.

Bewijs. Volgens de veronderstelling is

$$\frac{a_1^2}{b_1^2} = \frac{a_2^2}{b_2^2} = \frac{a_3^2}{b_3^2} = \ldots;$$

derhalve is volgens N°. 10 en het laatste gedeelte van N°. 11:

$$\frac{a_3^2}{b_1^2} = \frac{a_2^2}{b_2^2} = \frac{a_3^2}{b_3^2} = \ldots = \frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots}{b_1^2+b_2^2+b_3^2+\ldots};$$

waardoor de stelling bewezen is.

---

§ 5. Algemeene eigenschappen der vergelijkingen met ééne onbekende.

1. Wij hebben reeds in § 2 de algemeene gedaante der vergelijkingen met eene onbekende leeren kennen. — Schijnbaar is de gedaante, welke ik dáár opgaf, niet de algemeenste; doch indien men opmerkt, dat de meer algemeene vorm

$Ax^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots A_{n-2} x^2 + A_{n-1} x + A_n = 0$

na deeling door den coëfficiënt van de hoogste macht van x, 't geen altijd mogelijk is, overgaat in

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots \ldots a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

dan kan men de laatste vergelijking, zonder iets aan de algemeenheid te kort te doen, als de algemeene gedaante der ver-

gelijkingen aanmerken. Bovendien zullen wij later zien, dat de coëfficiënten $a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots a_n$ altijd geheele reëele getallen kunnen zijn, indien zulks het geval is met $A, A_1, A_2 \ldots\ldots A_n$. Wanneer zulks in het vervolg niet uitdrukkelijk anders wordt gezegd, zullen de coëfficiënten der onbekende steeds reëele, rationeele getallen zijn.

2. Wanneer men eene vergelijking tot hare algemeene gedaante heeft gebracht, dan noemt men die waarden, welke, voor x gesubstitueerd, het eerste lid der vergelijking $= 0$ maken, *wortels* van de vergelijking. Heeft men bijv.

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

en substitueert men $x = 3$, dan vindt men

$$9 - 15 + 6 = 0;$$

3 is derhalve een wortel van de vergelijking.

Hadde men $x = 2$ genomen, dan zou men eveneens gevonden hebben $0 = 0$; 2 is dus een tweede wortel der zelfde vergelijking. Wij zien hier dus al aanstonds, dat eene vergelijking, in 't algemeen gesproken, meer dan één wortel kan hebben. Door het *oplossen* eener vergelijking verstaat men het opsporen van alle waarden, die, voor x gesubstitueerd, het eerste lid $= 0$ maken.

Wanneer in eene vergelijking twee op elkaâr volgende termen hetzelfde teeken hebben, dan noemt men zulks eene *permanentie*; hebben twee op elkaâr volgende termen niet hetzelfde teeken, dan noemt men zulks eene *variatie*.

De vergelijking

$$x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 7x^2 + 7x - 5 = 0$$

heeft dus twee permanentiën,
en drie variatiën.

Gemakshalve zal ik soms van eene verkorte schrijfwijze gebruik maken, om eene vergelijking voor te stellen:
in plaats toch van

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots A_{n-1} x + A_n,$$

zal ik mij dikwijls bedienen van de symbolische uitdrukkingen $f(x)$, $F(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, welke schrijfwijze gewoonlijk den naam ontvangt van *functie* van x; later zullen wij daaraan eene meer algemeene beteekenis leeren hechten, doch vooreerst

zien wij daarin niets anders, dan een polynomium, gerangschikt volgens de afdalende machten van x, dat, indien men voor x achtereenvolgens waarden substitueert, die met een zeer gering verschil opklimmen, waarden verkrijgt, die ook weinig van elkander verschillen. Eveneens stellen $f(x,y)$, $F(x,y)$, $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ polynomia voor met twee onbekenden, waarvan de gedaante overeenstemt met de vormen in § 2, 6 opgegeven.

Aanmerking. Het woord *functie* is van BERNOUILLI. In een brief van LEIBNITZ aan genoemden wiskundige, gedateerd uit Hanover van den 29 Juli 1698 zegt deze: Placet etiam quod appellatione Functionum uteris. Zie hun *Comm. Phil. et math.* 1745. — CLAIRAUT schijnt de eerste geweest te zijn, die zich van de aangewezen verkorte schrijfwijze bediend heeft — *Mém. de l'acad.* 1733. Vergelijk BALTZER's *Elemente*, die het gebruik van de uitdrukking functie eerst in 1718 stelt.

3. Stelling. *Wanneer men in de vergelijking $f(x) = 0$ voor x twee reëele waarden a en b substitueert en de daarmede overeenstemmende waarden van het polynomium $f(x)$ tegengestelde teekens hebben, dan liggen, indien alle coëfficiënten van $f(x)$ reëel zijn, altijd tusschen a en b één of meer wortels der vergelijking.*

Bewijs. Dewijl alle coëfficiënten verondersteld worden eindige, bepaalde, reëele getallen te zijn en n ook een eindig getal is, zal voor elke waarde van x, die men in het polynomium substitueert, dit polynomium eene eindige waarde verkrijgen of gelijk zijn aan 0. Substitueeren wij nu in $f(x)$ $x = a$, dan vindt men een polynomium, gerangschikt volgens de afdalende machten van a, dat wij kunnen voorstellen door $f(a)$; eveneens stelt $f(b)$ de waarde van $f(x)$ voor, voor $x = b$. Hebben nu $f(a)$ en $f(b)$ tegengestelde teekens, dan kan zulks niet plaats hebben, dan door dat $f(x)$ voor eene of meer waarden tusschen a en b gelijk aan 0 is geworden, dewijl eene eindige grootheid, die met kleine verschillen toe- of afneemt, niet van den positieven tot den negatieven toestand kan geraken, zonder intusschen 0 geweest te zijn. De waarde nu tusschen a en b voor x genomen, welke $f(x)$ gelijk 0 maakt, is volgens de bepaling een wortel der vergelijking.

Heeft men bijv. de vergelijking:

$$f(x) = x^3 + 5x^2 - 2x - 9 = 0,$$

en neemt men daarin $x = 2$ en $x = 0$, dan heeft men:

$$f(2) = 15 \text{ en } f(0) = -9;$$

tusschen 2 en 0 ligt dus zeker één wortel van de vergelijking

$$f(x) = 0.$$

4. Stelling. *Elke vergelijking van onevenen graad met reëele coëfficiënten heeft altijd minstens één reëelen wortel.*

Bewijs. Zij $f(x) = x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + A_3x^{n-3} + \ldots$

$$A_{n-1}x + A_n = 0,$$

dan is $x^n\left(1 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \ldots + \frac{A_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{A_n}{x^n}\right) = 0.$

Dewijl hierin de coëfficiënten A_1, A_2, ... A_n eindige reëele grootheden zijn, kan men voor x altijd zoodanig getal a nemen, dat voor $x = a$ en $x = -a$ de factor

$$1 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \ldots + \frac{A_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{A_n}{x^n}$$

steeds positief blijft.

Is nu n oneven, dan is x^n voor $x = +a$ positief, en voor $x = -a$ negatief; derhalve heeft $f(a)$ volgens de voorgaande stelling minstens één wortel tusschen $+a$ en $-a$.

Aanmerking. Dat men aan x altijd zoodanige eindige waarden kan geven, hetzij positief, hetzij negatief, dat $1 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \ldots + \frac{A_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{A_n}{x^n}$ positief blijft, blijkt uit de volgende beschouwing.

1°. Nemen wij $x = +a$ en zijn A_1, A_2 ..... A_n allen negatief, dan moet, opdat de geheele uitdrukking positief zij,

$$1 > \frac{A_1}{a} + \frac{A_2}{a^2} + \ldots + \frac{A_{n-1}}{a^{n-1}} + \frac{A_n}{a^n},$$

waarin wij a altijd als een getal > 1 beschouwen. Aan deze ongelijkheid zal nog te meer voldaan worden, indien men neemt:

$$1 > \frac{A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1} + A_n}{a}$$

of $$a > A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1} + A_n.$$

2°. Nemen wij $x = -a$ en zijn A_1, A_3, A_5, ... A_n

positief, A_2, A_4, A_6 ..... A_{n-1} negatief, dan komt men door eene zelfde redeneering tot het zelfde resultaat.

De beide hier beschouwde gevallen zijn de minst gunstige, omdat alle termen $\frac{A_1}{x}$, $\frac{A_2}{x^2}$, ... $\frac{A_n}{x^n}$ negatief genomen werden; toch werd voor $x = \pm a = \pm \{A_1 + A_2 + .. A_n\}$ de opgegeven vorm positief; zij zal dus voor die waarden, welke eindig en reëel zijn, als bestaande uit de som van eindige reëele getallen, steeds positief blijven. Substitueert men dus in eene oneven machts-vergelijking $f(x) = 0$ $x = (A_1 + A_2 + A_3 + ... A_n)$ en $x = -(A_1 + A_2 + ... A_n)$, waarin alle getallen A_1, A_2 .... A_n positief genomen worden, dan zal het polynomium daardoor van den positieven tot den negatieven toestand overgaan; elke onevenmachtsvergelijking heeft derhalve één wortel tusschen de som en de negatieve som harer coëfficiënten, mits men alle coëfficiënten positief in rekening brenge, d. i. hunne absolute waarde neme.

5. Stelling. *Elke vergelijking van evenen graad, wier coëfficiënten allen reëel zijn en waarvan de laatste term het teeken min voor zich heeft, heeft altijd minstens twee reëele wortels, waarvan de eene positief, de andere negatief is.*

Bewijs. Ontbinden wij het polynomium $f(x)$ in zijne beide factoren $x^n \left(1 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + ... \frac{A_{n-1}}{x^{n-1}} - \frac{A_n}{x^n}\right)$, dan kan men voor x zoodanige waarde a nemen, dat de tweede factor altoos positief blijft. Maar de eerste factor blijft, omdat n een even getal is, positief zoowel voor $+ a$ als voor $- a$. Substitueeren wij nu $x = 0$, dan krijgt het polynomium eene negatieve waarde, omdat de laatste term negatief is; wij hebben dus:

$f(x)$ voor $x = + a$ wordt positief;
$f(x)$ voor $x = 0$ wordt negatief;
$f(x)$ voor $x = - a$ wordt positief;

en vinden derhalve een positieven wortel tusschen a en 0 en een negatieven tusschen 0 en $- a$.

Aanmerking. De negatieve wortels werden vóór Cardanus niet beschouwd als wortels der opgegeven vergelijking,

en ofschoon men er na dezen wiskundige meer en meer toe kwam om ook de negatieve wortels eener vergelijking als zoodanig te beschouwen, waren er in de 18de eeuw nog geleerden, die zich daartegen verzetten. Veteres Algebrae scriptores versati circa quaestiones arithmeticas; non agnoverunt radices negativas. CARDANUS primus eas observasse dicitur. Recentiores omnes illas admittunt, praeter acutissimum MAZERE, qui in libro anglice scripto et in gallicam linguam verso a filio meo, eas respuit [= uitspuwen = geheel en al verwerpen]. *Arith. univ. Auct.* Is. NEWTON *Cum commentario* JOHANNIS CASTILLIONEI. Tomus II, pag. 43 Comm. ad cap II.

6. Stelling. *Eene vergelijking, waarvan alle coëfficiënten geheele getallen zijn, kan geen meetbaar gebroken tot wortel hebben.*

Bewijs. Nemen wij aan, dat het onvereenvoudigbaar gebroken $\frac{a}{b}$ een wortel zij van de vergelijking

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots\ldots A_{n-1} x + A_n = 0,$$

dan vindt men door substitutie van $x = \frac{a}{b}$:

$$\frac{a^n}{b^n} + \frac{A_1 a^{n-1}}{b^{n-1}} + \frac{A_2 a^{n-2}}{b^{n-2}} + \ldots\ldots A_{n-1} \frac{a}{b} + A_n = 0;$$

of na vermenigvuldiging met b^{n-1} en overbrenging van termen:

$$\frac{a^n}{b} = -(A_1 a^{n-1} + A_2 a^{n-2} b + \ldots\ldots A_{n-1} a b^{n-2} + A_n b^{n-1}).$$

In het tweede lid zijn alle termen geheele getallen; het eerste lid daarentegen bevat een onvereenvoudigbaar gebroken; dewijl deze leden dus niet aan elkander kunnen gelijk zijn, kan de vergelijking geen meetbaar gebroken tot wortel hebben.

7. Stelling. *Elke vergelijking met reëele coëfficiënten, die slechts één variatie heeft, heeft noodzakelijk énen, maar ook niet meer dan énen positieven wortel.*

Bewijs. Volgens de veronderstelling heeft de vergelijking de gedaante:

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots\ldots A_m x^{n-m} - A_{m+1} x^{n-m-1} - \\ - A_{m+2} x^{n-m-2} - \ldots\ldots - A_n = 0;$$

want dewijl de vergelijking slechts één variatie heeft, moeten

na den eersten negatieven term alle andere termen negatief zijn. Natuurlijk is in deze vergelijking m een geheel getal en $< n$.

Voor de bovenstaande vergelijking kan men ook schrijven:

$$x^{n-m}\left\{x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots A_m - \left(\frac{A_{m+1}}{x} + \frac{A_{m+2}}{x^2} \ldots\ldots + \frac{A_n}{x^{n-m}}\right)\right\} = 0.$$

Laat men nu x alle waarden doorloopen van $x = 0$ tot $x = \infty$, dan zal de waarde van

$$x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots\ldots A_{m-1} x + A_m = \varphi(x)$$

voortdurend aangroeien van A_m tot ∞; daarentegen zal

$$\frac{A_{m+1}}{x} + \frac{A_{m+2}}{x^2} + \ldots\ldots \frac{A_{n-1}}{x^{n-m-1}} + \frac{A_n}{x^{n-m}} = \psi(x)$$

steeds afnemen van ∞ tot 0;
zoodat de vergelijking

$$x^{n-m}\left\{\varphi(x) - \psi(x)\right\} = f(x)$$

voor alle waarden van x van 0 tot ∞ voortdurend aangroeit van $-\infty$ tot $+\infty$ en derhalve eenmaal, maar ook slechts ééns, 0 moet zijn. Tusschen 0 en ∞ liggen slechts positieve getallen; die positieve getallen, voor x gesubstitueerd, maken $f(x)$ slechts eenmaal $= 0$, derhalve heeft de opgegevene vergelijking slechts één positieven wortel.

8. Stelling. *Iedere vergelijking, waarvan de coëfficiënten geheel willekeurige, maar volkomen bepaalde, reëele of imaginaire getallen zijn, heeft altijd minstens één reëelen of imaginairen maar volkomen bepaalden wortel van de algemeene gedaante* $p + q\sqrt{-1}$.

Bewijs. Zij $f(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots\ldots A_{n-1} x + A_n = 0$, waarin A_1, A_2, $A_3 \ldots\ldots A_{n-1}$, A_n willekeurige reëele of imaginaire getallen zijn, dan zullen wij hun modulus voorstellen door

$$\varrho_1,\ \varrho_2,\ \varrho_3 \cdots \varrho_{n-1},\ \varrho_n.$$

Zij verder r de modulus van eene zekere waarde van $x = p + q\sqrt{-1}$, dan heeft men volgens § 3, 5, dat

$$r^n,\ r^{n-1},\ r^{n-2} \ldots\ldots r^2,\ r$$

de moduli zijn van

$$x^n,\ x^{n-1},\ x^{n-2} \ldots\ldots x^2,\ x.$$

De moduli van

$$x^n,\ A_1 x^{n-1},\ A_2 x^{n-2} \ldots\ldots A_{n-1} x,\ A_n$$

zijn derhalve:

$$r^n,\ \varrho_1 r^{n-1},\ \varrho_2 r^{n-2} \ldots\ldots \varrho_{n-1} r,\ \varrho_n.$$

Stellen wij nu den modulus van

$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + A_n$ voor door R,

en van $A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + A_{n-1} x + A_n$ door R_1,

dan ligt (volgens § 3, 7) de modulus R tusschen

$$r^n - R_1 \quad \text{en} \quad r^n + R_1;$$

hetgeen wij willen voorstellen door te schrijven:

$$R = \mathfrak{M}(r^n - R_1,\ r^n + R_1)\ \text{(Vergelijk § 4).}$$

Maar dewijl $R_1 \leqq \varrho_1 r^{n-1} + \varrho_2 r^{n-2} + \ldots\ldots + \varrho_{n-1} r + \varrho_n$,

is $r^n - R_1 \geqq r^n - \varrho_1 r^{n-1} - \varrho_2 r^{n-2} \ldots\ldots - \varrho_{n-1} r - \varrho_n$;

en $r^n + R_1 \leqq r^n + \varrho_1 r^{n-1} + \varrho_2 r^{n-2} + \ldots\ldots + \varrho_{n-1} r + \varrho_n$;

derhalve zal ook R, als liggende tusschen $r^n - R_1$ en $r^n + R_1$, even groot als, of grooter zijn dan

$$r^n - \varrho_1 r^{n-1} - \varrho_2 r^{n-2} - \ldots\ldots - \varrho_{n-1} r - \varrho_n.$$

Hiervoor kan men ook schrijven:

$$r^n\left(1 - \frac{\varrho_1}{r} - \frac{\varrho_2}{r^2} - \ldots\ldots - \frac{\varrho_n}{r^n}\right), \quad \ldots\ldots \quad (A)$$

waarin wij r steeds als positief aanmerken. Dewijl nu r de modulus is van $p + q\sqrt{-1}$, is $r = \sqrt{(p^2 + q^2)}$, en kan men, door voor p en q geschikte waarden te nemen, r zoo groot laten worden, als men wil.

Verder heeft de vergelijking

$$r^n - \varrho_1 r^{n-1} - \varrho_2 r^{n-2} - \ldots\ldots - \varrho_{n-1} r - \varrho_n = 0 \ldots\ldots \quad (B)$$

waarin ook $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3 \ldots\ldots \varrho_n$ reëele grootheden zijn, altijd één positieven wortel (§ 5, 7); stellen wij dien wortel $= \xi$, dan zal voor $r = \xi$ het product (A) gelijk aan 0 worden, en voor $r > \xi$ tot $r = \infty$ steeds positief zijn.

Dewijl nu $r^n - \varrho_1 r^{n-1} - \varrho_2 r^{n-2} \ldots - \varrho_{n-1} r - \varrho_n \leqq R$, en R als modulus steeds positief is, zoo zal, wanneer r grooter wordt, ook R grooter worden; zoodat de kleinste waarde van R, als zijnde positief en $\geqq 0$, altijd overeen moet komen met eene eindige waarde van r; derhalve moet de kleinste waarde van R ook overeenkomen met $r = p + q\sqrt{-1}$.

Volgens § 3, 4 zijn alle machten van den vorm $p+q\sqrt{-1}$ herleidbaar tot dezelfde gedaante, derhalve zal de vorm

$$(p+q\mathbf{i})^n + A_1(p+q\mathbf{i})^{n-1} + \ldots\ldots A_{n-1}(p+q\mathbf{i}) + A_n,$$

waarvan de modulus R is, altijd herleid kunnen worden tot de gedaante $P_n + Q_n\sqrt{-1}$.

Neemt men voor x eene andere waarde, bijv. $z+p+q\sqrt{-1}$, waarin z geheel willekeurig is, dan vindt men:

$$(z+p+q\mathbf{i})^n + A_1(z+p+q\mathbf{i})^{n-1} + \ldots A_{n-1}(z+p+q\mathbf{i}) + A_n, \ldots (C)$$

welke altijd herleid kan worden tot de gedaante:

$$z^n + (P_1 + Q_1\mathbf{i})z^{n-1} + (P_2 + Q_2\mathbf{i})z^{n-2} + \ldots$$
$$(P_{n-1} + Q_{n-1}\mathbf{i})z + P_n + Q_n\mathbf{i}, \ldots\ldots (C_1)$$

waarin $P_1, P_2 \ldots P_n, Q_1, Q_2, \ldots Q_n$

allen reëele getallen zijn.

Dewijl z geheel willekeurig is, kunnen wij daarvoor nemen:

$$z = -\delta\frac{P_n+Q_n\mathbf{i}}{P_{n-1}+Q_{n-1}\mathbf{i}},$$

waarin δ een zeer klein positief getal voorstelt. Substitueeren wij deze waarde van z in het polynomium (C) en rangschikken wij het tevens volgens de opklimmende machten van δ, dan heeft men:

$$P_n+Q_n\mathbf{i} - (P_n+Q_n\mathbf{i})\delta + \ldots\ldots \left(-\frac{P_n+Q_n\mathbf{i}}{P_{n-1}+Q_{n-1}\mathbf{i}}\right)^n\delta^n \ldots (D)$$

deelt men daarna dit polynomium door $P_n+Q_n\mathbf{i}$, dan vindt men een polynomium van den vorm

$$1 - \delta + a_2\delta^2 + a_3\delta^3 + \ldots\ldots a_n\delta^n \ldots\ldots\ldots (E)$$

waarin $a_2, a_3, \ldots\ldots a_n$ reëele of imaginaire coëfficiënten zijn.

Voor $z = -\delta\frac{P_n+Q_n\mathbf{i}}{P_{n-1}+Q_{n-1}\mathbf{i}}$ is derhalve

$$(z+p+q\mathbf{i})^n + A_1(z+p+q\mathbf{i})^{n-1} + \ldots\ldots + A_n =$$
$$(P_n+Q_n\mathbf{i})(1-\delta+a_2\delta^2+a_3\delta^3+\ldots\ldots a_n\delta^n) \ldots\ldots\ldots (F)$$

Zij $\mathfrak{R}$ de modulus van $1-\delta+a_2\delta^2+a_3\delta^3+\ldots\ldots a_n\delta^n$

dan is, omdat R de modulus is van $P_n+Q_n\mathbf{i}$, $R\mathfrak{R}$ de modulus van

$$(z+p+q\mathbf{i})^n+A_1(z+p+q\mathbf{i})^{n-1}+\ldots\ldots A_{n-1}(z+p+q\mathbf{i})+A_n.$$

De moduli der reëele getallen

$$1-\delta,\ \delta^2,\ \delta^3\ \ldots\ldots\ \delta^z$$

zijn natuurlijk die getallen zelf; stelt men nu verder de moduli der reëele of imaginaire getallen a_2, a_3, a_4 .... a_n respectievelijk voor door $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{r}_3$, ... $\mathfrak{r}_n$, dan zijn de moduli van

$1-\delta, a_2\delta^2, a_3\delta^3, \ldots a_n\delta^n$ achtereenvolgens $1-\delta, \mathfrak{r}_2\delta^2, \mathfrak{r}_3\delta^3 \ldots \mathfrak{r}_n\delta^n$.

Verder heeft men, dat $\mathfrak{R}$ de modulus van $1-\delta+x_2\delta^2+\ldots a_n\delta^z$ niet grooter kan zijn, dan $1-\delta+\mathfrak{r}_2\delta^2+\mathfrak{r}_3\delta^3 \ldots+\mathfrak{r}_n\delta^n$, (§ 3, 7) zoodat $\mathfrak{R} \leqq 1-\delta(1-\mathfrak{r}_2\delta-\mathfrak{r}_3\delta^2-\ldots-\mathfrak{r}_n\delta^{n-1})$.

Is nu, zooals wij verondersteld hebben, δ een zeer klein getal, dat slechts weinig van 0 verschilt, dan heeft men:

$$\mathfrak{R}<1, \text{ en dus ook } R\mathfrak{R}<R,$$

in de veronderstelling, dat R niet gelijk aan 0 is.

Is nu R' de kleinste waarde van den modulus R, dan zal men, wanneer R' niet gelijk 0 is, aan δ altijd zoodanige waarde kunnen geven, dat $R'\mathfrak{R}$ kleiner is, dan R', hetwelk ongerijmd is, dewijl $R'\mathfrak{R}$ ook eene waarde van R, maar niet de kleinste waarde is. De kleinste waarde van R moet derhalve 0 zijn.

Deze sluitredenen gelden intusschen maar, voor zoover in de uitdrukking $z=-\delta\dfrac{P_n+Q_n\mathbf{i}}{P_{n-1}+Q_{n-1}\mathbf{i}}$

$P_{n-1}+Q_{n-1}\mathbf{i}$ niet gelijk 0 wordt, zoodat wij nu nog moeten nagaan, wat er in de veronderstelling van $P_{n-1}+Q_{n-1}\mathbf{i}=0$ gebeuren zal.

Nemen wij wederom het polynomium (C)

$$(z+p+q\mathbf{i})^n+A_1(z+p+q\mathbf{i})^{n-1}+\ldots\ldots A_{n-1}(z+p+q\mathbf{i})+A_n,$$

dat herleid wordt tot de gedaante:

$$z^n+(P_1+Q_1\mathbf{i})z^{n-1}+\ldots.(P_{n-1}+Q_{n-1}\mathbf{i})z+P_n+Q_n\mathbf{i}\ldots.(C_1)$$

en veronderstellen wij, dat daarin $P_{n-1}+Q_{n-1}\mathbf{i}$, $P_{n-2}+Q_{n-2}\mathbf{i}$, ... $P_{m+1}+Q_{m+1}\mathbf{i}$ verdwijnen, dan wordt het polynomium (C_1)

$$z^n+(P_1+Q_1\mathbf{i})z^{n-1}+\ldots..(P_m+Q_m\mathbf{i})z^{n-m}+P_n+Q_n\mathbf{i}\ldots(C_2)$$

Neemt men nu hierin

$z = -\delta \sqrt[n-m]{\frac{P_n+Q_n\mathrm{i}}{P_m+Q_m\mathrm{i}}}$, waarin δ zeer klein en positief, dan verandert (C_2), na rangschikking volgens de opklimmende machten van δ,

in $P_n+Q_n\mathrm{i}+(P_n+Q_n\mathrm{i})^{n-m}(-\delta)^{n-m}+\ldots+\left(-\sqrt[n-m]{\frac{P_n+Q_n\mathrm{i}}{P_m+Q_m\mathrm{i}}}\right)^n\delta^n$.

Deelt men nu dezen vorm door $(P_n+Q_n\mathrm{i})$ en stelt men het quotiënt voor door

$1-\delta^{n-m}+a_{n-m+1}\delta^{n-m+1}+a_{n-m+2}\delta^{n-m+2}+\ldots a_n\delta^n$,

dan is even als boven:

$(z+p+q\mathrm{i})^n+A_1(z+p+q\mathrm{i})^{n-1}+\ldots\ldots A_{n-1}(z+p+q\mathrm{i})+A_n =$

$(P_n+Q_n\mathrm{i})\left\{1-\delta^{n-m}(1-a_{n-m+1}\delta-a_{n-m+2}\delta^2-\ldots a_n\delta^n)\right\}$.

Zijn nu verder $\mathfrak{r}_{n-m+1}$, $\mathfrak{r}_{n-m+2}$, ... $\mathfrak{r}_n$ de moduli van

a_{n-m+1}, a_{n-m+1}, ... a_n,

dan vindt men even als boven, wanneer $\mathfrak{R}$ de modulus is van

$1-\delta^{n-m}(1-a_{n-m+1}\delta-\ldots-a_n\delta^n)$:

$\mathfrak{R} \leqq 1-\delta^{n-m}(1-\mathfrak{r}_{n-m+1}\delta-\mathfrak{r}_{n-m+2}\delta^2-\ldots\ldots\mathfrak{r}_n\delta^n)$,

derhalve ook:

$$\mathfrak{R} < 1 \text{ en } \mathfrak{R}R < R,$$

waaruit men door eene zelfde redeneering als boven besluit, dat de kleinste waarde van R gelijk aan 0 moet zijn.

De kleinste waarde van R, die derhalve overeenstemt met eene eindige waarde voor r, en dus ook voor x, is gelijk aan 0.

Volgens het voorgaande is R de modulus van

$(p+q\mathrm{i})^n+A_1(p+q\mathrm{i})^{n-1}+A_2(p+q\mathrm{i})^{n-2}+\ldots A_{n-1}(p+q\mathrm{i})+A_n$,

of van $P+Q\mathrm{i}$.

Zijn nu R' de kleinste waarde van R en p', q', P' en Q' de waarden van p, q, P en Q, waarvoor men de kleinste waarde van R vindt, dan is

$$R' = \sqrt{(P'^2+Q'^2)} = 0 \text{ of } P'^2+Q'^2 = 0.$$

De som van twee vierkanten kan slechts 0 zijn, in geval zoowel P als Q ieder in 't bijzonder gelijk zijn aan 0; zoodat dan ook

$$P' + Q'\sqrt{-1} = 0, \text{ en dus}$$

$$(p'+q'\mathrm{i})^n + A_1(p'+q'\mathrm{i})^{n-1} + A_2(p'+q'\mathrm{i})^{n-2} + \ldots\ldots A_n = 0;$$

maar is voor $x = p' + q'\mathrm{i}$ het polynomium $= 0$, dan is $x = p' + q'\mathrm{i}$ een wortel van de vergelijking

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + A_{n-1} x + A_n = 0;$$

waardoor het gestelde bewezen is.

Aanmerking. Deze gewichtige stelling, waarmede de gansche theorie der vergelijkingen staat of valt, en die in onmiddellijk verband staat met de stelling van N°. 4, is voor het eerst bewezen door D'ALEMBERT. Het gemakkelijke elementaire bewijs, dat ik hier mededeel, is ontleend aan GRUNERT. (KLÜGEL. S. II.) Men vergelijke intusschen daarmede AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY, *Mémoire sur la résolution des équations numériques et sur la théorie de l'élimination.* Paris, 1829, pag. 30—37. Tusschen deze bewijzen is bijna geen verschil.

9. Stelling. *Wanneer $p + qi$ een wortel is van de vergel.*

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots\ldots A_{n-1} x + A_n = 0,$$

dan is het eerste lid dezer vergelijking zonder rest deelbaar door

$$x - (p + qi),$$

en het quotiënt is een polynomium, dat een graad lager is, dan het opgegeven polynomium.

Bewijs. Is $x = p + qi$ een wortel der opgegeven vergelijking, dan is:

$$(p+qi)^n + A_1(p+qi)^{n-1} + A_2(p+qi)^{n-2} + \ldots + A_{n-1}(p+qi) + A_n = 0;$$

en door aftrekking der overeenkomstige leden der beide vergel.:

$$x^n - (p+qi)^n + A_1\{x^{n-1} - (p+qi)^{n-1}\} + A_2\{x^{n-2} - (p+qi)^{n-2}\} +$$

$$\ldots\ldots + A_{n-1}\{x - (p+qi)\} = 0 =$$

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots\ldots A_{n-1} x + A_n.$$

Het eerste lid dezer vergelijking is deelbaar door $x - (p+qi)$, derhalve moet ook het tweede lid daardoor deelbaar zijn.

Verrichten wij nu de deelingen werkelijk, dan vinden wij:

$$\frac{x^n-(p+qi)^n}{x-(p+qi)} = x^{n-1}+x^{n-2}(p+qi)+\ldots\ldots+(p+qi)^{n-1}$$

$$\frac{x^{n-1}-(p+qi)^{n-1}}{x-(p+qi)} = x^{n-2}+x^{n-3}(p+qi)+\ldots+(p+qi)^{n-2}$$

. . . . . .

$$\frac{x^2-(p+qi)^2}{x-(p+qi)} = x+(p+qi)$$

$$\frac{x-(p+qi)}{x-(p+qi)} = 1$$

Deelt men dus het voorste lid van de opgegeven vergelijking door $x-(p+qi)$, dan komt er eene vergelijking van één graad lager, dan de oorspronkelijke.

10. Stelling. *Elk polynomium van den nden graad, gerangschikt volgens de afdalende machten van x, kan ontbonden worden in n factoren van den eersten graad van den vorm*

$$x-(p+qi).$$

Bewijs. Stellen wij het polynomium weder voor door $f(x)$, dan zal, omdat iedere vergelijking $f(x)=0$ een wortel heeft van de gedaante $p+qi$, $f(x)$ deelbaar zijn door $x-(p+qi)$. Zij het quotiënt $f'(x)$, dan is $f(x)=f'(x)(x-p-qi)$. Maar op den zelfden grond heeft $f'(x)$ een wortel (p_1+q_1i) en is dus deelbaar door $x-p_1-q_1i$; zij dit quotiënt $f''(x)$, dan heeft men:

$$f(x)=f''(x)(x-p-qi)(x-p_1-q_1i).$$

Ook $f''(x)$ zal wederom een wortel hebben, dien wij kunnen voorstellen door p_2+q_2i; zij het quotiënt van $f''(x)$ en $x-p_2-q_2i=f'''(x)$,

dan is $f(x)=f'''(x)(x-p-qi)(x-p_1-q_1i)(x-p_2-q_2i)$.

Merken wij nu op, dat $f'(x), f''(x), f'''(x)$ ..... $f^{(n-1)}(x)$ polynomia zijn, die telkens een graad lager worden, dan zal eindelijk gevonden worden $f^{(n-1)}(x)=x-p_{n-1}-q_{n-1}i$ en het polynomium $f(x)$ zal gelijk zijn aan

$(x-p-qi)(x-p_1-q_1i)(x-p_2-q_2i)$ ..... $(x-p_{n-2}-q_{n-2}i)(x-p_{n-1}-q_{n-1}i)$,

welk aantal factoren noodzakelijk gelijk n moet zijn.

11. Stelling. *De ontbinding van een polynomium in n factoren van den eersten graad kan slechts op één wijze plaats*

hebben, d. i met andere woorden: eene vergelijking van den nden graad heeft altijd n, maar ook niet meer dan n wortels.

Bewijs. Volgens het vorige N°. heeft men

$$f(x)=(x-p-q\mathrm{i})(x-p_1-q_1\mathrm{i})\ldots\ldots(x-p_{n-1}-q_{n-1}\mathrm{i}).$$

Nemen wij nu aan, dat men ook nog heeft:

$$f(x)=(x-p'-q'\mathrm{i})(x-p'_1-q'_1\mathrm{i})\ldots\ldots(x-p'_{n-1}-q'_{n-1}\mathrm{i}).$$

Het eerste product wordt 0, wanneer men $x=p+q\mathrm{i}$ neemt; dewijl nu $f(x)=0$ wordt, moet ook het tweede product voor $x=p+q\mathrm{i}=0$ worden, hetgeen niet plaats kan hebben of minstens een der factoren moet 0 worden, stellen wij dat dit het geval zij met

$$x-p'-q'\mathrm{i},$$

dan is $$p+q\mathrm{i}-p'-q'\mathrm{i}=0,$$

of $$x-p-q\mathrm{i}=x-p'-q'\mathrm{i}.$$

Neemt men in het eerste product $x=p_1+q_1\mathrm{i}$, dan wordt het 0; zulks zal dus voor die waarde van x eveneens het geval moeten zijn met het tweede product; derhalve zal één der factoren van het tweede product, bijv. $x-p'_1-q'_1\mathrm{i}$, gelijk aan 0 moeten worden enz. Op dergelijke wijze voortredeneerende vindt men, dat alle eerste machtsfactoren van het eene product gelijk zijn aan alle eerste machtsfactoren van het tweede product; het polynomium kan dus slechts op ééne wijze in n eerste machtsfactoren ontbonden worden. Dewijl men nu slechts op ééne wijze heeft:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=(x-p-q\mathrm{i}) \\ \quad (x-p_1-q_1\mathrm{i}) \\ \quad (x-p_2-q_2\mathrm{i}) \\ \quad \ldots\ldots\ldots \\ \quad (x-p_{n-2}-q_{n-2}\mathrm{i}) \\ \quad (x-p_{n-1}-q_{n-1}\mathrm{i}) \end{array}\right\} \text{en } f(x) \text{ telkens 0 wordt, wanneer men neemt:} \left\{\begin{array}{l} x=p+q\mathrm{i} \\ x=p_1+q_1\mathrm{i} \\ x=p_2+q_2\mathrm{i} \\ \ldots\ldots\ldots \\ x=p_{n-2}+q_{n-2}\mathrm{i} \\ x=p_{n-1}+q_{n-1}\mathrm{i} \end{array}\right.$$

heeft de vergelijking $f(x)=0$ ook n wortels; dewijl er niet meer dan n zoodanige eerste machtsfactoren mogelijk zijn, kan de vergelijking ook niet meer dan n wortels bevatten. Hierbij valt op te merken, dat eenige wortels aan elkander gelijk kunnen zijn.

12. Deze stelling geeft ons aanleiding tot zeer belangrijke opmerkingen. In § 2, 7 hebben wij namelijk gezien, dat de

beide leden eener vergelijking met een zelfde getal vermenigvuldigd, door een zelfde getal gedeeld, tot eene zelfde macht mogen verheven en daaruit een zelfde machtswortel getrokken mag worden. Wèl blijft het axioma ten allen tijde waar, maar ten aanzien der vergelijkingen blijft bij de toepassing daarvan het volgende in het oog te houden.

Wordt de vergelijking $x + 2 = \frac{3(x-1)}{x}$,

welke na herleiding zal blijken van den tweeden graad te zijn, vermenigvuldigd met een factor, waarin de onbekende voorkomt, terwijl deze factor niet dient tot wegmaking der gebrokens, dan zal de graad der vergelijking daardoor met zooveel eenheden verhoogd worden, als er eenheden zijn in den exponent van de onbekende, die in den bedoelden factor voorkomt. Den graad met eenige eenheden vermeerderende, wordt ook het aantal wortels zooveel grooter.

Schrijft men namelijk voor de opgegeven vergelijking:

$$x^2 + 2x = 3x - 3 \text{ of } x^2 - x + 3 = 0$$

en vermenigvuldigt men de beide leden dezer vergelijking met $(x^2 + 4)$, dan zal men vinden:

$$x^4 - x^3 + 7x^2 - 4x + 12 = 0;$$

welke vorm van den vierden graad geworden zijnde, twee wortels meer bevat, dan de opgegeven vergelijking. Dewijl men nu voor de laatste vergelijking ook schrijven kan:

$$(x^2 + 4)(x^2 - x + 3) = 0,$$

of $(x + \sqrt{-2})(x - \sqrt{-2})\left(x - \frac{1+\sqrt{-11}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{-11}}{2}\right) = 0$,

ziet men, dat *die* wortels ingevoerd zijn, welke voldoen aan de vergelijking $x^2 + 4 = 0$.

Vermenigvuldigt men dus met eenigen factor, waarin de onbekende voorkomt, zonder dat die vermenigvuldiging dient tot wegmaking van gebrokens, dan voert men die waarden voor de onbekende in, die wortels zijn van den factor, waarmede men vermenigvuldigt. Door met zoodanige factoren te vermenigvuldigen, kan ook de aard der vergelijkingen geheel veranderen. Vermenigvuldigt men namelijk de valsche vergelijking $3 = 7$ met $x - 6$, dan vindt men:

$$3(x-6) = 7(x-6),$$

welke vergelijking, voor $x = 6$ nul wordt, eene waarde voor x toelaat en dus *niet-identiek* geworden is.

Vermenigvuldigt men zoodanige vergelijking met een factor, die uit zich zelven 0 is, dan wordt zij zelfs identiek. Zoo gaat de vergelijking $3(x-x) = 7(x-x)$ door voor alle mogelijke waarden van x.

Op gelijke wijze kan men eene niet-identieke vergelijking door vermenigvuldiging met een factor, die 0 uit zich zelven is, identiek maken.

Soortgelijke opmerkingen gelden bij de machtsverheffing.

Heeft men de vergelijking

$$\sqrt{x} + 2x = 7 \times \frac{x-3}{2}$$

dan vindt men: $\sqrt{x} = \frac{7x-21-4x}{2} = \frac{3}{2}(x-7)$;

na machtsverheffing: $\frac{1}{4}x = x^2 - 14x + 49$,

of $$x^2 - 14\frac{3}{4}x + 49 = 0.$$

Het eerste lid dezer vergelijking kan ontbonden worden in de factoren:

$$(x-9)\,(x-\tfrac{4}{9}) = 0,$$

zoodat de getallen 9 en $\frac{4}{9}$ wortels van de laatste vergelijking zijn. Door de machtsverheffing kunnen intusschen waarden zijn ingevoerd, die in de oorspronkelijke vergelijking niet voldoen, en het is noodig, dat men verifieere, of de gevonden wortels ook aan de eerste vergelijking voldoen. Men zal bevinden, dat de beide wortels $f(x) = 0$ maken, indien men

$$\sqrt{x} = \sqrt{9} = +3 \text{ en } \sqrt{x} = \sqrt{\tfrac{4}{9}} = -\tfrac{2}{3} \text{ neemt.}$$

Hierin ligt nu niets tegenstrijdigs, want neemt men weder de oorspronkelijke vergelijking en substitueert men daarin $\sqrt{x} = y$, waardoor $\sqrt{x}$ onze onbekende wordt, dan vindt men na behoorlijke herleiding

$$y^2 - \tfrac{2}{3}y - 7 = 0,$$

waarvoor men ook kan schrijven:

$$(y-3)(y+\tfrac{7}{3}) = 0$$

ten bewijze, dat voor $\sqrt{x} = y$ de waarden $+3$ en $-\frac{7}{3}$ aan de vergelijking voldoen.

Tot voorbeeld, hoe men rechtstreeks waarden invoert, diene de vergelijking $x = 2$;
verheft men deze tot de tweede macht, dan vindt men $x^2 = 4$ of $x^2 - 4 = 0$; waarvoor men schrijven kan: $(x+2)(x-2) = 0$; zoodat de waarde $x = -2$, die aan de oorspronkelijke vergelijking niet voldoet, ingevoerd is.

Heeft men nog de vergelijking $\frac{\sqrt{(x^2+5)}}{x+2} = -1$,

dan is $\sqrt{(x^2+5)} = -(x+2)$; waardoor aangewezen wordt, dat de wortel uit (x^2+5) [indien x een positief getal is, of een negatief getal < 2] negatief genomen moet worden. Zoodanige en soortgelijke zwarigheden ontstaan, omdat door het verheffen tot eene evene macht de onderscheiding verloren gaat, of voor het wortelteeken het teeken $+$ of $-$ gestaan heeft. Neemt men intusschen aan, dat dit teeken door den aard der vergelijking steeds wordt aangewezen, dan zal men altijd eene waarde voor de onbekende vinden, die aan de gestelde voorwaarde voldoet. Neemt men, om nog een laatste voorbeeld te geven, de vergel.

$$\sqrt{(x+4)} - \sqrt{(3x+1)} = 7,$$

dan volgt daaruit door eene gemakkelijke herleiding

$$\frac{\sqrt{(x+4)} - 7}{\sqrt{(3x+1)}} = 1;$$

is dus $\sqrt{(x+4)} > 7$ en neemt men dien negatief, dan zal men $\sqrt{(3x+1)}$ ook negatief moeten nemen, om aan de eischen van het vraagstuk te voldoen. Is $\sqrt{(x+4)} < 7$ en neemt men daar den positieven wortel, dan zal $\sqrt{(3x+1)}$ wederom negatief genomen moeten worden. Door substitutie zal verder moeten blijken, of men den positieven wortel of wel den negatieven zal moeten nemen. *)

---

*) Nemen wij in de laatste vergelijking

$$\sqrt{(x+4)} - \sqrt{(3x+1)} = 7 \qquad \sqrt{(x+4)} = y,$$

dan vinden wij $x+4 = y^2$, $3x = 3y^2 - 12$, $\sqrt{(3x+1)} = \sqrt{(3y^2-11)}$ en $\sqrt{(3x+1)} = z$, $3x+1 = z^2$, $x = \frac{z^2-1}{3}$ en $\sqrt{(x+4)} = \sqrt{\left(\frac{z^2+11}{3}\right)}$;
zoodat door substitutie de opgegeven vergelijking overgaat in:

$$y - 7 = \sqrt{(3x+1)} - \sqrt{(3y^2-11)} \text{ en } z + 7 = \sqrt{\frac{z^2+11}{3}},$$

Eene derde opmerking betreft het deelen door een factor, waarin de onbekende voorkomt. Door deze deeling toch wordt de graad der vergelijking lager, derhalve worden er wortels verdonkerd. Heeft men

$$6(x-5)^2 + 13(x-5) = 0,$$

welke vergelijking van den tweeden graad is, en deelt men nu door $x-5$, waardoor men tot uitkomst krijgt:

$$6(x-5) + 13 = 0,$$

---

waaruit na machtsverheffing en herleiding volgt:

$$y^3 + 7y - 30 = 0. \qquad z^3 + 21z + 68 = 0.$$

Aan deze beide vergelijkingen wordt voldaan door

$$y = +3 \text{ of } y = -10, \qquad z = -4 \text{ of } z = -17;$$

voor $y = +3$ en $z = -4$ vinden wij $x = 5$;
voor $y = -10$ en $z = -17$ vinden wij $x = 96$.

Waarden voor x, die aan de opgegeven vergelijking voldoen, zijn dus 5 en 96,
mits men $\sqrt{(x+4)}$ positief en $\sqrt{(3x+1)}$ negatief
of $\sqrt{(x+4)}$ negatief en $\sqrt{(3x+1)}$ negatief neme.

Hierdoor nu geschiedt niets ongerijmds. De uitdrukkingen $\sqrt{(x+4)}$ en $\sqrt{(3x+1)}$ vertegenwoordigen twee waarden, het is de vraag maar zoodanige waarden te kiezen, dat zij aan de gegevens van de vergelijking voldoen.

Ik heb mij eenigszins uitvoerig met dit vraagstuk bezig gehouden, omdat mijne zienswijze verschilt van de in ons vaderland tamelijk algemeen aangenomene. Het voorbeeld is ontleend aan Badon Ghyben's Algebra, welke schrijver echter zegt, dat er geene waarden van x zijn, die aan de opgegeven vergelijking voldoen. Is deze bewering waar, dan is de vergelijking valsch, omdat men in de vergelijking

$$\sqrt{(x+4)} - \sqrt{(3x+1)} - 7 = 0$$

geene waarde voor x kan substitueeren, die het eerste lid werkelijk 0 maakt. — Kempees geeft in zijne vraagstukken ook vergelijkingen, waaraan geene enkele waarde van x voldoet. M. i. heeft men zich hier door den schijn laten bedriegen. Voor het overige diene nog de volgende aanhaling uit Newton: Huc referre licet quantitatum surdarum exterminationem fingendo eas literis quibuslibet aequales. Quemadmodum si sit $\sqrt{ay}\,\sqrt{(aa-ay)} = 2a + \sqrt[3]{ay^2}$, scribendo t, pro $\sqrt{ay}$, v pro $\sqrt{(aa-ay)}$, et x pro $\sqrt[3]{ay^2}$ habebuntur aequationes $t - v = 2a + x$, $tt = ay$, $vv = aa - ay$ et $z^3 = ayy$, etc.

dan heeft men de waarde van x, die $x-5$ gelijk aan nul maakt, verdonkerd, men zal dus deze als een wortel der vergelijking in rekening moeten brengen. Heeft men nog de vergelijking:

$$7x^3 - 5x^4 = 0$$

en deelt men door x^4, dan worden door deze deeling vier waarden $x = 0$ verduisterd, want daardoor wordt eene vergelijking van den achtsten graad teruggebracht tot eene van den vierden.

Door zoodanige deeling kan ook de aard der vergelijking eene geheele verandering ondergaan.

De identieke vergelijking

$$2(x-x) = 5(x-x)$$

is na deeling door den factor $x-x$, die uit zich zelven 0 is, valsch.

De niet-identieke vergelijking

$$6(x-7) = 4(x-7)$$

is na deeling door $x-7$ eveneens valsch.

De identieke vergelijking

$$5(6-x)(x-x) = 4(6-x)^2(x-x)$$

wordt, na deeling door den factor $(x-x)$, niet-identiek, enz.

Ook bij de worteltrekking heeft men te letten op het verduisteren van wortels der vergelijking. De vergelijking

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 0$$

is van den derden graad en heeft dus drie wortels. Trekt men daaruit den derdemachtswortel, dan vindt men

$$x + 2 = 0$$

en twee wortels zijn verdonkerd.

Heeft men de vergelijking $x^3 = 1$ en trekt men uit beide leden den derdemachtswortel, dan vindt men $x = 1$, terwijl in de oorspronkelijke vergelijking drie verschillende waarden voor x het polynomium $x^3 - 1$ gelijk aan 0 maakten.

Merkt men op, dat $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = (x+2)^3 = 0$ drie factoren $x+2$ heeft, en dus ook drie gelijke wortels -2, en dat $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1) =$

$$(x-1)\left(x - \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)\left(x - \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right) = 0$$

de wortels 1, $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ heeft, dan ziet men proefondervindelijk, dat bij de worteltrekking evenzeer als bij de

deeling door een factor, waarin de onbekende voorkomt, sommige wortels der vergelijking verduisterd kunnen worden.

13. Stelling. *Wanneer eene vergelijking, waarvan alle coëfficiënten reëele getallen zijn, een imaginairen wortel heeft van de gedaante* $p + qi\sqrt{-1}$, *dan heeft zij ook noodzakelijk een wortel van de gedaante* $p - qi\sqrt{-1}$, *of met andere woorden: In eene vergelijking, welker coëfficiënten reëel zijn, komen de imaginaire wortels paarsgewijze voor.*

Indien $p + qi$ een wortel is der vergelijking

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + A_{n-1} x + A_n = 0, \quad \ldots\ldots (\alpha)$$

dan heeft men ook:

$$(p+qi)^n + A_1(p+qi)^{n-1} + A_2(p+qi)^{n-2} + \ldots\ldots + A_{n-1}(p+qi)^2 + A_n = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (\beta)$$

Ontwikkelt men de verschillende machten van $p+qi$, dan krijgt men twee soorten van termen; de eerste term van elk binomium en de termen, waarin evene machten van i voorkomen, zullen even als de bekende term A_n, eene reëele waarde opleveren, die voorgesteld kan worden door P, de onevene machten van qi blijven imaginair, zoodat men voor de vergelijking (β) zal kunnen schrijven:

$$P + Qi = 0, \quad \ldots\ldots\ldots (\gamma)$$

Deze vergelijking waar zijnde, moeten P en Q ieder in het bijzonder nul zijn.

Substitueert men in de vergel. (α) $x = p - qi$, dan vindt men:
$(p-qi)^n + A_1(p-qi)^{n-1} + A_2(p-qi)^{n-2} + \ldots\ldots A_{n-1}(p-qi) + A_n = 0$.
Ontwikkelt men de verschillende machten van $p-qi$, dan zal men, even als zoo even, voor de som der reëele termen wederom P vinden, terwijl de onevene machten van $-qi$ slechts in teeken met onevene machten van qi verschillen; zoodat men voor de laatste vergelijking schrijven kan:

$$P - Qi = 0,$$

waarin P en Q dezelfde getallen zijn als in (γ). Aangezien zij in beide gelijk zijn aan 0, moet $p-qi$ een wortel zijn der opgegeven vergelijking.

Uit deze stelling ziet men, dat de imaginaire wortels eener vergelijking elkander altijd twee aan twee geconjungeerd zijn; dat eene evene machtsvergelijking, zoo ze reëele wortels heeft, die

altijd in een even aantal zal bezitten ; en dat eene oneven machtsvergelijking, gelijk vroeger al bewezen is, altijd een reëelen wortel moet hebben.

14. Stelling. *Ieder geheel rationeel polynomium kan ontbonden worden in reële factoren van den eersten of tweeden graad.*

Bewijs. In de veronderstelling, dat de coëfficiënten reëel en rationeel zijn, is volgens N°. 10

$$\begin{aligned} f(x) = {} & (x - p - q\mathrm{i}) \times \\ & \times (x - p_1 - q_1\mathrm{i}) \times \\ & \times (x - p_2 - q_2\mathrm{i}) \times \\ & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & \times (x - p_{n-1} - q_{n-1}\mathrm{i}) \end{aligned}$$

Neemt men nu een willekeurigen factor, bijvoorbeeld :

$$x - p_k - q_k\,\mathrm{i},$$

dan wordt voor $x = p_k + q_k\,\mathrm{i}$, $f(x) = 0$, derhalve is $p_k + q_k\,\mathrm{i}$ een wortel van de vergelijking $f(x) = 0$; maar dan moet $p_k - q_k\,\mathrm{i}$ ook een wortel van die vergelijking en dus $f(x)$ door $x - p_k + q_k\,\mathrm{i}$ deelbaar zijn, dus ook door

$$(x - p_k - q_k\,\mathrm{i})(x - p_k + q_k\,\mathrm{i}) = x^2 - 2p_k x + p_k^2 + q_k^2,$$

welk product een reëele factor is van den tweeden graad.

Dewijl nu $f(x)$ slechts op één wijze in n eerste machts factoren ontbonden kan worden (N°. 11) ; dewijl elke factor van de gedaante $x - p_k - q_k\,\mathrm{i}$ noodzakelijk vereischt, dat er ook een factor zij van de gedaante $x - p_k + q_k\,\mathrm{i}$; dewijl het product der beide bedoelde factoren altijd reëel is ; dewijl een onevene machtsvergelijking steeds minstens één reëelen wortel heeft, is elk polynomium in reële tweede of eerste machtsfactoren te ontbinden.

Aanmerking. Dit bewijs van eene der voornaamste stellingen der vergelijkingen is van Cauchy en komt voor in zijne : *Mémoire sur la résolution des équations numériques*, page 39. Théorème 14. Het eerste bewijs van deze stelling is van d'Alembert en komt voor bij Bougainville. In Lacroix' *Diff. en integr. reken.* vindt men een bewijs van la Place. Gauss geeft in de *Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius*

variabiles in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse eene kritiek van alle bewijzen van deze stelling, die vóór hem geleverd zijn en tevens een nieuw bewijs, dat op de goniometrie berust; later heeft hij nog een zeer fraai en betrekkelijk kort bewijs geleverd, doch waarvoor de kennis van de integraalrekening vereischt wordt.

15. Stelling. *In elke vergelijking, die volgens de afdalende machten van x gerangschikt is, en dus de gedaante heeft van*

$$f(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots A_{n-1} x + A_n = 0,$$

is de coëfficiënt van den tweeden term gelijk aan de som één aan één van de wortels, met het tegengestelde teeken; de coëfficiënt van den derden term is gelijk aan de som der producten twee aan twee van de wortels met hun eigen teeken; de coëfficiënt van den vierden term is gelijk aan de som der producten drie aan drie van de wortels met het tegengestelde teeken; ..... de coëfficiënt van den laatsten term is gelijk aan het product der wortels met hun eigen of het tegengestelde teeken, naar gelang n even of oneven is.

N. B. *Hier is alleen sprake van producten zonder herhaling.*

Bewijs. Volgens N°. 10 is

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) \ldots\ldots (x - a_n),$$

waarin $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n$

reëele of imaginaire wortels kunnen zijn.

Vermenigvuldigt men deze factoren met elkander, dan vindt men (zie *Theorie der Alg. Rek.* I, pag. 146)

$$x^n - \overset{n}{C}_1 x^{n-1} + \overset{n}{C}_2 x^{n-2} - \ldots\ldots - \overset{n}{C}_{n-1} x \pm \overset{n}{C}_n,$$

welke stelling voor n factoren waar zijnde, aldaar ook voor $n+1$ factoren bewezen, dus in 't algemeen waar is.

Vergelijkt men nu deze uitkomst met de opgegevene vergelijking, dan ziet men, dat

$$A_1 = -\overset{n}{C}_1 = -\{a_1 + a_2 + \ldots\ldots a_n\},$$

$$A_2 = +\overset{n}{C}_2 = +a_1 a_2 + \ldots\ldots a_{n-1} a_n,$$

. . . . . .

$$A_n = \pm \overset{n}{C}_n = \pm \{a_1 a_2 a_3 \ldots\ldots a_{n-1} a_n\}$$

en wel negatief in geval n oneven is.

16. Stelling. *Wanneer men in eene vergelijking den coëfficiënten der 2de, 4de, 6de..... termen het tegengestelde teeken geeft, dan krijgt men eene nieuwe vergelijking, wier wortels met de wortels der oorspronkelijke vergelijking in teeken verschillen, doch eene zelfde absolute waarde hebben.* N. B. *Ontbrekende termen worden aangevuld door nullen.*

Bewijs. Zij gegeven $f(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + A_1 x^{n-2} + \ldots A_n$, waarin A_1, $A_2 \ldots A_n$, geheele getallen zijn; zij verder a een wortel van de vergelijking $f(x) = 0$, dan is

$$f(a) = a^n + A_1 a^{n-1} + A_2 a^{n-2} + \ldots\ldots A_n = 0.$$

Nemen wij nu een tweede polynomium

$$F(x) = x^n - A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} - \ldots\ldots \pm A_n$$

en stellen wij daarin $x = -a = (-1)a$, dan vindt men:

$$F(-a) = a^n(-1)^n - A_1 a^{n-1}(-1)^{n-1} + A_2 a^{n-2}(-1)^{n-2} - \ldots \pm A_n =$$

$$= a^n(-1)^n + A_1 a^{n-1}(-1)^{n-1} + A_2 a^{n-2}(-1)^{n-2} \ldots \pm A_n =$$

$$= (-1)^n (a^n + A_1 a^{n-1} + A_2 a^{n-2} + \ldots + A_n) = (-1)^n \times f(a).$$

Derhalve $F(-a) = (-1)^n \times f(a) = 0$,

dus is ook $-a$ een wortel van de vergelijking $F(x) = 0$.

Wordt, om deze en de vorige stelling toe te passen, eene vergelijking gevraagd, die tot wortels heeft 5, —3 en 2, dan zal deze vergelijking van den derden graad zijn; de coëfficiënt van den tweeden term zal zijn de som der wortels met het tegengestelde teeken $= -(5-3+2) = -4$; de coëfficiënt van den derden term is de som der producten twee aan twee van de wortels met hun eigen teeken $= 5.-3 + 5.2 - 3.2 = -11$; de coëfficiënt van den vierden term de som der producten drie aan drie van de wortels met het tegengestelde teeken $= -(5.-3.2) = +30$.

De vergelijking, die tot wortels heeft 5, — 3, 2, is derhalve:

$$x^3 - 4x^2 - 11x + 30 = 0.$$

Wil men nu eene andere vergelijking hebben, waarvan —5, 3, —2 de wortels zijn, dan schrijft men voor de gevondene vergelijking:

$$x^3 + 4x^2 - 11x - 30 = 0,$$

waarin nu weder naar behooren $-(-5+3-2) = +4$

$$-5.3 + (-5.-2) + 3.-2 = -11$$

$$-(-5\times 3\times -2) = -30.$$

17. Stelling. *De vergelijking $f(x) = 0$ kan niet meer positieve wortels hebben, dan er variatiën zijn in $f(x)$, en niet meer negatieve, dan er variatiën zijn in $f(-x)$.*

Bewijs. Veronderstellen wij, dat a_1, a_2, a_3 ..... de positieve wortels zijn van de vergelijking $f(x) = 0$, dan kan men stellen:

$$f(x) = X(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3).....$$

waarin X wederom een polynomium is met reëele coëfficiënten.

Stellen wij nu

$$X = x^m + ... - A_k x^k - ... + A_l x^l .... - A_p x^p -$$

$$..... \pm A_q x^q \pm A_{q-1} x^{q-1} ... .. \pm A_z ,$$

waarin A_k de eerste negatieve coëfficiënt is na den term x^m, A_l de eerste positieve na A_k, A_p de eerste negatieve na A_l, enz., A_q,.... A_z de laatste coëfficiënten met gelijke voorteekens en voorafgegaan door een coëfficiënt $\mp A_{q+1}$, die een tegengesteld voorteeken heeft.

Vermenigvuldigt men nu X met $x-a_1$, dan vindt men in ieder geval een polynomium van de gedaante

$$x^{m+1} ... - A'_k x^{k+1} ..... + A'_l x^{l+1} ..... - A'_p x^{p+1} .....$$

$$\pm A'_q x^{q+1} ..... \mp a_1 A_z.$$

Vergelijkt men nu de waarden van X en $X(x-a_1)$ met elkander, dan ziet men, dat de laatste tot aan $\pm A'_q x^{q+1}$ minstens evenveel variatiën heeft, als in de waarde van X voorkomen. In de laatste termen van de waarde voor X:

$$\pm A_q x^q \pm A_{q-1} x^{q-1} \pm ..... A_z \text{ komt geene,}$$

in $\pm A'_q x^{q+1} ..... \mp a_1 A_z$ komt minstens ééne variatie voor, zoodat de waarde voor $X(x-a_1)$ altijd zeker ééne variatie meer zal hebben, dan de waarde voor X.

Derhalve heeft $X(x-a_1)$ $(x-a_2)$ twee variatiën, $X(x-a_1)$ $(x-a_2)(x-a_3)$ drie variatiën meer dan X, enz. Zijn nu in X geene variatiën meer, dan zal toch voor elken positieven wortel

$f(x) = X(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots$. ééne variatie in de vergelijking $f(x) = 0$ voorkomen; het aantal variatiën is dus minstens gelijk aan het aantal positieve wortels. Schrijft men nu $f(-x)$ voor $f(x)$, dan worden alle negatieve wortels van $f(x)$ positief en omgekeerd; er zullen dus in $f(-x)$ evenveel positieve wortels voorkomen, als er negatieve wortels in $f(x)$ zijn; d. i. er kunnen in $f(x)$ niet meer negatieve wortels aanwezig zijn, dan er variatiën zijn in $f(-x)$. Mocht $f(x)$ geen volledig polynomium zijn, dan blijft de stelling even zeer doorgaan.

Wanneer in $f(x)$ geen enkele coëfficiënt ontbreekt, dan komt iedere permanentie in $f(x)$ overeen met eene variatie in $f(-x)$, derhalve kan men in dat geval ook zeggen:

Wanneer in $f(x)$ geen enkele coëfficiënt ontbreekt, dan is het aantal positieve wortels in $f(x) = 0$ niet grooter, dan het aantal variatiën, het aantal negatieve wortels niet grooter, dan het aantal permanentiën.

Aanmerking. De hier medegedeelde stelling is veelal bekend onder den naam van *Theorema van* HARRIOTT: ofschoon in de uitgave van zijne werken daarvan geen bewijs voorkomt. Het hier opgenomen bewijs, dat door zijne kortheid en duidelijkheid boven de meeste andere bewijzen uitmunt, is van GAUSS.

18. Stelling. *Wanneer in $f(x)$ geen enkele term ontbreekt en alle wortels der vergelijking $f(x) = 0$ reëel zijn, dan is het aantal positieve wortels gelijk aan het aantal variatiën, en het aantal negatieve gelijk aan het aantal permanentiën van $f(x)$.*

Bewijs. Zij het aantal variatiën $= V$, het aantal permanentiën $= P$, het aantal positieve wortels p en het aantal negatieve wortels n. Indien nu de graad der vergelijking m is, dan is klaarblijkelijk

$$V + P = m \quad \text{en} \quad p + n = m;$$

$$\text{maar} \qquad p \overline{\leqslant} V \quad \text{en} \quad n \overline{\leqslant} P;$$

is nu $p < V$, dan is, omdat volgens de gegevens

$$V + P = p + n,$$

$n = P + (V - p)$; dus omdat $V - p$ positief is, is dan n grooter dan P, 't geen tegen de vorige stellingen strijdt;

derhalve moet n gelijk zijn aan P, maar dan is ook $p = V$, waardoor de stelling bewezen is.

Aanmerking. Deze stelling is van DESCARTES. In GLAZENMAKERS vertaling van zijne werken vind ik 2de D. p. 380: „Weet dan, dat in iedere vergelijking, zooveel afmetingen als de onbekende hoegrootheid heeft, ook zooveel verscheiden wortelen, dat is waarden van deze hoegrootheid, kunnen wezen. — Men bekent ook hieruit, hoeveel ware en hoeveel valsche wortelen in iedere vergelijking kunnen wezen. Te weten: daar kunnen zooveel ware wortelen in zijn als de teekenen + en — daarin veranderd worden gevonden, en zooveel valsche, als men twee teekenen + of twee teekenen —, die malkander volgen, vindt." — Het Theorema komt voor zonder eenig bewijs. Het eerste bewijs van dit Theorema is geleverd door J. A. SEGNER in een brief aan HAMBERGER van 't jaar 1718. Met dit bewijs onbekend, heeft ook de Abt DE GUA in 1744 een bewijs geplaatst in de *Histoire de l'académie des sciences.* (Vergelijk NEWTON. *Arithm. Univ.* II, *pag.* 42.)

19. Stelling. ***In elke volledige vergelijking met reëele coëfficiënten, zal het verschil tusschen het aantal variatiën en dat der positieve wortels, zoo mede het verschil tusschen het aantal permanentiën en dat der negatieve wortels, of nul of een even getal zijn.***

Bewijs. Dewijl het product van twee geconjungeerde imaginaire wortels altijd positief is en de imaginaire wortels steeds geconjungeerd voorkomen, zal het product van alle wortels positief of negatief zijn, naargelang het aantal negatieve wortels even of oneven is. Verder heeft in eene oneven machtsvergelijking de bekende term het tegengestelde teeken van het product der wortels; is dus die term positief, dan is het product der wortels negatief, derhalve is het aantal negatieve wortels oneven. In eene evenmachts-vergelijking heeft de bekende term het zelfde teeken als het product der wortels, terwijl het aantal variatiën even of oneven zal zijn, naargelang de laatste term positief of negatief is. Dit alles samenvattende vindt men, omdat in eene volledige vergelijking $V + P = m$:

LAATSTE TERM.		AANTAL VARIATIËN.	AANTAL POSITIEVE WORTELS.	AANTAL PERMANENTIËN.	AANTAL NEGATIEVE WORTELS.
Evenmachts-	+	even	even	even	even
vergelijking	—	oneven	oneven	oneven	oneven
Onevenmachts-	+	even	even	oneven	oneven
vergelijking	—	oneven	oneven	even	even

waardoor de stelling bewezen is.

Aanmerking. Deze stelling is op de bovenstaande fraaie wijze betoogd door L. COHEN STUART. Het bewijs is voor het eerst medegedeeld door LOBATTO, in zijne *Lessen over de Hoogere Algebra*, pag. 38.

20. Stelling. *Zoo dikwerf er in eene vergelijking één term ontbreekt, tusschen twee termen met gelijke teekens, zoo dikwijls heeft men minstens één paar imaginaire wortels.*

Zoo dikwijls er in eene vergelijking twee achtereenvolgende termen ontbreken tusschen ongelijke teekens, zoo dikwijls heeft men minstens één paar imaginaire wortels.

Indien er in eene vergelijking eenige achtereenvolgende termen tusschen termen met gelijke teekens ontbreken, zullen er in deze vergelijking zooveel paren imaginaire wortels aanwezig zijn, als eenheden in de grootste helft van het aantal ontbrekende termen; ontbreken de termen tusschen termen met ongelijke teekens, dan is het aantal paren imaginaire wortels gelijk aan de kleinste helft.

Bewijs. 1°. Ontbreekt er één term en is het aantal variatiën $= V$, het aantal permanentiën $= P$, dan is, indien de vergelijking van den graad n is: $V+P=n-1$. Schrijft men nu in de vergelijking $-x$ in plaats van x, dan worden alle variatiën permanentiën; alle permanentiën, uitgezonderd de permanentie, waartusschen een term ontbreekt, worden variatiën. P permanentiën in de oorspronkelijke vergelijking geven $P-1$ variatiën in de vergelijking $f(-x)=0$; er zijn dus hoogstens $P-1$ negatieve wortels in de oorspronkelijke vergelijking. Het aantal positieve wortels plus het aantal negatieve is alzoo hoogstens gelijk aan $n-2$, d. i.: er zijn minstens 2 imaginaire wortels.

2°. Ontbreken er in de vergelijking twee termen, dan is $V + P = m - 2$. Liggen nu de ontbrekende termen tusschen termen met tegengestelde teekens, dan worden, indien men x vervangt door $-x$, alle variatiën permanentiën en omgekeerd. Het aantal positieve plus het aantal negatieve wortels is alzoo hoogstens $= m - 2$, enz.

3°. Ontbreekt er een oneven aantal termen tusschen twee termen met gelijke teekens, en stelt men dit aantal $= n$, dan is $V + P = m - n$. Wederom schrijft men $-x$ voor x en alle permanentiën, uitgezonderd de permanentie, waartusschen de termen ontbreken, worden variatiën; er zijn dus hoogstens $P-1$ negatieve wortels in de oorspronkelijke vergelijking. Het aantal positieve wortels plus het aantal negatieve is dus hoogstens gelijk aan $m-n-1$. Er zijn dus minstens $n+1$ imaginaire wortels, d. i. $\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}$ paar. Ontbreekt er onder dezelfde voorwaarde een even aantal termen, dan wordt, indien men x door $-x$ vervangt, het aantal variatiën der afgeleide vergelijking gelijk aan het aantal permanentiën der oorspronkelijke. Er zijn dus minstens n imaginaire wortels, d. i. $\frac{1}{2}n$ paar. Ontbreekt er een oneven aantal termen tusschen ongelijke teekens en stelt men dit aantal voor door n, dan is $V+P=m-n$. Schrijft men nu $-x$ voor x, dan worden alle permanentiën der oorspronkelijke vergelijking variatiën, terwijl de variatie, tusschen welke de termen ontbreken, bestaan blijft. Men krijgt dus $P+1$ variatiën in de afgeleide of $P+1$ negatieve in de oorspronkelijke vergelijking. Er blijven dus minstens $n-1$ wortels imaginair, d. i. $\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}$ paar. — Ontbreekt er een even aantal termen tusschen ongelijke teekens, dan veranderen, indien men $-x$ schrijft voor x, alle variatiën en permanentiën en omgekeerd; derhalve is hier het aantal imaginaire wortels $= \frac{1}{2}n$ paar.

Aanmerking. Deze stelling is van LALLEMAND, *professeur à l'école centrale de la Marne.* De bewijzen van LALLEMAND zelven zijn mij niet bekend. Een bewijs der stelling komt voor in de *Élémens d'Algèbre* van zijn leerling GARNIER. An. XI. Het eerste gedeelte dezer stelling was ook aan den Abt DE GUA bekend. Vergelijk HUTTON's *A course of Mathematics*, pag. 293. Uitgave van 1841.

21. Als toepassing op de voorgaande stellingen strekke de vergelijking

$$x^8 + 5x^6 + 3x^3 - 5 = 0.$$

Tusschen $+ x^8$ en $+ 5x^6$ ontbreekt één term; zulks wijst op een paar imaginaire wortels; tusschen $+ 5x^6$ en $+ 3x^3$ ontbreken twee termen, dit wijst ook op een paar imaginaire wortels; tusschen $+ 3x^3$ en $- 5$ ontbreken twee termen, dat wederom op een paar imaginaire wortels wijst; er kunnen dus hoogstens twee reëele wortels in de vergelijking voorkomen.

Om dezelfde reden zal de vergelijking

$$x^4 + 1 = 0,$$

twee paar imaginaire wortels hebben, enz.

22. Stelling. *Indien men de coëfficiënten eener vergelijking* $f(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + A_n = 0$ *in omgekeerde volgorde opschrijft, elk in het bijzonder deelt door* A_n, *en daarna bij elken term de achtereenvolgende afdalende machten van* y *schrijft, dan zal* $f(y)$ *gelijk aan* 0 *worden voor de omgekeerde waarden van de wortels, die* $f(x)$ *gelijk aan* 0 *maken, d. i.:*

$$f(x) = f\left(\frac{1}{y}\right),$$

indien men uit $f(x)$ *afleidt:*

$$y^n + \frac{A_{n-1}}{A_n} y^{n-1} + \frac{A_{n-2}}{A_n} y^{n-2} + \ldots\ldots \frac{1}{A_n}.$$

Bewijs. Indien men in $f(x)$ voor x substitueert $\frac{1}{y}$, dan vindt men:

$$\frac{1}{y^n} + A_1 \frac{1}{y^{n-1}} + A_2 \frac{1}{y^{n-2}} + \text{enz.} + A_{n-1} \frac{1}{y} + A_n = 0,$$

of na vermenigvuldiging met y^n en tegengestelde rangschikking:

$$A_n y^n + A_{n-1} y^{n-1} + \ldots\ldots + A_1 y + 1 = 0;$$

of na deeling door A_n:

$$y^n + \frac{A_{n-1}}{A_n} y^{n-1} + \ldots\ldots + \frac{A_1}{A_n} y + \frac{1}{A_n} = 0.$$

Mocht het gebeuren, dat A_n negatief is, dan behoeft men de

beide leden der vergelijking slechts te vermenigvuldigen met -1, om den term y^n het positieve teeken te geven.

Heeft men bijv. de vergelijking

$$x^3 - 8x^2 + 4x + 48 = 0,$$

waarvoor men ook schrijven kan:

$$(x+2)(x-4)(x-6) = 0,$$

en waarvan de wortels zijn -2, 4 en 6, dan zal de vergelijking

$$y^3 + \tfrac{1}{12}y^2 - \tfrac{1}{6}y + \tfrac{1}{216} = 0$$

tot wortels hebben $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ en $\frac{1}{3}$. Inderdaad kan men voor de tweede vergelijking schrijven: $(y+\frac{1}{2})(y-\frac{1}{4})(y-\frac{1}{3}) = 0$.

Heeft men nog de vergelijking

$$x^3 + 3x^2 + 16 = 0, \text{ waarin}$$

$$f(x) = (x+4)\left(x - \frac{1-\sqrt{-15}}{2}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{-15}}{2}\right),$$

dan kan men daarvoor ook schrijven: $x^3 + 3x^2 + 0.x + 16 = 0$.

Hieruit vindt men nu de vergelijking

$$y^3 + \tfrac{3}{16}y + \tfrac{1}{16} = 0,$$

waarvan de wortels zullen zijn $-\frac{1}{4}$, $\frac{1+\sqrt{-15}}{8}$ en $\frac{1-\sqrt{-15}}{8}$,

zijnde deze beide laatste wortels de omgekeerde waarden van $\frac{1-\sqrt{-15}}{2}$ en $\frac{1+\sqrt{-15}}{2}$.

23. Stelling. *Wanneer men de termen der vergelijking* $f(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + A_n = 0$ *respectievelijk vermenigvuldigt met de termen der reeks* $1, m, m^2 \ldots\ldots m^n$, *waarin* m *een geheel of gebroken getal is, dan zullen de wortels der nieuwe vergelijking* $y^n + mA_1y^{n-1} + m^2A_2y^{n-2} + \ldots m^nA_n = 0$ *allen* m*-maal grooter zijn geworden. Mochten er in de oorspronkelijke vergelijking termen ontbreken, dan behoeft men die slechts in te vullen, door hun* 0 *tot coëfficiënt te geven.*

Bewijs. Substitueert men in de opgegeven vergel. $f(x) = 0$ $x = \frac{y}{m}$ of $y = mx$, waardoor alle wortels m-maal grooter worden, dan vindt men:

$$\frac{y^n}{m^n} + A_1\frac{y^{n-1}}{m^{n-1}} + A_2\frac{y^{n-2}}{m^{n-2}} + \ldots\ldots + A_n = 0,$$

of na vermenigvuldiging met m^n :

$$y^n + mA_1 y^{n-1} + m^2 A_2 y^{n-2} + \ldots\ldots m^n A_n, \ldots\ldots \text{(A)}$$

welke uitkomst ook verkregen ware, door de termen van $f(x)$ respectievelijk met de termen der meetkundige reeks $1, m, m^2 \ldots m^n$ te vermenigvuldigen.

Heeft men bijv. de vergelijking:

$$x^4 + 2x^3 - 25x^2 - 26x + 120 = 0,$$

waarin $f(x) = (x-2)(x+3)(x-4)(x+5)$,

dan zijn de wortels der vergelijking

$$y^4 + 3.2y^3 - 9.25y^2 - 27.26y + 81.120 = 0$$

$6, -9, 12, -15$.

Bij zoodanige verrichtingen plaatst men de bewerking gewoonlijk als volgt:

1	+ 2	— 25	— 26	+ 120
1	3	9	27	81

$$y^4 + 6y^3 - 225y^2 - 702y + 9720 = 0.$$

24. De voorgaande eigenschap vindt voornamelijk hare toepassing, om eene vergelijking van de gedaante

$$Ax^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + A_{n-1}x + A_n = 0, \ldots (\alpha)$$

waarin A, A_1, A_2 ..... A_n geheele getallen zijn, te herleiden tot eene andere, waarin de hoogste macht van x de eenheid tot coëfficiënt heeft en de coëfficiënten der andere termen geheele getallen blijven.

Voor de vergelijking (α) kan men namelijk schrijven:

$$x^n + \frac{A_1}{A} x^{n-1} + \frac{A_2}{A} x^{n-2} + \ldots\ldots + \frac{A_n}{A} = 0.$$

Vermenigvuldigt men nu de termen dezer laatste vergelijking respectievelijk met de meetkundige reeks

$$1, A, A^2, A^3 \ldots\ldots A^n,$$

dan heeft men de vergelijking

$$y^n + A_1 y^{n-1} + AA_2 y^{n-2} + \ldots\ldots + A^{n-1} A_n = 0 \ldots (\beta)$$

wier coëfficiënten allen geheele getallen zijn, doch wier wortels m-maal grooter zijn, dan die van de vergelijking (α). Kan men dus de vergelijking (β) oplossen, dan vindt men de wortels der oorspronkelijke vergelijking door alle wortels door A te deelen.

Daaruit blijkt tevens, dat de gedaante (β) even algemeen is, als de gedaante (α), dewijl (α) steeds tot de gedaante (β) herleid kan worden. Op dergelijke wijze zal men altijd de breuken uit de coëfficiënten kunnen verdrijven. Had men bijv. de vergelijking

$$x^4 - \tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{2}{3}x - \tfrac{1}{3\,1\,6} = 9,$$

dan vermenigvuldige men de termen respectievelijk met 1, 6, 36, 216, 1296

1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	$+\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3\,1\,6}$
1	6	36	216	1296
y^4	$-4y^3$	$-6y^2$	$+48y$	$-6 = 0.$

25. Het ligt voor de hand, dat indien men $m = \frac{1}{m'}$ neemt, waarin m' een geheel getal is, dan de wortels der nieuwe vergelijking m'-malen kleiner zullen zijn, dan die der oorspronkelijke vergelijking. Want schrijft men $m'y$ voor x, waardoor $y = \frac{x}{m'}$, dan zal men uit de oorspronkelijke vergelijking afleiden:

$$y^n + \frac{A_1}{m'}y^{n-1} + \frac{A_2}{m'^2}y^{n-2} + \ldots\ldots + \frac{A_n}{m'^n} = 0,$$

welke vergelijking wij ook hadden kunnen vinden door in de vergelijking (A) van N°. 23 $\frac{1}{m'}$ in plaats van m te schrijven.

De toepassing hiervan kan dienen, om de vergelijkingen te vereenvoudigen. Heeft men namelijk de vergelijking

$$x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 32x - 48 = 0,$$

dan kan men de termen respectievelijk vermenigvuldigen met de reeks $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$,
of deelen door $1, 2, 4, 8, 16$.

Hierdoor vindt men: $y^4 + 2y^3 + 3y^2 + 4y - 3 = 0$, waarin de wortels twee maal kleiner geworden zijn, dan zij waren in de oorspronkelijke vergelijking.

26. De in deze § opgegeven en bewezene eigenschappen der vergelijkingen stellen ons in staat, om ons nu verder geregeld met de rechtstreeksche oplossing der vergelijkingen bezig te houden. Wij zullen dan nu ook achtereenvolgens de oplossingen voordragen van de vergelijkingen van den 1en, 2en, 3en en 4en graad, met één en meer onbekenden en het theoretische gedeelte daar-

van door tal van voorbeelden ophelderen. Ter toepassing van het behandelde mogen nog dienen de volgende

VRAAGSTUKKEN.

1. Hoeveel wortels heeft de vergelijking
$$x^4 - 1 = 0.$$
Waarom zijn twee dier wortels reëel, waarom zijn er twee imaginair? Zijn de reële wortels positief of negatief? (§ 5, 5 en 20).
2. Hoeveel wortels heeft de vergelijking
$$x^8 - 2x^7 + x^6 = 0,$$
en welke zijn die wortels? (§ 5, 12).
3. Wat gebeurt er indien men de vergelijking
$$(x+a)(x^2-9) = (x^2-b)(x^2-9) + x + 3$$
deelt door $x+3$? (§ 5, 12).
4. Welke wortels heeft de vergelijking
$$(x+3a+2b)^5 = 0?$$ (§ 5, 12).
5. De vergelijking $x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 9x + 9 = 0$, heeft tot wortels -1, $1-\sqrt{-2}$ en $-1+\sqrt{-2}$. Welke zijn de twee nog ontbrekende wortels? (§ 5, 13).
6. Stel door middel van de stelling van § 5, 15 eene vergelijking samen van den vijfden graad, indien gegeven is, dat drie dier wortels zijn 4, $\sqrt{-2}$ en $\sqrt{-3}$, terwijl alle coëfficiënten geheele getallen moeten zijn en de hoogste macht van x de eenheid tot coëfficiënt heeft.
7. Welke vergelijking heeft met de vergelijking $x^4+2x^3+7=0$ wortels, die alleen in teeken verschillen? (§ 5, 16).
8. Indien alle wortels der vergelijking $x^3-9x^2+24x-24=0$ reëel zijn, hoeveel negatieve wortels heeft dan die vergelijking? (§ 5, 18).
9. Welke vergelijking heeft tot wortels de omgekeerde waarden van de wortels der vergelijking
$$x^4 + 7x^3 + 9x^2 - 3x - 7 = 0?$$ (§ 5, 22).
10. Herleid de vergelijking
$$5x^3 + 2x^2 - 7x + 9 = 0$$
tot eene andere, waarvan de coëfficiënten geheele getallen

zijn en wier eerste term de eenheid tot coëfficiënt heeft? (§ 5, 23, 24).

11. Kan men de vergelijking
$$x^4 + 3x^3 + 18x^2 + 108x + 567 = 0$$
ook door kleinere getallen voorstellen? (§ 5, 25).

12. Herleid de vergelijking
$$x^8 + 5x^4 + 3 = 0$$
tot eene vergelijking, die de omgekeerde waarden van de wortels der oorspronkelijke tot wortels heeft en herleid deze vergelijking wederom tot de algemeene gedaante
$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + A_n = 0,$$
waarin de coëfficiënten geheele getallen zijn.

ANTWOORDEN.

1. De vergelijking heeft vier wortels, waarvan een reëele positief, de andere negatief is.
2. De vergelijking heeft zes wortels $x = 0$ en twee wortels $x = 1$.
3. Dan wordt de vergelijking van een lageren graad en men verdonkert den wortel $x = -3$.
4. De vergelijking heeft vijf gelijke wortels $x = -(5a+2b)$.
5. De niet opgegeven wortels zijn $1+\sqrt{-2}$ en $-1-\sqrt{-2}$.
6. De begeerde vergel. is $x^5 - 4x^4 + 5x^3 - 20x^2 + 6x - 24 = 0$.
7. Dezelfde vergelijking. Zij heeft twee paar imaginaire wortels, die juist tegenovergestelde teekens hebben.
8. Drie positieve wortels.
9. $7y^4 + 3y^3 - 9y^2 - 7y - 1 = 0$ of $y^4 + \frac{3}{7}y^3 - \frac{9}{7}y^2 - y - \frac{1}{7} = 0$.
10. $y^3 + 2y^2 - 35y + 225 = 0$; waarin $y = 5x$ of $x = \frac{1}{5}y$.
11. $y^4 + y^3 + 2y^2 + 4y + 7 = 0$; waarin $y = \frac{1}{3}x$ of $x = 3y$.
12. Vergelijking op de omgekeerde waarden der wortels: $y^8 + \frac{5}{3}y^4 + \frac{1}{3} = 0$. Hiervan de coëfficiënten tot geheele getallen herleidende, vindt men $z^8 + 5z^4 + 3 = 0$; waarin $z = \frac{3}{x}$.

§ 6. Oplossing van vergelijkingen van den eersten graad met ééne onbekende.

1. Wanneer men eene vergelijking met ééne onbekende tot hare algemeene gedaante heeft herleid, kan men eerst beoordeelen van welken graad zij is. Komt daarin de onbekende slechts voor, verheven tot de eerste macht, dan brengt men den bekenden term naar het tweede lid der vergelijking, dan zal daardoor eene bepaalde waarde voor de onbekende gevonden worden. Heeft men namelijk de vergelijking gebracht tot de algemeene gedaante $x + P = 0$,
dan volgt daaruit onmiddellijk $x = -P$.

Dikwijls echter herleidt men de vergelijking tot de gedaante

$$Ax + A_1 = 0 \quad \text{of} \quad Ax = -A_1,$$

waaruit $x = -\frac{A_1}{A}$. Tusschen deze beide herleidingen bestaat geen wezenlijk onderscheid.

2. *Men vraagt de waarde van x in de vergelijking:*

$$\tfrac{1}{3}(x+5) - \tfrac{1}{4}(x-3) = \tfrac{1}{8}(5x+1) - 27.$$

Men verdrijft hier de gebrokens, door de beide leden met 12 te vermenigvuldigen, ontwikkelt de producten en brengt alle termen, waarin de onbekende voorkomt, in het eerste, die waarin zij niet voorkomt, in het tweede lid. Zoo handelende heeft men:

$$\begin{aligned} 4(x+5) - 3(x-3) &= 10(5x+1) - 324 \\ 4x + 20 - 3x + 9 &= 50x + 10 - 324 \\ 4x - 3x - 50x &= -20 - 9 + 10 - 324 \\ -49x &= -343 \\ x &= 7. \end{aligned}$$

3. *Welke zijn de waarden van x in de vergelijking:*

$$\frac{3x}{7x+8} = \frac{5x}{17x-8}?$$

Beide leden dezer vergelijking kunnen door x gedeeld worden; zulks doende, verdonkeren wij eene waarde van x en wel die waarde, die den factor, waardoor men deelt, gelijk aan 0 maakt. Eene eerste waarde van x is derhalve 0. Na de deeling verricht te hebben, vinden wij achtereenvolgens:

$$\frac{8}{7x+8} = \frac{5}{17x-8} \text{ of } 51x-24 = 35x + 40$$

d. i. $16x = 64$ of $x = \frac{64}{16} = 4$.

4. *Welke is de waarde van x in de vergelijking:*

$$\frac{2mx}{m+n} - \frac{n^2}{m-n} = x - \frac{4mnx}{m^2-n^2}?$$

Men vermenigvuldige de beide leden der vergelijking met m^2-n^2 en handele verder als in de voorgaande vergelijkingen. Men vindt dan:

$$\frac{2mx}{m+n} - \frac{n^2}{m-n} = x - \frac{4mnx}{m^2-n^2}$$

$$2mx(m-n) - n^2(m+n) = x(m^2-n^2) - 4mnx$$

$$(2m^2-2mn-m^2+n^2+4mn)x = n^2(m+n)$$

$$(m^2+2mn+n^2)x = n^2(m+n)$$

$$x = \frac{n^2(m+n)}{m^2+2mn+n^2} = \frac{n^2}{m+n}.$$

5. De oplossing van eenig vraagstuk door middel der algebra bestaat uit vier of vijf deelen, te weten: *de keuze der onbekende*, *het in vergelijking brengen van het vraagstuk*, *de oplossing der vergelijking*, *de beredeneering der gevonden uitkomsten* en eindelijk de *constructie*, wanneer er sprake is van de algebraïsche oplossing eener meetkundige vraag.

De goede keuze van de onbekende wordt verkregen door langdurige oefening; daarvoor zijn geene vaste regels op te geven. Heeft men eenmaal eene onbekende aangenomen, dan is het in vergelijking brengen van de voorwaarden des vraagstuks gewoonlijk nog al gemakkelijk. Men behandelt de onbekende namelijk, even alsof hare waarde gegeven is, en men die waarde door de voorwaarden van het vraagstuk wilde verifieeren. De oplossing der vergelijkingen, die uit eenig vraagstuk voortvloeien, is natuurlijk dezelfde als die van de abstracte vergelijkingen van den zelfden graad; terwijl de discussie en constructie ter harer plaatse uit voorbeelden zullen blijken.

6. *Een vader is 26 jaar, zijn zoon is 2 jaar; na hoeveel jaren zal de vader 3-maal zoo oud zijn als de zoon?*

Op de vraag kan men aanstonds antwoorden: na x jaren; want

na x jaren is de vader $26 + x$, de zoon $2 + x$ jaren en dan is de ouderdom des vaders het drievoud van dien des zoons, dus:

$$26 + x = 3(2+x),$$

waaruit $x = 10$ jaar.

Men ziet hieruit ten duidelijkste, dat het in vergelijking brengen der voorwaarden geheel overeenkomt met de verificatie van het te vinden antwoord.

7 *Een bak wordt gevuld door twee kranen. De eene kan hem vullen in a uren, de andere in b. Indien deze bak twee andere kranen bevat, waardoor men hem respectievelijk in c en d uur leêg kan laten loopen, dan vraagt men in hoeveel uren de bak gevuld zal zijn, indien reeds* $\frac{1}{e}$ *gedeelte gevuld was, toen alle kranen werden opengezet.*

In één uur vult de eerste kraan het $\frac{1}{a}$ gedeelte, de tweede het $\frac{1}{b}$ gedeelte; in één uur loopt door de derde kraan het $\frac{1}{c}$ en door de vierde kraan het $\frac{1}{d}$ gedeelte van den geheelen bak weg: ieder uur wordt dus van den bak het $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} - \frac{1}{d}\right)$ gedeelte gevuld.

Dewijl het $\frac{1}{e}$ gedeelte des baks reeds gevuld is, blijft er nog het $\frac{e-1}{e}$ gedeelte over, om gevuld te worden. Stelt men nu, dat dit gedeelte na x uren gevuld zal zijn, dan heeft men de vergelijking:

$$x\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} - \frac{1}{d}\right) = \frac{e-1}{e},$$

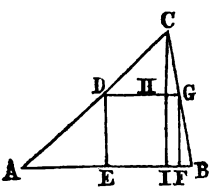
waaruit onmiddellijk volgt:

$$x = \frac{e-1}{e\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} - \frac{1}{d}\right)}, \text{ of na behoorlijke herleiding}$$

$$x = \frac{abcd(e-1)}{e(bcd + acd - abd - abc)}.$$

8. *In een driehoek, waarvan de zijden bekend zijn, heeft men een vierkant beschreven, waarvan eene zijde langs de basis des*

driehoeks ligt, terwijl de twee opstaande zijden eindigen in de opstaande zijden des driehoeks; men vraagt deszelfs zijden te berekenen.



Stelt men de te vinden zijde des vierkants $= x$, de basis des drieh. $= b$, zijne hoogte $= h$, dan is, omdat men heeft (EUCL. VI : 4):

$$DG : HC :: AB : IC$$

$$\text{ook} \quad \frac{DG}{HC} = \frac{AB}{IC};$$

$$\text{waaruit onmiddellijk volgt} \quad \frac{x}{h-x} = \frac{b}{h},$$

$$\text{of wat hetzelfde is:} \quad \frac{h}{b+h} = \frac{x}{b}, \text{ d. i. } x = \frac{bh}{b+h}.$$

Constructie. De zijde des vierkants is eene vierde evenredige tot de som van basis en hoogte, de basis en de hoogte. (Zie EUCL. VI, 12.)

Discussie. De zijde des vierkants, alleen afhangende van basis en hoogte, volgt daaruit, dat in alle scherphoekige en rechthoekige driehoeken, die op dezelfde basis staan en eene zelfde hoogte hebben, het ingeschreven vierkant even groot is. Wanneer men van den stomphoekigen driehoek de zijde over den stompen hoek als basis aanneemt, gaat de stelling ook voor stomphoekige driehoeken woordelijk door.

Omdat verder de vergelijking van den eersten graad is, en men dus slechts ééne waarde vindt voor x, ziet men tevens, dat op ééne zijde eens driehoeks slechts één vierkant in dien driehoek beschreven kan worden.

Dewijl de vraag altijd beantwoord kan worden, indien basis en hoogte van den driehoek gegeven zijn, moet men, om ook de beide gevallen van den stomphoekigen driehoek daaronder te begrijpen, het vraagstuk algemeener uitdrukken en zeggen: Men verlangt een vierkant te beschrijven, waarvan ééne zijde langs de zijde eens driehoeks valt of langs haar verlengde, terwijl twee hoekpunten over deze zijde in de beide andere zijden des driehoeks komen te liggen.

Wij zullen meermalen gelegenheid hebben om te zien, hoe de algebra een vraagstuk generaliseert. — Te zijner plaatse zal zulks aangewezen worden.

9. Ik acht deze oplossingen genoegzaam in aantal, om den aandachtigen lezer op den weg te brengen, hoe hij te handelen hebbe met vraagstukken, die aanleiding geven tot vergelijkingen van den 1sten graad met ééne onbekende. Hij oefene zich verder op de volgende, en indien hij nog een grooter aantal wenscht op te lossen, kan hij een goeden voorraad vinden in DE GELDER's CCL opgeloste vraagstukken, gevolgd door nog CCCL onopgeloste. Voorzeker verdienen deze vraagstukken alle aanbeveling.

VRAAGSTUKKEN.

1. Welke is de waarde van x in de vergelijkingen:
   a) $\frac{1}{3}(x+5)-\frac{1}{4}(x-3)=\frac{5}{6}(5x+1)-27$;
   b) $4x^2-6x=3x^2+x$;
   c) $\frac{3x}{3x-1}-\frac{x}{5x}=\frac{4x}{5x-2}$.
2. Welke is de waarde van x in de vergelijkingen:
   a) $\frac{cx^m}{a+bx}=\frac{fx^m}{d+ex}$;
   b) $(a+x)(b+x)-a(b+c)-x^2=\frac{a^2c}{b}$;
   c) $(a+b)\frac{cx}{d}+(a^2-b^2)x^2=(a+b)(2c+ad)\frac{x}{d}$.
3. Van een getal van twee cijfers is het cijfer der tientallen tweemaal zoo groot, als dat der eenheden. Wanneer men van dit getal 27 aftrekt, vindt men de cijfers in omgekeerde volgorde. Welk is dat getal?
4. Waar moet een mathematische rechte hefboom van a decimeters zijn steunpunt vinden, opdat b kilogrammen aan den kortsten arm evenwicht maken met c kilogrammen aan den langsten?
5. In welk talstelsel wordt 193 (tientallig) voorgesteld door 94?
6. De som van twee getallen, gedeeld door hun verschil, geeft 2 tot quotiënt en 6 tot rest; vermindert men het grootste getal met 6 en vermeerdert men het kleinste met evenveel eenheden, dan verhouden zich die resultaten als 4 en 3. Welke getallen zijn hier bedoeld?

7. Een staaf bevat 11 kilogrammen lood en 5 k. tin; hoeveel lood moet men daarbij voegen, opdat 16 k. van het nieuwe mengsel slechts twee pond tin bevatten?
8. Een horologie wijst 8^u 30'. Na hoeveel tijd staat de minuutwijzer juist boven den uurwijzer, na hoeveel tijd maken zij een rechten hoek en wanneer liggen zij in elkanders verlengde?
9. De uur-, minuut- en secondewijzer staan alle drie op 12^u. Na hoeveel tijd zal de secondewijzer den hoek der beide andere wijzers middendoor deelen; wanneer deelt die zelfde wijzer den hoek midden door, gevormd door den uurwijzer en het verlengde van den minuutwijzer; wanneer deelt hij den hoek midden door, gevormd door den minuutwijzer en 't verlengde van den uurwijzer?
10. A en B gebruiken voor zekeren handel een gelijk kapitaal. Het eerste jaar wint A f 400, B daarentegen verliest f 400; het tweede jaar verliest A het derde deel van zijne bezitting en B wint f 400 minder, dan het dubbel van het verlies van A en bezit nu het dubbel van A. Hoeveel was het oorspronkelijke kapitaal?
11. Twee personen spelen samen. Bij het begin van het spel heeft de eerste a, de tweede b gulden; na het spel heeft de tweede c maal zooveel geld als de eerste; hoeveel heeft de eerste verloren?
12. Een getal bestaat uit zes cijfers. Plaatst men het cijfer 2 der eenheden op de zesde plaats, dan vindt men een getal, dat het derde gedeelte is van het oorspronkelijke. Welk is het bedoelde getal?

ANTWOORDEN.

1. *a*) $x = 7$; *b*) $x = 7$ en $x = 0$; *c*) $x = 2$.
2. *a*) en $x = \frac{af - cd}{ce - bf}$, *m* wort. $= 0$; *b*) $x = \frac{ac}{b}$; *c*) $x = \frac{c + xd}{d(a - b)}$ en $x = 0$.
3. $x = 63$. — 4. De kortste arm is lang $\frac{ac}{b + c}$ decimeters.
5. In het een en twintig tallig stelsel.

6. De getallen zijn 30 en 12. 7. 24 k. lood.
8. Zij staan boven elkander na $13\frac{7}{11}'$; zij maken een rechten hoek na 30'; zij leggen in elkaârs verlengde na $46\frac{4}{11}'$.
9. De eerste hoek wordt middendoor gedeeld na $\frac{1}{1}\frac{1}{1}\frac{1}{7}$, de tweede na $\frac{1}{1}\frac{0}{1}\frac{8}{7}$ en de derde na $\frac{3}{1}\frac{5}{1}\frac{0}{7}$ minuten.
10. f 3200. — 11. $\frac{ac-b}{c+1}$ gulden. — 12. 857142.

---

§ 7. Vergelijkingen van den eersten graad met twee of meer onbekenden.

1. Twee niet identieke vergelijkingen zijn *onderling onafhankelijk*, wanneer zij niet tot dezelfde vergelijking herleid kunnen worden, bijv.:

$$2x + 7y = 3 \quad \text{en} \quad 4x + 3y = 8;$$

onderling afhankelijk daarentegen, wanneer zij wel tot dezelfde gedaante gebracht kunnen worden, bijv.:

$$2x + 7y = 3 \quad \text{en} \quad 2ax + 7a = 3a.$$

Twee niet-identieke vergelijkingen zijn *in strijd met elkander*, wanneer geene waarden, die aan de onbepaalden in de eene vergelijking voldoen, de andere vergelijking identiek maken, bijv.:

$$3x + 4y = 7 \quad \text{en} \quad 6x + 8y = 4.$$

Zijn de vergelijkingen afhankelijk, dan zullen de waarden der onbepaalden, die men uit ééne vergelijking afleidt, ook in de andere vergelijking voldoen. Het oplossen van zoodanige vergelijkingen komt dus neêr op het oplossen ééner vergelijking met twee onbepaalden. Daar men daarin ééne onbepaalde willekeurig mag aannemen [§ 2, n°. 4], wordt in zoodanig geval het oplossen teruggebracht tot het oplossen ééner vergelijking met ééne onbekende.

2. Neemt men twee willekeurige niet-identieke vergelijkingen, dan zullen deze in den regel onderling onafhankelijk zijn; heeft men bijv. $2a + 3b = c$ ..... (1) en $5a - 4b = c + a$ ..... (2) en wil men getallen opsporen, die voor de letters gesubstitueerd, aan deze beide vergelijkingen voldoen, dan kan men vooreerst a

uit de eerste vergelijking berekenen. Wij vinden alsdan $a = \frac{c-3b}{2}$. Dewijl de letters in de beide vergelijkingen eene zelfde waarde moeten hebben, kan men ook a uit de tweede vergelijking berekenen (wij vinden daarvoor $a = \frac{c+4b}{4}$), en die waarden aan elkander gelijk stellen; daaruit volgt:

$$\frac{c-3b}{2} = \frac{c+4b}{4} \ldots\ldots (3).$$

Nemen wij dus a als onbekende aan, dan zullen de vergelijkingen (1) en (2) identiek worden, als men in de eerste $\frac{c-3b}{2}$, in de tweede $\frac{c+4b}{4}$ voor a substitueert; doch daar dit identiek worden door eene zelfde waarde van a moet geschieden, moet er nog aan de vergelijking (3) voldaan worden. Nemen wij nu daarin b aan als onbekende, dan vinden wij $b = \frac{1}{10}c$; welke waarde, in (3) gesubstitueerd, de vergelijking identiek maakt en dus aan a in de beide vergelijkingen eene zelfde waarde geeft. Hieruit ziet men nu ten duidelijkste, dat men, om aan twee onafhankelijke niet-identieke vergelijkingen te voldoen, twee onbekenden aan moet nemen, doch ook nooit meer dan twee onbekenden noodig heeft; want welke waarde men ook aan c geve, zoolang b het tiende gedeelte van c blijft, zoolang zullen de waarden van a in de beide vergelijkingen voldoen. Neemt men twee vergelijkingen, bijv.:

$$2a - b = c \qquad ef + g = 3h,$$

dan ziet men aanstonds, dat hier geene sprake kan zijn van aan eene letter eene waarde te geven, die aan beide vergelijkingen voldoet. Twee vergelijkingen, die geene zelfde letters hebben, kunnen dus beschouwd worden, als twee niet bij elkander behoorende vergelijkingen, waarin men voor alle letters op ééne na eene willekeurige waarde aan kan nemen; zoodat het oplossen van zoodanige vergelijkingen niets anders wil zeggen, dan eene vergelijking op te lossen met ééne onbekende. Hebben de beide vergelijkingen ééne zelfde letter, dan kan aan de vraag voldaan worden; is bijv.:

$$2a + b = c \ldots\ldots (1) \quad \text{en} \quad 4a - 3d = e \ldots\ldots (2),$$

dan is in (1) $a = \frac{b+c}{2}$ en in (2) $a = \frac{e+3d}{4}$;

deze waarden moeten wederom aan elkander gelijk zijn, derhalve

$$\frac{b+c}{2} = \frac{e+3d}{4} \ldots\ldots\ldots (3).$$

Door nu voor drie letters eene willekeurige waarde te nemen en daaruit de vierde te berekenen, zullen de waarden van a gelijk worden en zal men dus aan de beide vergelijkingen voldaan hebben. Ook in dit geval heeft men dus twee, maar ook niet meer dan twee onbekenden noodig.

3. Drie niet-identieke vergelijkingen zijn ***onderling onafhankelijk***, wanneer de eene niet uit de andere kan worden afgeleid. Zij zijn ***afhankelijk***, wanneer door herleiding der eene vergelijking eene andere gevonden wordt; zij zijn met elkaâr ***in strijd***, wanneer geene waarden kunnen aangewezen worden, die voor de letters gesubstitueerd, aan de drie vergelijkingen tegelijk voldoen.

Heeft men drie onderling onafhankelijke vergelijkingen, en komt er in iedere vergelijking minstens ééne letter voor, die in eene der andere vergelijkingen voorkomt, dan zal men drie onbekenden noodig hebben om te vinden, welke waarden, voor de letters in de drie vergelijkingen gesubstitueerd, aan alle drie de vergelijkingen voldoen.

Neemt men bijv. de vergelijkingen

$3a - 4b = 2c \ldots (1)$, $a + 3d = e \ldots (2)$ $4a + c = d \ldots (3)$,

dan volgt uit elk dier vergelijkingen afzonderlijk:

$$a = \frac{2c+4b}{3} \qquad a = e - 3d \qquad a = \frac{d-c}{4};$$

omdat a in de drie vergelijkingen eene zelfde waarde moet hebben, zal men hebben:

$$\frac{2c+4b}{3} = e - 3d \ldots (4), \quad \frac{2c+4b}{3} = \frac{d-c}{4} \ldots (5), \quad e - 3d = \frac{d-c}{4} \ldots (6),$$

waarvan de vergelijking (6), als geheel afhankelijk van de vergelijkingen (4) en (5), weggelaten kan worden, omdat zij geene nieuwe voorwaarden in zich bevat, waaraan voldaan moet worden en die niet reeds in de andere vergelijkingen opgesloten zijn. De vergelijkingen (4) en (5) mogen niet gemist worden, omdat

de eerste de voorwaarden uitdrukt, onder welke de waarden van a in (1) en (2) gelijk zijn; de (5), onder welke zulks in (1) en (3) plaats heeft.

Nemen wij, om aan de nieuwe vergelijkingen te voldoen, b als nieuwe onbekende aan, dan vinden wij:

$$4b = 3e - 9d - 2c, \qquad 4b = \frac{3d - 11c}{4};$$

waaruit wederom volgt:

$$3e - 9d - 2c = \frac{3d - 11c}{4};$$

zoodat men, e oplossende vindt:

$$e = \frac{13d - c}{4}.$$

Substitueert men nu de waarden van e, b en a in de drie vergelijkingen, dan zullen deze daardoor identiek worden. Uit bovenstaande bewerking ziet men ten duidelijkste, dat men, om tegelijk aan drie onderling onafhankelijke vergelijkingen te voldoen, minstens drie, maar ook niet meer dan drie onbekenden behoeft aan te nemen. Overigens gelden hier gelijke opmerkingen, als wij bij de vergelijkingen met twee onbekenden gemaakt hebben. Alleen moeten wij hier nog opmerken, dat men zich steeds moet wachten, onderling afhankelijke vergelijkingen voor onafhankelijk aan te zien. Zulks is bij 't oplossen van vraagstukken van veel belang bij 't in vergelijking brengen der voorwaarden. Zoo is, wanneer men uit

$$2x + 3y + z = 4 \quad \text{en} \quad 7x - 4y - z = 8$$

door optelling de vergelijking $9x - y = 12$ afleidt, de laatste vergelijking afhankelijk van de beide eerste, omdat zij slechts de voorwaarden bevat, die alreede door de beide andere worden uitgedrukt.

4. Uit het bovenstaande is nog gemakkelijk af te leiden, dat men door eene dergelijke redeneering, als wij volgden ten aanzien van twee vergelijkingen met twee en van drie vergelijkingen met drie onbekenden, in het algemeen zal komen tot het resultaat, dat men om aan n onderling onafhankelijke niet-identieke vergelijkingen van den eersten graad te gelijker tijd te voldoen, n onbekenden noodig heeft, maar ook *niet meer* dan n, en dat

deze onbekenden zoodanig in de vergelijkingen verspreid moeten zijn, dat in elke vergelijking minstens eene, in elke twee vergelijkingen minstens twee, in elke drie vergelijkingen minstens drie, in elke k vergelijkingen minstens k onbekenden voorkomen.

Bovendien is ons uit die redeneering gebleken, dat zoo men willekeurige vergelijkingen neemt, d. i. de zoodanige, welke uit geen enkel vraagstuk voortkomen, men in n vergelijkingen n willekeurige letters als onbekenden mag aannemen, mits aan de vorenstaande bepaling voldoende.

5. Men herleidt de vergelijkingen van den eersten graad met twee en meer onbekenden meestal tot de gedaanten

$$Ax + By = C$$
$$Ax + By + Cz = D$$
$$Ax + By + Cz + Du = E,$$

waarin A, B, C, D, E, ... gewoonlijk geheele getallen voorstellen, doch evenzeer gebroken als irrationeel kunnen zijn. Na de vergelijkingen tot die gedaante gebracht te hebben, lost men de onbekenden op en wel volgens vier methoden.

6. *Vergelijkingen van den eersten graad met twee onbekenden.*

Eerste methode. *Door gelijkstelling van de waarden, die men in de beide vergelijkingen voor eene zelfde onbekende vindt.*

Zijn gegeven: $Ax + By = C$ en $A_1x + B_1y = C_1$.

Uit de beide vergelijkingen volgt:

$$x = \frac{C - By}{A} \quad \text{en} \quad x = \frac{C_1 - B_1y}{A_1};$$

derhalve: $$\frac{C - By}{A} = \frac{C_1 - B_1y}{A_1}.$$

Waaruit gevonden wordt $A_1C - A_1By = AC_1 - AB_1y$

d. i. $$(AB_1 - A_1B)y = AC_1 - A_1C$$

$$y = \frac{AC_1 - A_1C}{AB_1 - A_1B}$$

$$x = \frac{C - By}{A} = \frac{CAB_1 - ABC_1}{A(AB_1 - A_1B)} = \frac{CB_1 - BC_1}{AB_1 - A_1B}.$$

Tweede methode. *Door substitutie van de waarde, die men voor eene onbekende in eene der vergelijkingen vindt, voor die onbekende in de andere vergelijking.*

Zijn gegeven $Ax + By = C$ en $A_1x + B_1y = C_1$,

dan volgt uit de eerste vergelijking: $x = \frac{C - By}{A}$ en door substitutie dier waarde voor x in de tweede vergelijking

$$\frac{A_1 C - A_1 By}{A} + B_1 y = C_1 \cdot$$

$$(B_1 A - A_1 B) y = AC_1 - A_1 C$$

$$y = \frac{AC_1 - A_1 C}{AB_1 - A_1 B}, \text{ enz.}$$

Derde methode. *Door optelling of aftrekking, na alvorens de coëfficiënten eener onbekende in beide vergelijkingen gelijk te hebben gemaakt.*

Zijn gegeven: $Ax + By = C$ en $A_1 x + B_1 y = C_1$.

Geeft men nu aan x gelijke kleinst mogelijke coëfficiënten, d. i. — in de veronderstelling, dat A en A_1 relatief priem zijn, — vermenigvuldigen wij de eerste vergelijking met A_1, de tweede met A, dan vinden wij:

$AA_1 x + A_1 By = A_1 C$ en $AA_1 x + AB_1 y = AC_1$,

waaruit door aftrekking of optelling, naar gelang de teekens van de coëfficiënten van x gelijk of ongelijk zijn, volgt:

$$(A_1 B - AB_1) y = A_1 C - AC_1;$$

waaruit wederom $y = \frac{A_1 C - AC_1}{A_1 B - AB_1}$.

Door de coëfficiënten van y gelijk te maken en dan de vergelijkingen af te trekken of op te tellen, verdwijnt deze onbekende en vindt men eene vergelijking in x, waaruit deze onbekende kan opgelost worden.

Vierde methode. *Men vermenigvuldigt eene der vergelijkingen met een onbepaald getal, telt ze daarna op en bepaalt het willekeurige getal zoodanig, dat de coëfficiënt van één der onbekenden = 0 wordt.*

Zijn gegeven: $Ax + By = C$ en $A_1 x + B_1 y = C_1$.

Vermenigvuldigen wij nu de eerste vergelijking met m, tellen wij dan bij dit product de tweede op, dan vinden wij:

$$(Am + A_1) x + (Bm + B_1) y = Cm + C_1.$$

Bepalen wij m nu zoodanig, dat $Am + A_1 = 0$ wordt, d. i. nemen wij $m = -\frac{A_1}{A}$, dan zal de coëfficiënt van x verdwij-

nen en er zal eene vergelijking in y overblijven, die een zelfde resultaat zal opleveren, als wij hooger vonden.

Aanmerking. 1. Ofschoon elke van deze vier methoden naar den aard der vergelijkingen, welke men op moet lossen, soms de voorkeur verdient, kan men in 't algemeen de derde aanmerken als diegene, welke het spoedigst en gemakkelijkst tot het doel voert. De laatste is ingevoerd door BEZOUT en wordt uitvoerig behandeld op pag. 84—90 van zijn *Cours de Math. à l'usage de la marine et de l'artillerie. Paris* 1800. 2e *édit.* 2*ne partie.* Hij geeft daar zelfs een middeltje aan de hand om de formulen, die de waarden van x, y, z aangeven, gemakkelijk te kunnen onthouden; om daartoe te geraken moet men, indien de drie vergelijkingen van de gedaante

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

zijn, voor elke onbekende maar eventjes de volgorde van *zes en dertig* letters nauwkeurig in 't hoofd houden. Voor twee onbekenden wordt hij hierin nagevolgd door de H.H. STROOTMAN en BADON GHYBEN. (Zie hunne *Beginselen der Stelkunst*, 2e dr. 1840, pag. 156.) Zoodanig van buiten leeren moet ik ten sterkste ontraden, omdat zulks al licht leidt tot dat werktuigelijke, dat den doodsteek geeft aan de werkzaamheid van 't oordeel.

In hoever bovendien aan BEZOUT de eer toekomt deze methode naar zich benoemd te zien, waag ik niet te beslissen; intusschen is het zeker, dat men zich van soortgelijke methode in sommige gevallen al bedient in de reeds meermalen aangehaalde editie van NEWTON'S *Arith. Univ.* Men vindt daar op pag. 51 van het 2e deel:

Eadem methodo potest et tertius aequationis terminus tolli. Proponatur aequatio $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 5x - 2 = 0$ et finge $x = y - e$, et substituendo $y - e$ pro x, orietur haec aequatio etc. — Hujus aequationis tertius terminus est $6e^2 + 9e + 3$ ductum in y^2. Ubi si $6e^2 + 9e + 3$ nullum esset, eveniret ipsum quod volumus. Fingamus itaque nullum esse etc.

2. M. CRAMER a donné à la fin de son *Introduction à*

l'analyse des lignes courbes, une très-belle règle pour déterminer immédiatement et sans passer par les opérations ordinaires, la valeur des inconnues de ces sortes d'équations en quelque nombre que soient ces inconnues (*Elém. d'Alg.* par EULER. I pag. 502.). BEZOUT zegt: Les méthodes, que l'on a eues jusqu'ici pour chasser les inconnues, ont toutes (si l'on en excepte seulement celles qu'ont données M.M. EULER et CRAMER) l'inconvénient de conduire à des équations beaucoup plus composées qu'il ne faut. — EULER nu geeft de eerste op; ik zou derhalve de derde voor de methode van CRAMER houden. Het bedoelde werk van CRAMER is niet in mijn bezit, doch de gemakkelijkheid der methode en EULER's lof doen mij daartoe besluiten. — Ik heb in geen enkel werk den naam van den vinder dezer methode opgegeven gevonden.

7. *Vergelijkingen van den eersten graad met meer dan twee onbekenden.*

Ter oplossing van zoodanige vergelijkingen kan men dezelfde methoden volgen, als voor de oplossing van de onbekenden uit twee vergelijkingen met twee onbekenden. De derde methode verdient verreweg de voorkeur. De gewone wijze van oplossing bestaat in het doen verdwijnen van ééne zelfde onbekende uit alle vergelijkingen, waardoor men in plaats van de m opgegevene vergelijkingen met m onbekenden, m—1 onderling onafhankelijke met m—1 onbekenden vindt. Hieruit wederom eene zelfde onbekende oplossende, komt men op een stelsel van m—2 vergelijkingen enz., totdat men eindelijk op ééne vergelijking met ééne onbekende komt, welker waarde alsdan gevonden kan worden. Door herhaalde substitutie vindt men vervolgens de waarden van alle onbekenden.

Zijn bijv. gegeven de drie vergelijkingen:
$Ax+By+Cz=D$, $A_1x+B_1y+C_1z=D_1$ en $A_2x+B_2y+C_2z=D_2$.
Hieruit vinden wij de vergelijkingen:

$$AA_1x + BA_1y + CA_1z = DA_1 \ldots\ldots (1)$$
$$AA_2x + AB_2y + AC_2z = D_2A \ldots\ldots (2)$$
$$AA_1x + AB_1y + AC_1z = AD_1 \ldots\ldots (3)$$
$$AA_2x + BA_2y + CA_2z = DA_2 \ldots\ldots (4)$$

Trekt men nu (1) van (3) en (4) van (2) dan vindt men:

$$(AB_1 - BA_1)y + (AC_1 - CA_1)z = D_1A - DA_1$$

en $(AB_2 - BA_2)y + (AC_2 - CA_2)z = AD_2 - DA_2$,

in welke twee vergelijkingen nog slechts twee onbekenden voorkomen; op gelijke wijze hieruit y verdrijvende, blijft er eene vergelijking in z, enz. Eenige uitgewerkte vraagstukken zullen ons met den aard dezer bewerkingen nader bekend maken. Wij willen daarbij achtereenvolgens de vier opgegevene methoden in toepassing brengen.

8. *Men vraagt naar de waarden van x en y in de vergelijkingen:*

$$\frac{ax+by}{a+b} + \frac{bx-ay}{a-b} = a^2 + b^2, \quad \frac{ax-b^2}{a-b} - \frac{by+a^2}{a+b} = 2ab.$$

Vermenigvuldigen wij beide vergelijkingen met a^2-b^2, dan vinden wij:

$$(a^2+b^2)x - (a^2+b^2)y = a^4 - b^4$$

$$a(a+b)x - b(a-b)y = a^3(a+b) - b^3(a-b);$$

d. i.:

$$x = y + a^2 - b^2, \qquad x = \frac{b(a-b)}{a(a+b)}y + \frac{a^3(a+b) - b^3(a-b)}{a(a+b)};$$

waaruit onmiddellijk volgt:

$$y + a^2 - b^2 = \frac{b(a-b)}{a(a+b)}y + \frac{a^3(a+b) - b^3(a-b)}{a(a+b)},$$

of na behoorlijke herleiding:

$$y = b^2.$$

Deze waarde voor y, gesubstitueerd in de hooger gevondene waarde van x, geeft:

$$x = y + a^2 - b^2 = a^2.$$

9. *Men vraagt de waarden van de onbekenden te berekenen uit de vergelijkingen:*

$$4x - 3y + 2z = 9, \quad 5x + 4y - 3z = 7, \quad 7x - 2y + 4z = 28.$$

Uit de eerste vergelijking volgt:

$x = \frac{9 + 3y - 2z}{4}$, en deze waarde in de andere vergelijkingen voor x gesubstitueerd hebbende, vindt men na behoorlijke herleiding:

$$31y - 22z = -17 \quad \text{en} \quad 13y + 2z = 49.$$

Lost men nu uit de eerste vergelijking z op en brengt men die waarde over in de tweede, dan heeft men:

$$z = \frac{17+31y}{22} \quad \text{en} \quad 174y = 522, \text{ waaruit } y = 3.$$

Verder is $z = \frac{17+3.31}{22} = 5$ en $x = 2$.

10. *Men vraagt naar de waarden der onbekenden in de vergelijkingen:*

$$x + 2y + 3z + 4w = 20, \quad 2x + 3y + 4z + w = 26,$$
$$3x + 4y + z + 2w = 28, \quad 4x + y + 2z + 3w = 26.$$

Vermenigvuldigt men de eerste vergelijking met 2, 3 en 4 en trekt men deze producten van elk der andere vergelijkingen, dan vindt men:

$$y + 2z + 7w = 14, \quad 2y + 8z + 10w = 32, \quad 7y + 10z + 13w = 54.$$

De eerste vergelijking, met 2 vermenigvuldigd, wordt nu van de tweede afgetrokken; de eerste met 7 vermenigvuldigd, van de tweede; dit doende vindt men:

$$4z - 4w = 4 \qquad 4z + 36w = 44.$$

Door deze vergelijkingen van elkander af te trekken, vindt men onmiddellijk $w = 1$, waarna men door herhaalde substitutie vindt:

$$z = 2, \quad y = 3, \quad x = 4.$$

11. *Men vraagt naar de waarde der onbekende in de vergelijkingen:*

$$z + 4u = 17 \quad y + 3z = 6, \quad x + 2y = 8, \quad 4x + 3y - 2z + u = 19.$$

In de beide eerste vergelijkingen ontbreekt x, wij gaan dus x uit de beide laatste vergelijkingen verdrijven, vermenigvuldigen daarom de laatste vergelijking met m en tellen daarbij de voorlaatste op. Men vindt alsdan:

$$(4m+1)x + (3m+2)y - 2mz + um = 19m + 8.$$

Stellen wij hierin $4m + 1 = 0$, dus $m = -\frac{1}{4}$, dan vinden wij:

$$\tfrac{5}{4}y + \tfrac{1}{2}z - \tfrac{1}{4}u = 4\tfrac{3}{4}$$
$$z + 4u = 17, \qquad y + 3z = 6, \qquad 5y + 2z - u = 13.$$

Vermenigvuldigen wij wederom de laatste vergelijking met m, tellen daarbij de voorlaatste en stellen $2m + 3 = 0$, dan hebben wij achtereenvolgens

$$(5m+1)y+(2m+3)z-um=13m+6$$
$$-1\tfrac{3}{4}\,y+\tfrac{1}{2}u=-2\tfrac{7}{2}$$
$$13y-3u=27\,;\quad z+4u=17.$$

Vermenigvuldigt men de tweede vergelijking met m en telt men er de eerste bij op, dan vindt men:

$$13y+mz+(4m-3)u=17m+27\,;$$

of $4m-3=0$ stellende, $13y+\tfrac{1}{4}z=1\tfrac{5}{4}^9$ of $52y+3z=159$.

Vermenigvuldigt men deze laatste vergelijking met m en telt men er de tweede der opgegevene vergelijkingen bij op, dan komt er:

$$(52m+1)\,y+(3m+3)z=159m+6.$$

Stelt men hierin $3m+3=0$, dan komt er:

$$-51y=-153,$$
$$\text{of}\qquad y=3.$$

De waarde van y gevonden zijnde, kan men de andere onbekenden gemakkelijk berekenen.

Aanmerking. Ik heb de methode van BEZOUT aangegeven en toegepast niet om hare voortreffelijkheid, maar juist om hare langwijligheid beter te doen uitkomen. Ware het niet, dat zij de eer geniet in alle Nederlandsche leerboeken voor te komen, dat er zelfs in vele verzamelingen van vraagstukken voorkomt: op te lossen volgens de leerwijze van BEZOUT, ik zoude haar evenzeer, als de latere Fransche schrijvers, der vermelding niet waard geacht hebben.

12. *Voor zeker werk worden drie arbeiders aangenomen.* A *en* B *zouden te zamen arbeidende, dit werk in* a *dagen kunnen afdoen;* A *en* C *te zamen zouden daartoe* b *dagen en* B *en* C *te zamen* c *dagen noodig hebben. Vrage in hoeveel tijd zij ieder afzonderlijk en in hoeveel dagen zij gezamenlijk dat werk zullen kunnen verrichten.*

Stellen wij, dat A het werk alleen verrichten kan in x en C alleen in y dagen, dan heeft men de volgende voorwaarden:

A en B doen per dag het $\frac{1}{a}$ gedeelte; A doet $\frac{1}{x}$ per dag,

$$\text{dus B: } \frac{1}{a}-\frac{1}{x},$$

B en C doen per dag het $\frac{1}{c}$ gedeelte; C doet $\frac{1}{y}$ per dag,

dus B: $\frac{1}{c} - \frac{1}{y}$,

derhalve: $\frac{1}{a} - \frac{1}{x} = \frac{1}{c} - \frac{1}{y}$ . . . . . (α)

A en C doen per dag het $\frac{1}{b}$, A het $\frac{1}{x}$, C het $\frac{1}{y}$ gedeelte,

derhalve $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{b}$ . . . . . (β)

Uit (α) volgt $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{a} - \frac{1}{c}$ en door hierbij (β) op te tellen:

$\frac{2}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$; door aftrekking $\frac{2}{y} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{a}$;

waaruit na behoorlijke herleiding:

$$\frac{1}{x} = \frac{bc+ac-ab}{2abc} \quad \text{en} \quad \frac{1}{y} = \frac{ac+ab-bc}{2abc},$$

$$\text{of } x = \frac{2abc}{ac+bc-ab} \text{ en } y = \frac{2abc}{ab+ac-bc}.$$

B verricht $\frac{1}{a} - \frac{1}{x} = \frac{1}{a} - \frac{bc+ac-ab}{2abc} = \frac{2bc-bc-ac+ab}{2abc} =$

$= \frac{bc+ab-ac}{2abc}$ per dag, dus het werk in $\frac{2abc}{bc+ab-ac}$ dagen.

Per dag wordt door de drie arbeiders verricht $\frac{1}{x} + \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{x}\right) +$

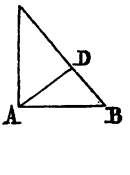
$+ \frac{1}{y} = \frac{1}{a} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a} + \frac{ac+ab-bc}{2abc} = \frac{ac+ab+bc}{2abc}$.

Het geheele werk zal dus door hen, samenwerkende, verricht worden in $\frac{2abc}{ac+ab+bc}$ dagen.

13. ***De omtrek eens rechthoekigen driehoeks is gelijk aan p en de normaal AD, uit het hoekpunt des rechten hoeks naar de hypothenusa getrokken, is gelijk aan a. Men vraagt naar de hypothenusa des driehoeks.***

Wij stellen de hypothenusa $= x$, dan is de som der beide rechthoekszijden $p - x$; verder nemen wij het verschil der rechthoekszijden $CA - AB = y$, dan heeft men:

$$CA + AB = p - x, \quad CA - AB = y;$$



waaruit volgt:

$$CA = \frac{p-x+y}{2} \text{ en } AB = \frac{p-x-y}{2}.$$

Dewijl nu

$BC^2 = CA^2 + AB^2$ en $BC \times AD = AB \times CA$,

heeft men:

$$x^2 = \left(\frac{p-x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{p-x-y}{2}\right)^2 \text{ en}$$

$$ax = \left(\frac{p-x-y}{2}\right)\left(\frac{p-x+y}{2}\right),$$

of na ontwikkeling en vereeniging van termen:

$$x^2 = p^2 - 2px + y^2 \text{ en } 4ax - p^2 + 2px + y^2 = x^2.$$

Trekt men nu de beide laatst verkregen vergelijkingen van elkander af, dan vindt men:

$$2p^2 - 4(p+a)x = 0;$$

waaruit men vindt $x = \frac{p^2}{2(p+a)}$.

Wij willen dit vraagstuk thans nog op eene andere wijze oplossen. Daartoe stellen wij $BC = x$, $CA = y$, $AB = z$, $BD = u$ en $DC = v$, dan heeft men, dewijl de driehoeken ABC, DBA en DAC gelijkvormig zijn en de omtrekken van gelijkvormige driehoeken zich verhouden, als hunne gelijkstandige zijden:

$$DB + BA + AD : AB + BC + CA :: BA : BC;$$
$$DA + AC + CD : AB + BC + CA :: AC : BC;$$

d. i.:

$$u + z + a : p :: z : x;$$
$$a + y + v : p :: y : x;$$

Verder heeft men $p : p :: x : x$;

derhalve ook, volgens een paar bekende eigenschappen der evenredigheden:

$$u + z + a : z :: a + y + v : y :: p : x$$

of $p + 2a + u + v + y + z : x + y + z :: p : x$

$$2(p+a)x = p^2$$

$$x = \frac{p^2}{2(p+a)};$$

welk antwoord wederom hetzelfde is, als wij bij de vorige oplossing gevonden hebben. De constructie en discussie zijn zo gemakkelijk, dat wij die gerustelijk aan den lezer overlaten

14. *Iemand laat bij zijn sterven aan zijn eenigen zoon een aanzienlijk vermogen, onder bepaling, dat hij aan een petekind s gulden zal betalen, zoodra deze* 21 *jaren oud geworden is. Op den dag van het overlijden des testateurs,* 1 *April* 1847, *is het petekind juist* 11 *jaar. Dewijl het kind arm is en zijn voogd gaarne gelden in handen wilde hebben, om het eene behoorlijke opvoeding te geven, vraagt hij den erfgenaam, om hem reeds vroeger eenige gelden uit te betalen. De laatste is hiertoe bereid: hij wil in vier verschillende termijnen vooruit betalen, namelijk den eersten termijn a gulden, den tweeden b gulden, den derden c gulden, den vierden d gulden; deze termijnen zullen zoodanig bepaald worden, dat, wanneer hij 4p percent per jaar (eenvoudigen interest) berekent, op den 21sten geboortedag des petekinds, de voorgeschoten geldsommen, interesten en een overblijvend gedeelte e te zamen het legaat of s gulden vormen. Daar hierdoor de termijnen nog niet bepaald zijn, maakt de erfgenaam nog de volgende voorwaarden: op den eersten termijn zal hij f gulden leenen, die hem met den interest op den tweeden termijn terug betaald moeten worden en deze terugbetaling zal juist zooveel bedragen, als eene andere op den 21sten verjaardag, waardoor een kapitaal van g gulden met den interest, dat hij op den derden termijn uitleent, terug betaald kan worden. Verder wil hij hem op den eersten termijn h gulden leenen, welke som met de interesten eerst op den vijfden termijn terug betaald worden en hem dan zooveel zullen opleveren, dat hij een kapitaal, 't welk hij bij den vierden termijn heeft opgenomen, met den interest kan terugbetalen en nog m gulden overhouden, waarmede hij een schuld kan aflossen, die hij gemaakt heeft door bij den 2den, 3den en 4den termijn ieder maal l gulden op te nemen. Wanneer moeten de vier boven bedoelde termijnen uitgekeerd worden, als de interest overal tegen 4 $p^0/_0$ per jaar of $p^0/_0$ eenvoudigen interest per trimester berekend wordt?* (Bootz, *Arithm.*)

De vijfde termijn of de dag van uitkeering van het geheele legaat valt 10 jaren na den sterfdag des testateurs, de vier vroegere termijnen stellen wij voor door x, y, z, v trimesters voor den vervaldag.

De som a, die op den eersten termijn betaald wordt, zal dus

in x trimesters tegen $p^0/_0$ per trimester $\frac{apx}{100}$ gulden interest opleveren, de waarde van dat kapitaal zal den eersten April 1857 bedragen:

$$a + \frac{apx}{100} = a \times \frac{100 + px}{100} \text{ gulden.}$$

Door gelijke redeneering vindt men voor de overige sommen b, c en d eene waarde van

$$b \times \frac{100 + py}{100},\ c \times \frac{100 + pz}{100},\ d \times \frac{100 + pv}{100}.$$

Deze sommen, vermeerderd met het nog uit te betalen gedeelte e, leveren het geheele legaat, derhalve:

$$a \times \frac{100+px}{100} + b \times \frac{100+py}{100} + c \times \frac{100+pz}{100} +$$
$$+ d \times \frac{100+pv}{100} + e = s \ldots . \ (\alpha)$$

Van den eersten termijn tot den tweeden verloopen x—y trimesters; de f gulden krijgen dus in dat tijdsverloop eene waarde van:

$$f \frac{100+p(x-y)}{100};$$

tusschen den derden en vijfden termijn verloopen z trimesters, de waarde van g gulden is dus:

$$g \times \frac{100+pz}{100};$$

derhalve $f \times \frac{100+p(x-y)}{100} = g \times \frac{100+pz}{100} \ldots . \ (\beta)$

De h gulden hebben op den vijfden termijn eene waarde van $h \times \frac{100+px}{100}$; de k gulden krijgen eene waarde van $k \times \frac{100+pv}{100}$,

derhalve is $h \times \frac{100+px}{100} - k \times \frac{100+pv}{100} = m \ . \ . \ . \ (\gamma)$

Verder hebben l gulden, die hij bij den tweeden, bij den derden en bij den vierden termijn opneemt, achtereenvolgens eene waarde van

$$l \times \frac{100+py}{100},\ l \times \frac{100+pz}{100},\ l \times \frac{100+pv}{100},$$

zoodat men eindelijk heeft:

$$l\left\{\frac{100+py}{100}+\frac{100+pz}{100}+\frac{100+pv}{100}\right\}=m \quad \ldots\ldots (\delta)$$

Uit welke vier vergelijkingen (α), (β), (γ), (δ), de vier onbekenden gemakkelijk kunnen worden opgelost. — De verdere bewerking zij dan ook overgelaten aan den lezer.

15. Tot verdere oefening dienen nog de volgende

VRAAGSTUKKEN.

1. Men vraagt de waarde van x en y te berekenen uit de vergelijkingen:
$$\begin{cases} a(x+y)+b(y+2n)=bx+2am \\ a(x-y)+b(x-m)=n(2a+b+1)+y-m. \end{cases}$$
2. Men vraagt de waarden van x, y en z in de vergelijkingen;
$8x-3y+5z=-3$, $6x+5y-10z=21$, $10x-6y+15z=-2$.
3. Men vraagt de waarden te berekenen van x, y en z uit de volgende vergelijkingen: *)
$$\frac{6}{x}-\frac{10}{y}+\frac{21}{z}=3, \quad \frac{5}{x}+\frac{5}{y}-\frac{14}{z}=\frac{1}{2}, \quad \frac{21}{x}-\frac{15}{y}-\frac{7}{z}=3.$$
4. Men vraagt de waarden te berekenen van x, y en z uit de vergelijkingen:
$$\frac{2}{3x}+\frac{5}{2y}-\frac{5}{7z}=19, \quad \frac{5}{6x}+\frac{3}{10y}+\frac{1}{2z}=15, \quad \frac{1}{2x}-\frac{3}{5y}-\frac{3}{14z}=-6.$$
5. Drie personen spelen samen; bij 't eerste spel verliest de eerste speler aan elk der anderen zooveel, als zij bij zich hebben. Bij het tweede spel verliest de tweede speler aan elk der anderen zooveel, als zij hebben; bij 't derde spel verliest de derde speler aan elk der anderen zooveel, als ieder heeft. Indien nu ieder speler 24 gulden heeft hoeveel hadden zij dan primitief? (Euler.)
6. Drie ploegen werklieden moeten f 901 deelen. Krijgt ieder werkman van den eersten ploeg f 1, dan krijgen die der beide andere ploegen slechts f 0,50; geeft men aan iederen werkman van den tweeden ploeg f 1, dan krijgen de anderen

*) Men berekene in deze en soortgelijke vergelijkingen de omgekeerde waarde van de wortels.

slechts 33¼ cent; geeft men eindelijk *f* 1 aan elk werkman van den derden ploeg, dan krijgen de anderen slechts *f* 0,25. Hoe groot is elke ploeg? (EULER.)

7. Men vraagt, hoever vier plaatsen van elkander afliggen, indien men weet, dat de helft van den afstand van A naar C, vermeerderd met ¼ van den afstand van A naar D en met 31,4 myriameters de afstand is van A naar B; dat de afstand van A naar B, vermeerderd met de helft van den afstand van A naar D en 9,5 myriameters de afstand is van A naar C; dat de afstand van A naar C, verminderd met de helft van den afstand van A naar B en met 158,5 myriameters de afstand is van A naar D.
8. Eene kudde ossen van a stuks eten in c dagen al het gras eener weide, zoowel hetgeen er zich bevindt als datgene, wat er groeit, terwijl zij grazen. Eene andere kudde van d stuks eten in f dagen al het gras van eene andere weide. Hoeveel ossen eten in h dagen al het gras van eene derde weide, indien de eerste weide b, de tweede e en de derde g aren groot is?
9. Een watervat kan door drie kranen K_1, K_2 en K_3 gevuld worden en wel door K_1 en K_2 in a, door K_1 en K_3 in b, door K_2 en K_3 in c minuten. In hoeveel tijd is het vat vol, indien alle kranen open staan?
10. Vier getallen te vinden zoodanig, dat het eerste gelijk is aan de halve som der drie overige en een getal a te zamen genomen; het tweede gelijk aan a met een derde van de som der drie andere; het derde gelijk aan a met een vierde van de som der drie andere, het vierde gelijk a met een vijfde van de som der drie eerste getallen. (DE GELDER.)

ANTWOORDEN.

1. $x = m + n$, $y = m - n$. — 2. $x = 1$, $y = 7$, $z = 2$.
3. $x = 3$, $y = 5$ en $z = 7$. — 4. $x = \frac{1}{6}$, $y = \frac{1}{10}$, $z = \frac{1}{15}$.
5. A *f* 39, B *f* 21 en C *f* 12.
6. De eerste 265, de tweede 583 en de derde 689 man.
7. De afstand van A naar B is 523,8, van A naar C 646,1 en van A naar D 225,7 myriameters, enz.

8. Het aantal ossen bedraagt $\frac{aceg(f-h)+bdfg(h-c)}{beh(f-c)}$.

9. In $\frac{2abc}{ab+ac+bc}$ minuten.

10. De getallen zijn: $21a$, $16a$, $13a$, $11a$.

---

§ 8. Over de zuivere vergelijkingen van den eersten, tweeden, derden en vierden graad.

1. Door *zuivere vergelijkingen* verstaat men in het algemeen die vergelijkingen, waarin behalve bekende termen, slechts termen voorkomen, welke allen dezelfde macht éénér onbekende tot factor hebben. Zij zijn dus herleidbaar tot algemeene gedaante

$$Ax^n + B = 0, \text{ of } x^n + \frac{B}{A} = 0 \ldots\ldots (\alpha).$$

Hieruit volgt onmiddellijk $x^n = -\frac{B}{A}$ of $x = \sqrt[n]{-\frac{B}{A}}$, zoodat ééne waarde van x, die de vergelijking (α) gelijk aan 0 maakt, gevonden wordt door rechtstreeksche worteltrekking. — Aan de vergelijking (α) voldoen intusschen n waarden van x en om deze op te sporen, behoeft men den $\sqrt[n]{-\frac{B}{A}}$ slechts te vermenigvuldigen met de n n^{de}-machtswortels uit de eenheid; want is a een wortel van de vergelijking $x^n - P = 0$, dan zal $a\sqrt[n]{1}$ ook een wortel van die zelfde vergelijking zijn, 't geen bewezen wordt door eenvoudige substitutie. Dat verder de eenheid wezenlijk n n^{de}-machtswortels heeft, blijkt uit de vergelijking $x = \sqrt[n]{1}$; verheft men beide leden der vergelijking tot de n^{de}-macht, dan is $x^n = 1$, waarin x den n^{den}-machtswortel voorstelt uit 1. De laatste vergelijking herleidbaar zijnde tot $x^n - 1 = 0$ toont ons, dat er n waarden voor x aan de vergelijking voldoen, dat er dus n n^{de}-machtswortels uit de eenheid zijn. (Vergel. mijne *Theorie der Algem. Rek.* II. pag. 195.)

Het opsporen der $n$de-machtswortels uit de eenheid zal later op eene algemeene wijze behandeld worden; wij zullen hier slechts een paar eenvoudige gevallen behandelen, die voor het recht begrip van het volgende noodzakelijk zijn.

2. Aangezien de vergelijkingen van den eersten graad met eene onbekende na behoorlijke herleiding allen tot de zuivere vergelijkingen behooren, behoef ik daarover niet verder uit te wijden en kan dus dadelijk een begin maken met eene zuivere vergelijking van den 2den graad. Wij veronderstellen, dat zoodanige vergelijking $+1$ of -1 tot bekenden term heeft en dat de coëfficiënt van x de eenheid is. Hierdoor wordt de vergelijking niets minder algemeen: want indien $Ax^n - B = 0$, dan is ook $\frac{A}{B}x^n - 1 = 0$ en stelt men daarin $y = x\sqrt[n]{\frac{A}{B}}$, dan verandert de vergelijking in $y^n - 1 = 0$, waaruit men voor y eene der n $n$de-machtswortels der eenheid vindt.

Derhalve is $x = \frac{y}{\sqrt[n]{\frac{A}{B}}} = \frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{\frac{A}{B}}} = \sqrt[n]{\frac{B}{A}} \times \sqrt[n]{1}$.

3. a) Zij gegeven $x^2 - 1 = 0$, dan volgt daaruit:
$(x-1)(x+1)=0$, $x-1=0$, $x+1=0$, dus ook $x=1$ en $x=-1$.

b) Zij gegeven $x^2+1=0$, dan volgt daaruit:
$(x+\sqrt{-1})(x-\sqrt{-1}) = 0$, $x+\sqrt{-1}=0$ $x-\sqrt{-1}=0$,
dus ook $x=-\sqrt{-1}$ en $x=\sqrt{-1}$.

c) Zij gegeven $x^3+1=0$, dan volgt daaruit:
$(x+1)(x^2-x+1)=0$ of $(x+1)(x-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3})(x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3})=0$,
waaruit:
$$x=-1,\ x=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3},\ x=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}.$$

d) Zij gegeven $x^3-1=0$, dan volgt daaruit:
$(x-1)(x^2+x+1) = 0$ of $(x-1)(x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3})(x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3})$;
waaruit:
$$x=1,\ x=-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3},\ x=-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}.$$

e) Zij gegeven $x^4-1=0$, dan volgt daaruit:
$(x^2+1)(x^2-1)=0$ of $x^2+1=0$, $x^2-1=0$;
waaruit volgens b) en a) wordt afgeleid
$$x=\sqrt{-1},\ x=-\sqrt{-1},\ x=1,\ x=-1.$$

f) Zij gegeven $x^4+1=0$, dan volgt daaruit:

$$(x^2+\sqrt{-1})(x^2-\sqrt{-1})=0$$

of $(x-\sqrt{-1})(x+\sqrt{-1})(x-\sqrt{(-\sqrt{-1})})(x+\sqrt{(-\sqrt{-1})})=0$; waaruit wordt afgeleid:

$x=\sqrt{-1}$, $x=-\sqrt{-1}$, $x=\sqrt{(-\sqrt{-1})}$, $x=-\sqrt{(-\sqrt{-1})}$.

4. Het is gemakkelijk in te zien, dat men door middel van de gevonden wortels ook nog sommige zuivere vergelijkingen van hoogeren graad op zal kunnen lossen. Zoo heeft men $x^6-1=0$, waaruit men aanstonds vindt $(x^3-1)(x^3+1)=0$, waaraan dus alle wortels voldoen, die wij onder c) en d) hebben opgegeven; evenzeer kan men voor $x^6-1=0$ schrijven: $(x^4+1)(x^2-1)=0$, waardoor men aanstonds ziet, dat aan de laatste vergelijking alle wortels voldoen, die opgegeven zijn onder e) en f).

5. Een enkel voorbeeld moge ter toepassing dienen. Laat bijv. gevraagd worden de vier vierde-machtswortels uit 7. Om dezen te vinden, stellen wij $x^4=7$ of $x^4-7=0$. Hierin nemen wij $x\sqrt[4]{7}=y$ en vinden dan $y^4-1=0$, waaraan voldoen volgens 3, e) $y=\sqrt{-1}$, $y=-\sqrt{-1}$, $y=1$ $y=-1$. Verder is $x=y\sqrt[4]{7}$, derhalve vindt men voor de wortels der oorspronkelijke vergelijking:

$$x=\sqrt[4]{7},\ x=-\sqrt[4]{7},\ x=i\sqrt[4]{7},\ x=-i\sqrt[4]{7}.$$

Het is verder gemakkelijk in te zien, dat de vergelijking $x^n+P=0$ niets dan imaginaire wortels heeft, wanneer P positief en n even is; dat zij $n-1$ imaginaire wortels heeft, ingeval P positief en n oneven is; dat zij twee reëele wortels heeft, indien P negatief en n even is; dat zij een reëelen wortel heeft, indien P negatief en n oneven is. (Men verg. hiermede § 5, 20)

---

§ 9. Over de vergelijkingen van den tweeden graad met ééne onbekende.

1. Men brengt de vierkantsvergelijkingen of vergelijkingen van den tweeden graad met ééne onbekende, gewoonlijk tot de gedaante: $x^2+Px+Q=0$.

Is daarin nu $P=0$, dan wordt de vergelijking eene zuivere (zie de vorige §); is $Q=0$, dan heeft men $x^2+Px=0$, welke tot wortels heeft $x=0$ en $x=-P$, omdat na deeling door x, deze factor $=0$ gesteld moet worden en er nog overblijft $x+P=0$.

De vergelijking van den tweeden graad kan altijd tot de opgegeven gedaante herleid worden, want stellen wij, dat gevonden is de schijnbaar meer algemeene vergelijking $Ay^2+By+C=0$, dan volgt daaruit, na deeling door A $y^2+\frac{B}{A}y+\frac{C}{A}=0$ en na vermenigvuldiging met de reeks $1, A, A^2$ en verandering van y in x

$$x^2+Bx+CA=0$$

van welke vergelijking de wortels A-malen grooter zijn, dan van de opgegevene.

2. De vergelijking van den tweeden graad tot de algemeene gedaante herleid hebbende, brengen wij den bekenden term naar het tweede lid en vinden dus:

$$x^2+Px=-Q.$$

Telt men nu bij beide leden het vierkant van den halven coëfficiënt van x, dan vindt men:

$$x^2+Px+\tfrac{1}{4}P^2=\tfrac{1}{4}P^2-Q;$$

door deze toevoeging is het eerste lid een volkomen vierkant geworden, zoodat men door het trekken van den tweeden machtswortel uit de beide leden der vergelijking vindt:

$$\pm(x+\tfrac{1}{2}P)=\pm\sqrt{(\tfrac{1}{4}P^2-Q)}.$$

Indien men echter heeft $\pm x=\pm y$, dan kan daaruit afgeleid worden:

$$\left.\begin{matrix}+x=+y\\-x=-y\end{matrix}\right\} \text{ en } \left.\begin{matrix}+x=-y\\-x=+y\end{matrix}\right\},$$

welke vergelijkingen twee aan twee het zelfde beteekenen en wel:

$$+x=+y \quad \text{en} \quad +x=-y;$$

zoodat men voor $\pm x=\pm y$ even goed, zonder eenige algemeenheid aan de beteekenis te ontnemen, kan schrijven:

$$x=\pm y,$$

waaruit dan evenzeer volgt:

$$x+\tfrac{1}{2}P=\pm\sqrt{(\tfrac{1}{4}P^2-Q)},$$
$$\text{of } x=-\tfrac{1}{2}P\pm\sqrt{(\tfrac{1}{4}P^2-Q)};$$

waardoor de beide wortels der vergelijking $x^2 + Px + Q = 0$ namelijk $x = -\frac{1}{2}P + \sqrt{(\frac{1}{4}P^2 - Q)}$,
$x = -\frac{1}{2}P - \sqrt{(\frac{1}{4}P^2 - Q)}$
gevonden zijn.

Neemt men de som dezer wortels met het tegengestelde teeken, dan vindt men P; neemt men hun product met het eigen teeken, dan vindt men Q, juist zoo als in § 5, 15 bewezen is; terwijl daardoor nog ten overvloede wordt aangetoond, dat onze bewerking de ware wortels heeft doen vinden.

Volgens § 5, 9 zijn $x - (-\frac{1}{2}P + \sqrt{(\frac{1}{4}P^2 - Q)})$ en $x - (-\frac{1}{2}P - \sqrt{(\frac{1}{4}P^2 - Q)})$ factoren van $x^2 + Px + Q$; het polynomium slechts tot de tweede macht opklimmende, kan slechts twee factoren van den eersten graad hebben, bovendien slechts op ééne wijze in factoren ontbonden worden [§ 5, 11], derhalve is:

$$x^2 + Px + Q = \left[x - \left\{-\tfrac{1}{2}P + \sqrt{(\tfrac{1}{4}P^2 - Q)}\right\}\right] \times \left[x - \left\{-\tfrac{1}{2}P - \sqrt{(\tfrac{1}{4}P^2 - Q)}\right\}\right].$$

Wil men dus een trinomium, gerangschikt volgens de afdalende machten eener zelfde letter, in twee eerste-machtsfactoren ontbinden, dan stelt men het $= 0$; zoekt de wortels dier vergelijking en vermindert x met elk dier wortels in 't bijzonder.

3. Even gemakkelijk als men de wortels vindt van de vergelijking

$$x^2 + Px + Q = 0,$$

vindt men die ook, wanneer x^2 een anderen coëfficiënt heeft, dan de eenheid, d. i. m. a. w. van de vergelijking:

$$Ax^2 + Bx + C = 0.$$

Schrijft men daarvoor namelijk $Ax^2 + Bx = -C$ en merkt men daarbij op, dat de wortel uit den derden term van de tweede macht van eenig binomium gevonden wordt, door den halven coëfficiënt van den tweeden term te deelen door den wortel van den coëfficiënt van den eersten term, dan kan men van het eerste lid der laatste vergelijking een volkomen vierkant maken door bijvoeging van $\left(\frac{B}{2\sqrt{A}}\right)^2$.

Hierdoor vindt men achtereenvolgens:

$$Ax^2 + Bx + \left(\frac{B}{2\sqrt{A}}\right)^2 = \frac{B^2}{4A} - C,$$

$$x\sqrt{A} + \frac{B}{2\sqrt{A}} = \pm\sqrt{\frac{B^2-4AC}{4A}},$$

$$x\sqrt{A} = -\frac{B}{2\sqrt{A}} \pm \sqrt{\frac{B^2-4AC}{4A}},$$

d. i.

$$x = -\frac{B}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{(B^2-4AC)}.$$

Welk antwoord men ook zou verkrijgen door achtereenvolgens te schrijven:

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

$$x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A} = 0$$

$$x = -\frac{B}{2A} \pm \sqrt{\left(\frac{B^2}{4A^2} - \frac{C}{A}\right)} = -\frac{B}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{(B^2-4AC)}.$$

Deze beide wortels, zoowel als de wortels van de vergelijking $x^2 + Px + Q = 0$, kunnen zeer gemakkelijk in algemeene bewoordingen gebracht worden, en geven dan eene algemeene oplossing voor alle vierkantsvergelijkingen. Zoo vindt men om de uitkomst der laatste vergelijking in bewoordingen over te brengen, dat de wortel van eene volkomen vierkantsvergelijking gelijk is aan den coëfficiënt van den tweeden term, gedeeld door twee maal den coëfficiënt van den eersten term met het omgekeerde teeken vermeerderd of verminderd met den vierkantswortel uit het vierkant van het eerste quotiënt en daarbij gevoegd het quotiënt van den derden en eersten term met het omgekeerde teeken.

Zoo zal men vinden uit de vierkantsvergelijking

$$5x^2 - 4x + 7 = 0$$

$$x = \tfrac{2}{5} \pm \sqrt{\left(\frac{2^2}{5^2} - \frac{7}{5}\right)} = \tfrac{2}{5} \pm \tfrac{1}{5}\sqrt{(2^2 - 7 \times 5)}.$$

4. Er bestaat nog eene andere wijze, om eene vierkantsvergelijking van de gedaante

$$x^2 + Px + Q = 0$$

op te lossen.

Daartoe stelle men slechts $x = y - \frac{1}{2}P$, d. i. men neme voor

de onbekende eene nieuwe, daarbij gevoegd den halven coëfficiënt des tweeden terms met het omgekeerde teeken. Zoo doende vindt men:

$$\left.\begin{array}{r} y^2 - Py + \frac{1}{4}P^2 \\ + Py - \frac{1}{4}P^2 \\ + Q \end{array}\right\} = 0$$

$$y^2 - \frac{1}{4}P^2 + Q = 0$$

d. i. $y = \pm\sqrt{(\frac{1}{4}P^2 - Q)}$

of $x = y - \frac{1}{2}P = -\frac{1}{2}P \pm \sqrt{(\frac{1}{4}P^2 - Q)}$.

Even zoo neemt men in de vergelijking $x^2 - Px + Q = 0$

$$x = y + \tfrac{1}{2}P;$$

daardoor vindt men $y^2 - \frac{1}{4}P^2 + Q = 0$ of $y = \pm\sqrt{(\frac{1}{4}P^2 - Q)}$ of $x = y + \frac{1}{2}P = \frac{1}{2}P \pm \sqrt{(\frac{1}{4}P^2 - Q)}$.

5. Uit de vergelijking $x^2 + Px + Q = 0$ vonden wij

$$x = -\tfrac{1}{2}P \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}P^2 - Q)}.$$

Evenzoo volgt uit $x^2 - Px + Q = 0$ $\quad x = +\frac{1}{2}P \pm \sqrt{(\frac{1}{4}P^2 - Q)}$

uit $x^2 + Px - Q = 0$ $\quad x = -\frac{1}{2}P \pm \sqrt{(\frac{1}{4}P^2 + Q)}$

uit $x^2 - Px - Q = 0$ $\quad x = +\frac{1}{2}P \pm \sqrt{(\frac{1}{4}P^2 + Q)}$

waarin P en Q beschouwd worden positieve, reëele getallen te zijn. De eerste vergelijking, als hebbende enkel permanentiën, kan geen enkelen positieven wortel hebben. Is $Q > \frac{1}{4}P^2$, dan wordt $\sqrt{(\frac{1}{4}P^2 - Q)}$ imaginair, de vergelijking zal in dat geval twee geconjungeerde imaginaire wortels hebben; is $Q < \frac{1}{4}P^2$, dan zijn wel de wortels reëel maar zij kunnen irrationeel zijn; is $\frac{1}{4}P^2 = Q$, dan heeft de vergelijking twee gelijke wortels $\frac{1}{2}P$. — Tot voorbeeld van het laatste geval strekke de vergelijking $x^2 + 2Bx + B^2 = 0$,

waarin $x = -B \pm \sqrt{(B^2 - B^2)} = -B \pm 0$;

door ontbinding vindt men $(x + B)(x + B) = 0$, waarin de factor twee malen gelijk gesteld wordende aan 0, ook tweemalen den wortel $x = -\frac{1}{2}(2B)$ oplevert.

De tweede vergelijking heeft twee variatiën en geene permanentie, zij kan dus ook geene negatieve wortels hebben, wel twee positieve. De veronderstellingen $\frac{1}{4}P^2 > Q$, $\frac{1}{4}P^2 < Q$, $\frac{1}{4}P^2 = Q$ geven dezelfde resultaten, als in de vorige vergelijking.

De derde en vierde vergelijking hebben beide ééne variatie en ééne permanentie, dus ook één positieven en één negatieven

wortel. Overigens zijn beide wortels reëel (ofschoon zij irrationeel kunnen zijn) omdat $\sqrt{(\frac{1}{4}P^2 + Q)}$ steeds reëel is. Zulks volgt ook uit § 5, 5, dewijl de vierkantsvergelijking eene vergelijking is van evenen graad, waarvan de laatste term het teeken — voor zich heeft.

6. Van de vierkantsvergelijkingen bestaat eene zuiver meetkundige oplossing. Het is niet van belang ontbloot, zich deze oplossing eigen te maken, omdat men daardoor eene voorstelling krijgt van de wortels van zoodanige vergelijking.

Men vraagt door constructie de wortels te vinden van de vergelijkingen

$$x^2 - Px + Q = 0 \quad \text{en}$$
$$x^2 + Px - Q = 0.$$

a) Constructie van de wortels der vergelijking $x^2 - P + Q = 0$. Voor de mogelijkheid der constructie stellen wij $Q = Ql$, waarin l de eenheid is, waarin P en Q zijn uitgedrukt. Trek nu twee lijnen, die elkaâr in A ontmoeten en een willekeurigen hoek met elkander maken. Neem in dezelfde richting op het eene been $AB = l$ en $AC = Q$ en op het andere been $AD = P$. Vervolgens deele men BC midden door in E en AD en F, trekke de normalen EO en FO, die elkander altijd zullen snijden, en met $OC = OB$, als straal den cirkelomtrek, die de lijn AD in de punten G en H snijdt, dan zijn AG en AH de wortels van de opgegeven vergelijking. Men heeft namelijk $AG + AH = P =$ dén coëfficiënt des tweeden terms met het tegengestelde teeken en $AG \times AH = AB \times AC = Ql$.

Wanneer de cirkelomtrek de lijn AD raakt, dan heeft de vergelijking twee gelijke wortels; wordt de lijn AD door den cirkelomtrek noch gesneden, noch geraakt, dan zijn de beide wortels der vergelijking imaginair.

b) Door constructie de wortels te vinden van de vergelijking $x^2 + Px - Q = 0$. Hierin nemen wij wederom Ql in de plaats van Q.

Men trekke door het punt A twee lijnen, die elkander onder een willekeurigen hoek snijden; men neme op de eene lijn $AB = l$ en in tegengestelde richting $AC = Q$, vervolgens make men op het andere been $AD = P$, deele BC en AD rechthoekig midden door en trekke uit het snijpunt der normalen O, met OC als straal,

een cirkelomtrek, die de lijn AD in de punten H en G snijdt, dan is AG de positieve en AH de negatieve wortel der vergelijking; want stelt men $AG=x$, dan is $AH=-(P+x)$, verder is $AC=Q$ en $AB=-l$; derhalve heeft men volgens Eucl. III: XXIII: $AB \times AC = AG \times AH$ of $Q \times -l = -x\ (P+x)$ d. i.

$$x^2 + Px - Ql = 0 \text{ of } x^2 + Px - Q = 0.$$

Deze constructie blijft altijd mogelijk; de vergelijking kan dus geene imaginaire wortels hebben.

Het vinden van de wortels van de vergelijkingen $x^2 - Px - Q = 0$ en $x^2 + Px + Q = 0$ door constructie, laten wij nu verder aan den lezer.

7. Er zijn vergelijkingen met ééne onbekende, die ofschoon van eenen hoogeren graad, dan de vierkantsvergelijkingen, door eene gemakkelijke bewerking tot vierkantsvergelijkingen met eene onbekende herleid kunnen worden. Zij zijn begrepen in de algemeene gedaante

$$x^{2n} + Px^n + Q = 0,$$

waarin n een willekeurig getal voorstelt.

Om de wortels van zoodanige vergelijkingen te vinden, stelt men $x^n = y$, waardoor men vindt $x = \sqrt[n]{y}$ en $y^2 + Py + Q = 0$.

Uit de laatste vergelijking heeft men verder

$$y = -\tfrac{1}{2}P \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}P^2 - Q)},\ x = \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{\left\{-\tfrac{1}{2}P \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}P^2 - Q)}\right\}},$$

vermenigvuldigd met de n verschillende $n$de-machtswortels uit de eenheid.

Tot toepassing diene het volgende voorbeeld:

$$3x^6 + 42x^3 - 3321 = 0.$$

In deze vergelijking stelle men $x^3 = y$, waardoor $x = \sqrt[3]{y}$ en

$$3y^2 + 42y - 3321 = 0,$$
$$y^2 + 14y - 1107 = 0,$$
$$y = -7 \pm \sqrt{1156} = +27 \text{ of } -41;$$

derhalve heeft men:

$$x^3 - 27 = 0 \quad \text{en} \quad x^3 + 41 = 0.$$

Aan de eerste vergelijking voldoen voor x de waarden

$$3,\ 3(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}) \text{ en } 3(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-3});$$

aan de tweede vergelijking voldoen voor x de waarden

$$-\sqrt[3]{41},\ (-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-3})\sqrt[3]{41} \text{ en } (-\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-3})\sqrt[3]{41}.$$

Van deze waarden zijn er vier imaginair, 't geen ook door de ontbrekende termen tusschen $3x^6$ en $42x^3$, alsmede tusschen $42x^3$ en -3321 wordt aangewezen. Verder kan er hoogstens één positieve en hoogstens één negatieve wortel zijn, aangezien er in de opgegeven vergelijking slechts ééne permanentie en ook maar ééne variatie is.

8. De vierkantsvergelijkingen met twee of meer onbekenden, behoeven nu verder geene afzonderlijke behandeling. Men lost namelijk eene onbekende uit eene der vergelijkingen op, substitueert de daarvoor gevondene waarden in de andere vergelijkingen en verkrijgt daardoor vergelijkingen, waarin eene onbekende minder voorkomt en waarvan het aantal ook een minder is, dan van de opgegevene vergelijkingen. Door nu wederom hieruit eene tweede onbekende op te lossen en op dergelijke wijze te blijven handelen, zal men dè waarden der verschillende onbekenden leeren vinden. — Ik acht het niet noodig hiervan afzonderlijke voorbeelden op te geven. Bij de oplossing van vraagstukken zullen wij alle gelegenheid hebben deze wenken verder toe te passen. Ter toepassing strekken nog de volgende

VRAAGSTUKKEN.

Men vraagt naar de waarden van x in de vergelijkingen:

1. $\frac{7x-14}{3} = \frac{2x^2-1}{x+2}$.
2. $\frac{5x^2}{16} - \frac{x^2}{4} + 3 + \frac{3x^2}{8} = \frac{3x^2}{16}$.
3. $\frac{1}{3}x^2 - 4 + \frac{3}{4}x^2 = \frac{1}{3} - 2x^2 + \frac{1}{3}$.
4. $\frac{a^2x^2}{(b-1)^2} + \frac{x^2}{b-1} - 1 = \frac{bx^2}{b-1} - x^2$.
5. $4 = \sqrt{(x^2-9)}$.
6. $x = \sqrt{\{x^2+\sqrt{(x^2-a^2)}\}}$.
7. $\sqrt{(2+x)} + \sqrt{x} = \frac{4}{\sqrt{(2+x)}}$.
8. $\sqrt{(x+4)} = 4 - \sqrt{x}$.
9. $9x^2-24x+16=19$.
10. $\sqrt{(2x+7)}+\sqrt{(3x-18)}=\sqrt{(7x+1)}$.
11. $x^2 - 2ax + cx + bx = ab + ac - a^2 - bc$.
12. $\frac{ax}{(a-b)^2} + \frac{a+b}{a-b} = \frac{1}{a-b} + \frac{a+b}{ax}$.
13. $x^4 + 7x^2 = -13$.
14. $\frac{1}{4}x^4 - 4x^2 = -9$.

ANTWOORDEN.

1. $x=\pm 5$. 2. $x=\pm\sqrt{-12}$. 3. $x=\pm\sqrt{\frac{3}{16}}$.

4. $x=\pm\frac{b-1}{a}$. 5. $x=\pm 5$. 6. $x=\pm a$. 7. $x=\frac{1}{2}$.

8. $x=\frac{1}{4}$. 9. $x=\frac{4\pm\sqrt{19}}{3}$. 10. $x=9$.

11. $x=a-b$ en $x_1=a-c$. 12. $x=\frac{a-b}{a}$, $x_1=-\frac{a^2-b^2}{a}$.

13. $x_1=\sqrt{\frac{-7+\sqrt{-3}}{2}}$, $x_2=\sqrt{\frac{-7-\sqrt{3}}{2}}$, $x_3=-\sqrt{\frac{-7+\sqrt{3}}{2}}$,

$$x_4=-\sqrt{\frac{-7-\sqrt{-3}}{2}}.$$

14. $x_1=\sqrt{\{4+\sqrt{-2}\}}$, $x_2=\sqrt{\{4-\sqrt{-2}\}}$, $x_3=-\sqrt{\{4+\sqrt{-2}\}}$,

$$x_4=-\sqrt{\{4-\sqrt{-2}\}}.$$

---

§ 10. Over de oneindig kleinen en oneindig grooten. Over de beteekenis van het teeken $\frac{0}{0}$.

1. Door *oneindig klein getal* of *oneindig kleine grootheid* verstaat men een veranderlijk getal of eene veranderlijke grootheid, die meer en meer tot eene *grens* (*limiet*) 0 nadert, zonder die ooit geheel te kunnen bereiken.

Wanneer men verschillende oneindig kleinen beschouwt, neemt men eene oneindig kleine aan als oneindig kleine der 1ste orde, dan zijn:

oneindig kleinen van de zelfde orde zij, wier verhouding tot de eerste, ingeval beiden tot 0 naderen, eene eindige limiet heeft.

Oneindig kleinen van de tweede orde zij, wier verhouding tot het vierkant eener oneindig kleine van de eerste orde, ingeval beiden 0 naderen, eene eindige limiet heeft.

Oneindig kleinen van de $n$de orde zij, wier verhouding tot de $n$de macht eener oneindig kleine van de eerste orde, ingeval beiden 0 naderen, eene eindige limiet heeft.

2. Door *oneindig groot getal* of *oneindig groote grootheid*, verstaat men een veranderlijk getal of eene veranderlijke grootheid, die voortdurend toeneemt, wier grenzen eindelijk zoo ver van elkander verwijderd zijn, dat men ze niet meer aan kan wijzen.

Wanneer men verschillende oneindig grooten beschouwt, dan neemt men er eene als oneindig groote van de eerste orde aan, dan zijn oneindig grooten van de zelfde orde zij, wier verhouding tot de eerste, in geval beiden steeds toenemen, een eindig getal is.

enz. enz.

Oneindig grooten van de $n$de orde zij, wier verhouding tot de $n$de macht eener oneindig groote van de eerste orde, in geval beiden steeds toenemen, een eindig getal zij.

Aanmerking. De woorden *oneindig groot* en *oneindig klein* worden meestal in betrekkelijken zin gerekend. Zij komen in de wiskunde slechts voor in de absolute beteekenis van: *Zoo groot*, dat het onze bevatting te boven gaat, dat wij geene idée hebben van de grootte van eenig voorwerp; *zoo klein*, dat het geheel aan onze zintuigen ontsnapt; of in de relatieve beteekenis: *onmeetbaar groot*, *onmeetbaar klein in vergelijking met.* Iets *oneindig groot* of *oneindig klein* noemen, is een gevolg van de beperktheid onzer zintuigen. Absoluut oneindig groot en daarom ons begrip te boven gaande, zijn slechts *God*, *de eeuwigheid* en *het heelal;* absoluut oneindig kleinen bestaan wel voor de rede, niet voor de zintuigen. — De kamer, waarin men werkt, is *oneindig groot* ten opzichte van een stofje, dat in het zonlicht danst, zij is *oneindig klein* in betrekking tot de geheele aarde. — In de verklaarde beteekenis zullen wij verder de woorden *oneindig groot* en *oneindig klein* blijven gebruiken.

3. Wanneer a en a_1 twee oneindig kleinen of twee oneindig grooten van dezelfde orde zijn, dan volgt uit onze bepalingen, dat $\frac{a}{a_1} = m$, waarin m een eindig getal is. Hieruit volgt weder, dat $a = a_1 m$, of in woorden:

Het product van eene oneindig kleine (van eene oneindig groote)

en een eindig getal, levert wederom eene oneindig kleine (oneindig groote) op van dezelfde orde.

Nog volgt uit $\frac{a}{a_1} = m$, dat ook $\frac{a}{m} = a_1$, of in woorden:

Het quotiënt van een oneindig kleine (oneindig groote) en een eindig getal, levert wederom eene oneindig kleine (oneindig groote) van dezelfde orde.

4. Stelling. *Het quotiënt van eene eindige en eene oneindig kleine, levert een oneindig groote; het quotiënt van eene eindige door eene oneindig groote, levert eene oneindig kleine.*

Bewijs. Zij m eene standvastige, x eene veranderlijke grootheid, dan zal, zoolang x eindig blijft, het quotiënt $\frac{m}{x}$ een eindig getal opleveren. Maar indien x voortdurend afneemt, en daardoor meer en meer tot 0 nadert, zonder ooit 0 te worden, zal het quotiënt hoe langer hoe grooter worden en eenmaal geheel buiten het bereik van onze bevatting komen; alsdan noemen wij het oneindig groot en stellen het voor door ∞.

Nemen wij namelijk in $\frac{m}{x}$ achtereenvolgens $x = 0{,}1$, $0{,}01$, $0{,}001$, $0{,}0001$, $0{,}00001$, ... $0{,}0000000000001$ ....., dan neemt de waarde van het gebroken voortdurend toe en kan voorgesteld worden door $10m$, $100m$, $1000m$, $10000n$, $100000m$ ..... $10000000000000m$ .....

Laten wij x nog meer tot hare limiet 0 naderen, dan zal het gebroken steeds eene grootere waarde krijgen; eene waarde zoo groot, dat wij haar niet meer bevatten, niet meer aanschouwelijk voor kunnen stellen en daarom schrijven:

$$\text{lim.}\ \frac{m}{x}\ (\text{voor}\ x = 0) = \infty.$$

Daaruit volgt onmiddellijk $m = x \times \infty$, d. i. *een oneindig klein getal, vermenigvuldigd met eene oneindig groote, kan zeer goed een eindig getal opleveren.*

Heeft men wederom het gebroken $\frac{m}{x}$ en wordt x hoe langer hoe grooter, dan zal de waarde van het gebroken steeds afne-

men; wordt x eindelijk zoo groot, dat wij hare grenzen niet meer aan kunnen geven, dan zal de waarde van het gebroken zoo gering geworden zijn, dat wij het onderscheid tusschen die waarde en 0 ook niet meer aan kunnen geven:

$\text{Lim}\ \frac{m}{x}\ (\text{voor}\ x = \infty) = \delta$; het is door dit teeken, dat wij de oneindig kleinen voortaan zullen voorstellen.

Neemt men namelijk in $\frac{m}{x}$ achtereenvolgens $x = 10$, 100, 1000, 10000, ... dan zal de waarde van het gebroken successievelijk worden $0{,}1m$, $0{,}01m$, $0{,}001m$, $0{,}0001m$, enz. neemt men dus x grooter, dan het grootste getal, dat men zich voor kan stellen, dan zal de waarde van de breuk minder van 0 verschillen, dan het kleinste getal, dat men zich verbeelden kan. Men heeft dus: $\text{lim.}\ \frac{m}{x}\ (\text{voor}\ x = \infty) = 0$.

Schrijft men dus $\frac{m}{x} = \delta$, dan is ook $\frac{\frac{m}{\delta}}{x} = 1$;

$\frac{m}{\delta}$ is dan eene oneindig groote van de zelfde orde als x.

5. Wij zullen de bovenstaande uitdrukkingen door een paar voorbeelden nog ophelderen.

Men vraagt, hoeveel kan wijn van a cents de kan men moet voegen bij b kannen wijn van c cents de kan, om te krijgen wijn van c cents de kan.

Stel, dat men daarbij moet voegen x kannen wijn van a cents de kan, dan heeft men voor a x centen; b kannen wijn van c cents de kan vertegenwoordigen b c cents. Men heeft dus dat $x + b$ kannen wijn van c cents de kan, volgens de voorwaarden des vraagstuks, te zamen $ax + bc$ centen kosten; derhalve is:

$$(x + b) \times c = ax + bc.$$
$$xc + bc - ax = + bc.$$
$$x(c - a) = 0.$$
$$x = \frac{0}{c - a} = 0.$$

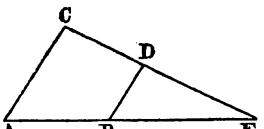
't Geen ook duidelijk sprak uit den aard des vraagstuks.

Verandert men in het bovenstaande vraagstuk de vraag slechts zoover, dat het laatste gedeelte luidt: *om te krijgen wijn van a cents de kan*, dan verandert de oplossing in:

$$(x + b)\,a = ax + bc$$
$$\text{of } a_x - a_y = bc - ab$$
$$x = \frac{bc-ab}{a-a} = \frac{bc-ab}{0} = \infty.$$

Het is ook duidelijk, dat men door bijvoeging van wijn van a cents, nooit wijn van a cents kan bekomen; maar dat door herhaalde toevoeging van zoodanigen wijn bij eene bepaalde hoeveelheid wijns van c cents, deze laatste eindelijk van geen invloed meer zal kunnen zijn op den prijs van a cents.

6. *Wanneer op eene onbepaalde rechte op een afstand* $= d$ *twee punten A en B worden aangenomen en daardoor twee lijnen getrokken, die evenwijdig aan elkander loopen en men op ieder daarvan een punt neemt zoodanig, dat* $AC = a$ *en* $BD = a_1$ *is, dan vraagt men op welken afstand van A de lijn CD, die de beide laatste punten vereenigt, de eerste lijn snijden zal.*



Stellen wij $AE = x$, dan is $BE = x-d$ en men heeft uit de gelijkvormige driehoeken AEC en BED. (Eucl VI. 4.)

$$AE : BE :: AC : BD,$$
$$\text{of } x : x-d :: a : a_1$$
$$\text{of ook } d : a-a_1 :: x : a;$$
$$\text{waaruit } x = \frac{ad}{a-a_1}.$$

Wordt in deze formule $a-a_1 = 0$ d. i. $a=a_1$, dan wordt x oneindig groot. E ligt alsdan op een oneindig verren afstand van A; de lijn CD kan dus AB nooit snijden en loopt derhalve daaraan evenwijdig; want door de waarde van $a-a_1 = v$ langzamerhand te doen afnemen, wordt het verschil der beide lijnen kleiner en het punt E verplaatst zich op de lijn AB verder en verder van A. Neemt men eindelijk het verschil tusschen de lijnen AC en $BD = \delta$, dan ligt E op een oneindig verren afstand: de lijnen AE en CE, elkander op een oneindig verren afstand snijdende, snijden elkander nooit.

Aanmerking. Over de theorie der oneindig grooten en

oneindig kleinen, dien machtigen hefboom in de hoogere wiskunde, welke wij voornamelijk te danken hebben aan LEIBNITZ, HUYGHENS, NEWTON, BERNOUILLI, MAC LAURIN e. a., vindt men behalve allerbelangrijkste opmerkingen in de werken dier schrijvers zelven, zeer gewichtige opmerkingen in de *Analyse des infiniment petits par le marquis* DE L'HOSPITAL 1716; in de *Calcul diff. et intégral par* J. BERTRAND; en ook in BADON GHYBEN'S *diff. en integr. rekening.*

7. Wanneer in de vergelijking $ax = b$ of $x = \frac{b}{a}$, b en a beide door *twee afzonderlijke veronderstellingen* 0 worden en dus x gelijk wordt aan $\frac{0}{0}$, kan men er zeker van zijn, dat het vraagstuk, waaruit deze waarde van x voortvloeit, *onbepaald* is, d. i. een zeer groot aantal oplossingen toelaat. Want de vergelijking wordt $0.x = 0.$

en men ziet ten duidelijkste, dat elke waarde, die men aan x geeft, het eerste lid gelijk aan 0 maakt, d. i. gelijk aan het tweede.

Wordt bijv. gevraagd een getal te vinden zoodanig, *dat het* $\frac{1}{11}$ *gedeelte van dat getal, vermeerderd met* 9 *eenheden, gelijk zij aan het* $\frac{1}{4}$ *gedeelte van de som van dat getal en* 12, *daarbij gevoegd de* $\frac{1}{6}$ *gedeelten van het oorspronkelijke getal*, dan vindt men, door dit getal $= x$ te stellen:

$$\frac{1}{11}x + 9 = \frac{1}{4}(x + 12) + \frac{1}{6}x.$$

of $$17x + 108 - (9x + 108 + 8x) = 0$$

$$0.x = 0$$

$$x = \frac{0}{0}$$

x blijft dus geheel onbepaald, d. w. z.: de gevraagde eigenschap heeft plaats voor alle mogelijke getallen.

8. Zoo even hebben wij opgemerkt, dat het vraagstuk onbepaald werd, wanneer twee afzonderlijke veronderstellingen a en b te gelijk 0 maakten; zulks is volstrekt niet het geval, wanneer eene enkele veronderstelling a en b gelijk aan 0 maakt.

Heeft men bijv. uit de eene of andere vergelijking gevonden

$$x = \frac{m^2 - 4}{2m^2 - 3m - 2},$$

en stelt men daarin $m = 2$, dan vindt men $x = \frac{4}{3}$. Hieruit blijkt dus, dat de vergelijkingen $m^2-4=0$ en $2m^2-3m-2=0$ één wortel $m=2$ hebben en dus door $m-2$ deelbaar zijn. Deelt men teller en noemer van de breuk door $m-2$, dus door den factor, die aan x eene onbepaalde waarde gaf, dan vindt men, $z = \frac{m+2}{2m+1} \times \frac{m-2}{m-2}$. Hoe dicht m nu bij 2 nadert, altijd blijft, ware het verschil ook $= \delta$, $\frac{m-2}{m-2} = 1$, derhalve wordt $z = \frac{m+2}{2m+1}$ en voor $m = 2$ heeft men $x = \frac{4}{5}$.

9. *Men vraagt de waarde van* $y = \frac{ax^2-2acx+ac^2}{bx^2-2bcx+bc^2}$, *wanneer* $x = c$ *is.*

Substitueert men $x = c$, dan vindt men voor de waarde van de breuk $y = \frac{0}{0}$; teller en noemer zijn dus deelbaar door $x-c$, en men vindt $y = \frac{ax-ac}{bx-bc}$. Hierin wederom $x = c$ substituerende, vindt men nogmaals $\frac{0}{0}$, derhalve nog eens door $x-c$ delende, komt er $y = \frac{a}{b}$ als waarde der opgegeven breuk voor $x = c$. Men had ook kunnen schrijven

$$y = \frac{ax^2-2acx+ac^2}{bx^2-2bcx+bc^2} = \frac{a(x^2-2cx+c^2)}{b(x^2-2cx+c^2)} = \frac{a}{b}.$$

10. *Men vraagt de waarden van* $y = \frac{x^3+2x^2-x-2}{x^3-1}$ *voor* $x = 1$.

$x = 1$ in den opgegeven vorm substitueerende vindt men $\frac{0}{0}$; beide vormen kunnen dus door $x-1$ gedeeld worden. Om dit gemakkelijk te verrichten schrijft men

$$= \frac{x^2(x+2)-(x+2)}{x^3-1} = \frac{(x^2-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{(x+1)(x+2)}{x^2+x+1} = \frac{6}{3} = 2.$$

11. *Welke is de waarde van* $\frac{1-x^n}{1-x}$ *voor* $x = 1$?

Stelt men $x = 1$, dan vindt men $\frac{0}{0}$. Teller en noemer kunnen nu door $x-1$ gedeeld worden, hierdoor vindt men

$$\frac{1-x^n}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots\ldots x^{n-3} + x^{n-2} + x^{n-1}.$$

Het aantal termen bedraagt n, elke term is gelijk aan 1, derhalve heeft men: $\frac{1-x^n}{1-x} = n$.

12. *Welke is de waarde van* $y = \frac{x^n}{1+x^2} \times \frac{1-x^n}{1-x^2}$ *voor* $x = 1$.

De waarde van den eersten factor is gelijk $\frac{1}{2}$. De tweede factor wordt $\frac{0}{0}$ voor $x = 1$, derhalve deelen wij teller en noemer door $1-x$ en vinden alsdan voor zijne waarde $\frac{n}{p}$. Door vermenigvuldiging vinden wij derhalve $y = \frac{n}{2p}$.

13. Wanneer in de vergelijking $ax = b$ of $x = \frac{b}{a}$ beiden a en b ten gevolge van twee afzonderlijke veronderstellingen ∞ worden, dan is het vraagstuk onbepaald. Inderdaad heeft men in dat geval

$$\infty \times x = \infty,$$

waarin men voor x alle mogelijke eindige waarden nemen kan.

Worden echter ten gevolge eener veronderstelling a en $b = \infty$, dan mag daaruit niet meer rechtstreeks tot de onbepaaldheid van eenig vraagstuk besloten worden. De wijze, om de juiste waarde van eenigen vorm in dat geval te berekenen, komt na eene kleine herleiding, neder op het reeds behandelde, want

$$x = \frac{a}{b} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}} = \frac{\delta}{\delta} = \frac{0}{0};$$

voor $x = \frac{a}{b}$ kan men ook nog schrijven $a \times \frac{1}{b} = \infty \times \frac{1}{\infty} = \infty \times \delta = \infty \times 0$.

Derhalve zijn $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ en $\infty \times 0$ teekens en schrijfwijzen van gelijke beteekenis.

14. *Welke is de waarde van* $\frac{x:n}{x-n}\left(\frac{x}{\frac{x-n}{x:(x-n-1)}}\right)^n$, *wanneer* $n = \infty$ *genomen wordt?*

Schrijft men voor den opgegeven vorm achtereenvolgens:

$$\frac{1}{n} \times \frac{x}{x-n} \times \left(\frac{x}{x-n}\right)^n \times \left(\frac{x-n-1}{x}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{n} \times \frac{\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}-1} \times \left(\frac{\frac{x}{n}-1-\frac{1}{n}}{\frac{x}{n}-1}\right)^n$$

en merkt men dan op, dat $\frac{1}{n}=0$, $\frac{x}{n}=0$, indien x namelijk eene eindige waarde voorstelt, dan gaat het laatste product over in

$$0 \times \frac{0}{-1} \times 1^n = 0.$$

Wanneer dus n meer en meer toeneemt, zal de waarde van den opgegeven vorm meer en meer afnemen en eindelijk minder van 0 verschillen, dan de kleinst mogelijke waarde, die men zich voor kan stellen.

15. *Welke is de waarde van* $\frac{2n-1}{2n+1}\left(\frac{2n-2}{2n-1}\right)^2$ *voor* $n=\infty$?

Voor den opgegeven vorm kan men onmiddellijk schrijven:

$$\frac{2-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} \times \left(\frac{2-\frac{2}{n}}{2-\frac{1}{n}}\right)^2 = 1 \times 1^2 = 1.$$

Hoe grooter dus n wordt, hoe meer de waarde van den opgegeven vorm nadert tot de limiet 1.

16. Ter toepassing van hetgeen in deze § behandeld is, strekken nog de volgende

VRAAGSTUKKEN.

Welke is de waarde van

1. $\frac{x^3-3x+2}{x^4-6x^2+8x-3}$ voor $x=1$;

2. $\frac{a-(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{x^2}$ voor $x=0$;

3. $\frac{x^2-a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{ax}-a}$ voor $x=a$;

4. $\frac{x^3-a^2x-ax^2+a^3}{x^2-a^2}$ voor $x=a$;

5. $\frac{x^2-2x}{x^4-2x^3-8x+16}$ voor $x=2$;

6. $\frac{(x-a)^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}}{(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}$ voor $x=a$?

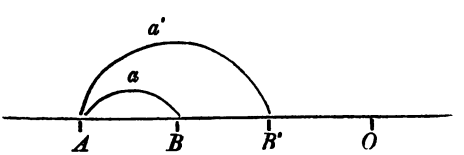
ANTWOORDEN.

De waarde der vormen voorstellende door u, vindt men:
1. $u=\infty$. 2. $u=\frac{1}{4}a$. 3. $u=3a$. 4. $u=0$.
5. $u=\infty$. 6. $u=(2a)^{-\frac{1}{2}}$

---

§ 11. Oplossing van eenige vraagstukken en bespreking van de verschillende uitkomsten.

1. *Twee lichamen bewegen zich in dezelfde richting langs eene zelfde rechte, met eene snelheid van v en v' ellen in de minuut. Het eene lichaam B bevindt zich in B, het andere B' in B', respectievelijk op a en a' ellen afstands van een standvastig punt A. Men vraagt naar den tijd, die er verloopen moet, alvorens zij elkander ontmoeten in het punt O en hoever dit punt van A gelegen is.*



Stellen wij $AO=x$ en den tijd, dien de lichamen noodig hebben om het punt O te bereiken, gelijk aan t minuten, dan zal het lichaam B, dat v ellen in de minuut aflegt, tv ellen afleggen eer het te O aangekomen is, maar van A naar B is een afstand van a ellen, derhalve:

$AO=AB+BO$ of $x=a+tv$ . . . . . (

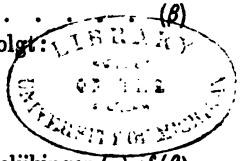
Op gelijke wijze vinden wij, omdat B' in de minuut v' ellen aflegt en ook t minuten loopt, alvorens te O te zijn:

$$AO = AB' + B'O \text{ of } x = a' + tv' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

Waaruit door aftrekking van (α) en (β) volgt:

$$0 = a - a' + t(v - v')$$

$$\text{of} \qquad t = \frac{a' - a}{v - v'}.$$



Deze waarde van t overbrengende in de vergelijkingen (α) of (β) vindt men:

$$x = a + v\,\frac{a' - a}{v - v'} = \frac{av - av' + a'v - av}{v - v'} = \frac{a'v - av'}{v - v'}.$$

De waarden van x en t gevonden zijnde, is het vraagstuk opgelost.

Bij deze waarden van x en t komen al aanstonds drie gevallen voor: de noemer van de beide gebrokens kan zijn positief, nul of negatief, d. i.: $v > v'$, $v = v'$ en $v < v'$

Deze drie gevallen kunnen wederom verdeeld worden in andere, naar gelang $a' > a$, $a' = a$, $a' < a$.

Men heeft dus al aanstonds negen gevallen te beschouwen, waarvan nog eenige eene onderverdeeling toelaten, omdat daarbij nog gelet moet worden op het teeken, dat de teller $a'v - av'$ in de beide veronderstellingen aanneemt. Is namelijk $v > v'$ en $a' < a$ of $v < v'$ en $a' > a$, dan kan daardoor het teeken van den teller nog niet bepaald worden.

Wij hebben dus de volgende dertien gevallen te beschouwen:

$$\begin{array}{lll}
v > v' & a' > a & va' > av' \\
 & a' = a & va' > av' \\
 & a' < a & \begin{cases} va' > av' \\ va' = av' \\ va' < av' \end{cases} \qquad x = \dfrac{va' - av'}{v - v'} \\
v = v' & \begin{cases} a' > a \\ a' = a \\ a' < a \end{cases} & \begin{cases} va' > av' \\ va' = av' \\ va' < av' \end{cases} \qquad t = \dfrac{a' - a}{v - v'} \\
v < v' & \begin{cases} a' < a \\ a' = a \end{cases} & \begin{cases} va' < av' \\ va' < av' \end{cases} \\
 & a' > a & \begin{cases} va' < av' \\ va' = av' \\ va' > av' \end{cases}
\end{array}$$

1e Geval. $v > v'$, $a' > a$, $va' > av'$.

De formules, voor x en t gevonden, geven in deze veronderstelling positieve waarden, omdat hare tellers en noemers positief zijn. Wij vinden dus hier eene oplossing in den zin, zooals het vraagstuk is opgegeven, d. i. ontmoeting der beide lichamen rechts van A. Zoodanige uitkomst was ook te voorzien. Dewijl $v > v'$ en $a' > a$, is het lichaam, dat de grootste snelheid heeft, achter, het wint elk oogenblik op het voorste, de afstand vermindert voortdurend, het moet dus het voorste eenmaal rechts van de punten B en B' inhalen.

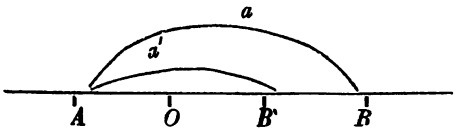
2e Geval. $v > v'$, $a' = a$ $va' > av'$; $x = \frac{va' - av'}{v - v'}$;

$t = \frac{0}{v - v'} = 0$.

De lichamen halen elkander dus in na t, d. i. na 0 minuten, d. i. zij zijn bij elkander.

Deze uitkomst was wederom gemakkelijk te voorzien. Heeft men toch $a = a'$, dan komt het punt B op B'.

3e Geval. $v > v'$, $a' < a$, $va' > av'$; x positief, t negatief.



De dubbele veronderstelling, dat $v > v'$ en $a' < a$, toont aan, dat het snelste lichaam reeds voor is, dat er dus reeds eene ontmoeting moet plaats gehad hebben. De negatieve tijd wijst aan, dat de ontmoeting *na* eenigen tijd, waarnaar gevraagd wordt, reeds *voor* t minuten heeft plaats gehad. — (Vergelijk over de beteekenis van negatieve getallen *Theor. der Alg. Rek.* I, pag. 30.)

Dewijl voor x eene positieve waarde gevonden wordt, moet het ontmoetingspunt aan de rechter zijde van A liggen. Dit is gemakkelijk te betoogen.

Uit $va' > av'$ volgt $\frac{a'}{v'} > \frac{a}{v}$.

Nu is $\frac{a'}{v'}$ de tijd, dien B' besteed heeft, om van A in B' te

komen, terwijl $\frac{a}{v}$ de tijd is, dien B besteed heeft, om van A in B te komen. Stellen wij ons nu voor, dat de lichamen uit B en B' met hunne eigene snelheid naar A terugkeeren, dan zal B daar eerder aankomen, dan B', want

$$\frac{a}{v} < \frac{a'}{v'}.$$

Op het oogenblik dat B in A is, ligt B' rechts van A; B is sneller dan B', derhalve moet $B\,B'$ ergens tusschen A en B ontmoet hebben.

4e Geval. $v > v'$, $a' < a$, $va' = av'$, $x = 0$, $t = -$.

De lichamen hebben elkander dus ontmoet, vóór zij B en B' bereikt hebben en wel juist in het punt A.

Inderdaad toonen de veronderstellingen $v > v'$ en $a' < a$, dat het lichaam, dat de grootste snelheid heeft, reeds voor gekomen is, derhalve moet er reeds een punt zijn geweest, waar het snelste het tragere heeft ingehaald. Verder volgt uit $va' = av'$ of $\frac{a'}{v'} = \frac{a}{v}$, dat zij, sedert zij A verlieten, evenveel tijd besteed hebben om in B' en B te komen. Een gelijk aantal minuten vóór hunne aankomst respectievelijk in B en B', waren zij dus te gelijk in A.

5e Geval. $v > v'$, $a' < a$, $va' < av'$, $x = -$, $t = -$.

De lichamen hebben elkander dus ontmoet in den verleden tijd, links van A.

Omdat $v > v'$ en $a' < a$ is het snelste lichaam voor, derhalve moet reeds eene ontmoeting plaats gehad hebben.

Uit $va' < av'$ volgt: $\frac{a'}{v'} < \frac{a}{v}$, welke formule aantoont, dat het snelst loopende lichaam B meer tijd noodig heeft, om weder in A te komen, dan het trager loopende lichaam B'. Is B' derhalve reeds in A, dan bevindt B zich nog rechts van A, de ontmoeting moet dus links van A hebben plaats gehad.

6e Geval. $v = v'$, $a' > a$, $va' > av'$, $x = \infty$, $t = \infty$.

Deze waarden voor x en t geven te kennen, dat aan het vraagstuk niet voldaan kan worden. — Inderdaad, indien de snelheden dezelfde zijn, zullen de beide lichamen altijd op een afstand $a' - a$

van elkander blijven, elkâar dus nooit ontmoeten. — Men kan ook zeggen:

Wanneer de lichamen een oneindig aantal minuten geloopen hebben, dan hebben zij zulk een grooten weg afgelegd, dat de afstand die hen scheidt, in betrekking tot den afgelegden weg, gelijk aan 0 gesteld kan worden; m. a. w.: na een oneindig aantal minuten ontmoeten de lichamen elkander op een oneindig grooten afstand van A.

7e Geval. $v = v'$, $a' = a$, $va' = av'$; $x = \frac{\infty}{\infty}$, $t = \frac{\infty}{\infty}$.

De lichamen ontmoeten elkander dus op elk oogenblik op elken afstand van A.

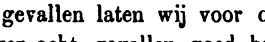
Dewijl $a' = a$, zijn de lichamen bij elkander en dewijl $v = v'$, blijven zij bij elkander gedurende hunnen geheelen loop.

5e Geval. $v = v'$, $a' < a$, $va' < av'$, $x = \infty$, $t = \infty$.

De uitkomst is dezelfde als in het 6de geval en laat zich op gelijke wijze verklaren.

De vijf overige gevallen laten wij voor den Lezer. Indien hij de discussie dezer acht gevallen goed begrepen heeft, zal hem de discussie der overige niet moeilijk vallen.

2. *Eene lijn in de uiterste en middelste reden verdeelen, d. i. zoodanig in twee deelen te verdeelen, dat het grootste deel middelevenredig is tusschen het kleinste deel en de geheele lijn.*



Zij de lijn AB in M in de uiterste en middelste reden verdeeld, dan is

$$AM^2 = AB \times MB.$$

Zij nu de geheele lijn $= a$, het grootste stuk $= x$, dan is:

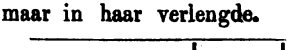
$$x^2 = a(a-x) \text{ of } x^2 + ax - a^2 = 0;$$

waaruit $x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \frac{a}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$.

Dewijl $-1 \pm \sqrt{5}$ eene positieve en eene negatieve waarde heeft, zullen er twee punten gevonden worden, waarvan alleen datgene, dat met de positieve waarde overeenkomt, rechtstreeks op de vraag antwoordt. Het punt M zal in dat geval verder van A gelegen zijn dan $\frac{1}{2}a$, omdat $-1 + \sqrt{5} > 1$.

De negatieve waarde van den wortel, $\frac{a}{2}(-1 - \sqrt{5})$, be-

paalt een punt M' links van A, dat aan het vraagstuk in zijn beperkten zin niet voldoet. Het punt M' toch ligt niet meer op de lijn AB maar in haar verlengde.



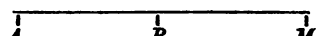
Verandert men in de opgegeven vergelijking x in $-x$, dan vindt men de vergelijking $x^2 = a(a + x)$,
welke ons wijst op de uitdrukking

$$M'A^2 = M'B \times AB.$$

Het punt M' zal dus aan de opgave voldoen, indien wij de vraag eenigszins anders stellen, haar meer generaliseeren en dus lezen:

Op de rechte lijn AB of ergens op haar verlengde een punt te vinden zoodanig, dat de afstand van dit punt tot het punt A middelevenredig is tusschen den afstand van dit punt tot het punt B en de geheele lijn AB.

In het algemeen kan men opmerken, dat wanneer de algebra meer antwoorden toelaat, dan de meetkunde ons levert, zulks een gevolg is van het niet algemeen genoeg stellen van de vraag. Zoo zonderden wij in § 6, 8 den stomphoekigen driehoek uit, ofschoon het algebraïsch antwoord op geene enkele uitzondering wees. Deze uitzondering was niets anders, dan een gevolg van de beperktheid van het vraagstuk. Toen wij daarvoor lazen: *Een vierkant te beschrijven, dat met eene zijde langs eene zijde of het verlengde van eene zijde eens driehoeks ligt, en met twee hoekpunten in de twee andere zijden komt*, behoefde er geen enkele driehoek uitgezonderd te worden.



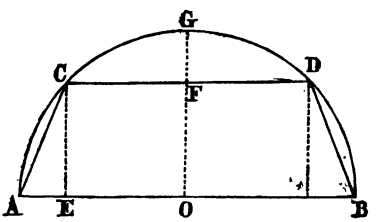
Hadden wij bij de oplossing der vraag aangenomen, dat het punt M rechts van AB kan komen te liggen, dan hadden wij wederom $AM^2 = AB \times BM.$

of $x^2 = a(x - a)$

waaruit $x = \frac{a}{2}(1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3}).$

De waarden van x zijn beide imaginair en wijzen ons derhalve op het onmogelijke, dat zich aan de rechterzijde van AB zoodanig punt zou bevinden.

3. ***In een halven cirkelomtrek, welks diameter = 2r is, verlangt men een trapezium ACDB te beschrijven, waarvan de zijden AC + CD + DB = 2m.***



Indien wij uit C eene normaal trekken naar AB en dan $AE = x$ en $AC = y$ stellen, daarna den straal OG normaal op AB trekken, dan hebben wij:

$AC + CF = m$, $AC + EO = m$ of eindelijk $y + r - x = m$ . . (1)

Bovendien heeft men ook $AC^2 = AE \times AB$ of $y^2 = 2rx$. (2)

Lossen wij nu uit de tweede vergelijking x op en substitueeren wij hare waarde in de eerste, dan vinden wij $x = \frac{y^2}{2r}$ en

$$y + r - \frac{y^2}{2r} = m$$

of $$y^2 - 2ry - 2r^2 + 2rm = 0$$

d. i. $y = +r \pm \sqrt{(3r^2 - 2rm)} = r \pm \sqrt{r(3r - 2m)}$; . (3)

brengen wij deze waarde over in de vergelijking (1), dan vinden wij nog:

$$x = 2r - m \pm \sqrt{r(3r - 2m)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Één der beide vergelijkingen (3) en (4) is voldoende, om het vraagstuk op te lossen.

Nemen wij nu de waarden voor y en wel

$y_1 = r + \sqrt{r(3r - 2m)}$ en $y_2 = r - \sqrt{r(3r - 2m)}$,

dan zal men in de eerste plaats moeten hebben $3r > 2m$ of $3r = 2m$ d. i. $r > \frac{2}{3}m$ of $r = \frac{2}{3}m$, om de oplossing mogelijk te maken. Wordt aan deze voorwaarde voldaan, dan zal men voor y_1 altijd eene positieve waarde vinden, doch dit is nog niet voldoende, om aan het vraagstuk te voldoen. Wil men werkelijk een trapezium in den cirkelomtrek beschrijven, dan moet ook $AG > AC$ derhalve moet

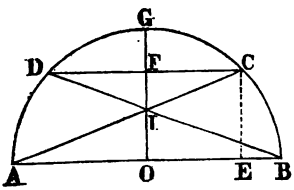
$r\sqrt{2} > r + \sqrt{r(3r - 2m)}$ of $r(\sqrt{2} - 1) > \sqrt{r(3r - 2m)}$:

d. i. $3r^2 - 2rm < 3r^2 - 2r^2\sqrt{2}$ of $2rm > 2r^2\sqrt{2}$,

of eindelijk $m > r\sqrt{2}$.

Zoolang dus de som der drie zijden AC, CD en DB kleiner is, dan driemaal den straal en die halve som grooter, dan de zijde van het ingeschreven vierkant, zoolang blijft men altijd eene oplossing vinden in de eigenlijke beteekenis van het vraagstuk.

Indien m niet grooter was, dan $r\sqrt{2}$, dan zoude de lijn AC de lijn OG ergens snijden en men zou de volgende figuur krijgen,



namelijk eene vierzijde, waarvan even als in een trapezium twee zijden evenwijdig loopen en twee zijden niet. Indien wij aan zoodanig figuur ook nog den naam van trapezium toekennen, dan wordt ook in de veronderstelling van $m < r\sqrt{2}$ aan het vraagstuk voldaan; maar omdat volgens (2) $x = \frac{y^2}{2r}$ in de veronderstelling, dat $m < r\sqrt{2}$ of $y > r\sqrt{2}$, geeft $x > r$, zal men voor de vergelijking (1) ook kunnen schrijven

$$y - (x - r) = m,$$

d. i. $$AC - (AE - AO) = AC - EC = m.$$

Zoodat nu niet langer $AC + CD + DB$, maar $AC - CD + DB$ gelijk is aan $2m$.

In de beide voorgaande veronderstellingen stelt y_1 altijd eene koorde voor; derhalve moet y_1 altijd kleiner zijn dan $2r$, d. i.

$$r + \sqrt{(3r^2 - 2rm)} < 2r$$
$$\sqrt{(3r^2 - 2rm)} < r$$
$$3r^2 - 2rm < r^2$$
$$m > r.$$

Is dus de omtrek niet grooter, dan de middellijn, dan zijn de beide vorige oplossingen onmogelijk.

Nemen wij thans den wortel $y_2 = r - \sqrt{(3r^2 - 2rm)}$.

Opdat men daarvoor eene reëele waarde hebbe, heeft men in de eerste plaats $3r^2 > 2rm$ of $3r > 2m$, even als in het vorige geval.

Bovendien moet y_2 positief zijn; want het product $y_1 y_2$ is gelijk aan den bekenden term in de vergelijking van y, dus gelijk aan $2r(m - r)$; deze term is positief, y_1 is ook positief, derhalve

moet ook y_2 positief zijn. Opdat nu y_2 positief zij, moet men ook hebben $m > r$. Verder volgt uit de waarde van y_2, dat zij $< r$, dus zoo veel te meer $< r\sqrt{2}$; zij zal dus altijd eene waarde geven in den beperktsten zin van het vraagstuk.

Hadde men $m < r$, dan zou y_2 eene negatieve waarde verkrijgen. In die gevallen, waarin een negatief antwoord niet juist het tegenovergestelde van de vraag kan aanwijzen, substitueert men $-y$ voor y en maakt van de daardoor ontstane nieuwe vergelijking een vraagstuk, dat men zooveel mogelijk in overeenstemming houdt met het oorspronkelijke. — Intusschen is dit niet van algemeene en onvoorwaardelijke toepassing; menig vraagstuk laat zoodanige handelwijze niet toe.

Schrijven wij dus ook hier $-y$ in de plaats van y in de vergelijkingen (1) en (2) dan vinden wij:

$$(r-x)-y=m \ldots\ldots (1') \text{ en } y^2=2rx \ldots\ldots (2')$$

De vergelijking (2') wijst aan, dat x positief zal zijn, welk ook het teeken zij van y, terwijl de andere aantoont, dat $r-x$ noodzakelijk positief moet zijn en dus $r > x$; zoodat het trapezium een gewoon trapezium zal zijn, maar de vergelijking (1'), toont, dat men heeft: $(AO-AE)-AC=m$

$$EO-AC=m$$

$$\text{of } CD-(AC+DE)=2m.$$

Al deze verschillende beschouwingen te zamen vattende, komt men tot de volgende conclusiën:

1e. Indien $m > \frac{1}{2}r$, zijn y_1 en y_2 imaginair en het vraagstuk kan niet opgelost worden.

2e. Indien $m=\frac{1}{2}r$ vindt men $y_1=y_2=r$ en men heeft den halven omtrek van een regelmatigen zeshoek in den halven cirkelomtrek beschreven.

3e. Heeft men $m < \frac{1}{2}r$, maar $> r\sqrt{2}$, dan leveren y_1 en y_2 twee oplossingen, die aan den beperkten eisch van 't vraagstuk voldoen.

4e. Is $m=r\sqrt{2}$, dan wordt $y_1=r\sqrt{2}$ en het trapezium door dezen wortel voortgebracht, wordt een rechthoekige gelijkbeenige driehoek in den voorgestelden halven omtrek beschreven. De andere wortel y_2, wordt in dat geval $(2-\sqrt{2})r$ en geeft eene oplossing in den beperkten zin van 't vraagstuk.

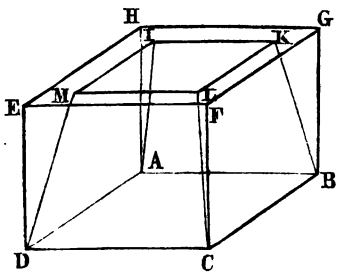
5e. Is $m < r\sqrt{2}$ en $m > r$, dan wordt $y_1 > r\sqrt{2}$ en geeft een trapezium, waarvan de niet evenwijdige zijden elkander snijden; y_2 geeft nog eene oplossing in den beperkten zin des vraagstuks.

6e. Wordt $m = r$, dan is $y_1 = 2r$ en $y_2 = 0$; de twee trapezia zijn dus niets anders, dan de diameter.

7e. Is $m < r$, dan wordt $y_1 > 2r$ en geeft uit geen enkel oogpunt eene voldoende oplossing; y_2 wordt negatief en geeft, hoe klein m ook worde, eene oplossing in de beteekenis, die wij daaraan in het laatste geval onzer beschouwing vermeld hebben.

Aanmerking. Thans zouden wij, om het vraagstuk geheel te voleindigen, over moeten gaan tot de constructie; deze laten wij intusschen, als meer op het gebied der meetkunde thuis behoorende, achterwege.

4. ***In een opgegeven cubus eene afgeknotte pyramide te beschrijven, die een zelfde grondvlak heeft en wier bovenvlak in het vlak van den kubus komt zoodanig, dat de verhouding tusschen den inhoud der afgeknotte pyramide en den inhoud van den kubus gelijk zij aan p.***



Indien wij de ribbe van den kubus a noemen en de zijde van het bovenvlak der afgeknotte pyramide x, dan is de inhoud van den kubus a^3 en van de afgeknotte pyramide

$$\frac{a}{3}(x^2 + ax + a^2).$$

Volgens de voorwaarden van het vraagstuk heeft men nu

$$\frac{\frac{a}{3}(x^2 + ax + a^2)}{a^3} = p$$

of na ontwikkeling en rangschikking

$$x^2 + ax - 3a^2p + a^2 = 0;$$

d. i. $x_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{(3a^2(p - \frac{1}{4}))}$,

$$x_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{(3a^2(p - \frac{1}{4}))}.$$

Aan bovenstaande vergelijking nu zal altijd voldaan worden, zoolang $p \overline{\geq} \frac{1}{4}$.

Is $p < \frac{1}{4}$, dan worden de wortels imaginair en aan het vraagstuk kan in geen geval voldaan worden. De afgeknotte pyramide kan dus nimmer minder zijn, dan een vierde gedeelte van den inhoud van den kubus.

Opdat de eerste wortel een positief antwoord geve, moet men hebben:

$$-\frac{a}{2} + \sqrt{\left\{3a^2(p-\tfrac{1}{4})\right\}} > 0$$

$$3a^2(p-\tfrac{1}{4}) > \tfrac{1}{4}a^2$$

$$p - \tfrac{1}{4} > \tfrac{1}{12}$$

$$p > \tfrac{1}{3}.$$

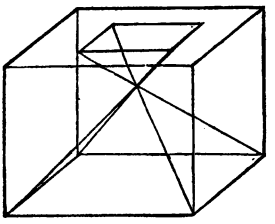
Om dus een antwoord te vinden in den beperkten zin des vraagstuks, moet de inhoud van de afgeknotte pyramide meer bedragen, dan het derde gedeelte van den inhoud van den kubus.

De tweede wortel

$$x_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{(3a^2(p-\tfrac{1}{4}))}$$

is, wanneer $p \overline{\geq} \frac{1}{4}$ genomen wordt altijd negatief. Dewijl hier nu intusschen, als zijde van een vierkant, geene sprake is van een negatief zijn van x, vervangen wij, even als in het vorige voorbeeld, in de opgegeven vergelijking x door $-x$ en maken van de aldus verkregen vergelijking een vraagstuk, dat zoo nauw mogelijk met het opgegevene overeenkomt. Doen wij zulks in dit geval, dan wordt de opgegeven vergelijking

$$\frac{\frac{1}{3}(a^3 - ax + x^2)}{a^3} = p,$$



waarin nu de teller van het eerste lid eene pyramide voorstelt met twee bladen, het grondvlak der eene pyramide is het grondvlak van den kubus, het grondvlak der andere ligt in het bovenvlak van den kubus en de hoogte der beide pyramiden te zamen is de

hoogte van den kubus. Wil men ook dit lichaam aanmerken als eene afgeknotte pyramide, dan kan er ook in dezen zin aan het vraagstuk voldaan worden. Wij willen thans nog eenige bijzondere gevallen beschouwen.

a) Is $p > \frac{1}{3}$, dan is x_1 positief en men heeft een antwoord in den beperkten zin des vraagstuks. Is $p \gtreqless 1$, dan is ook $x \gtreqless 1$.

x_2 is negatief en levert eene pyramide met twee bladen. Bovendien is het gemakkelijk in te zien, dat $x_2 > a$.

b) Neemt men $p = \frac{1}{3}$, dan wordt $x_1 = 0$ en men vindt dus eene afgeknotte pyramide, wier bovenvlak $= 0$ is; d. i. eene pyramide, wier toppunt juist in het bovenvlak ligt, wier grondvlak gelijk is aan het grondvlak van den kubus en die dezelfde hoogte heeft.

x_2 wordt in dat geval $= -a$. Men vindt dan eene pyramide met twee bladen, die uit twee gelijk en gelijkvormige pyramiden bestaat, die respectievelijk grond- en bovenvlak van den kubus tot grondvlak hebben.

c) Is $p < \frac{1}{3}$ maar $> \frac{1}{4}$, dan geven x_1 en x_2 beide pyramiden met twee bladen. Eene oplossing in den beperkten zin des vraagstuks wordt dan onmogelijk.

d) Is $p = \frac{1}{4}$, dan heeft men $x_1 = x_2 = -\frac{1}{2}a$. Men vindt alsdan eene tweebladige pyramide, wier bovenblad het vierde gedeelte is van het grondvlak.

Aanmerking. Ook hier laten wij de constructie, als behoorende tot het gebied der meetkunde, over aan den Lezer. De beide voorgaande vraagstukken, zoo bijzonder geschikt om een duidelijk denkbeeld van de discussie van een vraagstuk te geven, zijn ontleend aan TOMBECK'S *Algèbre*.

5. ***Wanneer men de som van twee getallen met het kleinste en het verschil dier getallen met het grootste getal vermenigvuldigt, dan verkrijgt men de producten p en q; welke zijn die getallen?***

Stellen wij het grootste getal voor door x, het kleinste door y, dan heeft men:

$$(x+y)y = p \ldots . (1) \qquad (x-y)x = q \ldots . (2)$$

of $$xy + y^2 = p \ldots . (3) \qquad x^2 - xy = q \ldots . (4)$$

uit (3) vindt men $x = \frac{p-y^2}{y}$ en door substitutie van deze waarde

in (4) $\left(\frac{p-y^2}{y}\right)^2 - (p-y^2) = q,$

zijnde nu ééne vergelijking met ééne onbekende.

Na behoorlijke herleiding vindt men verder:

$$y^4 - \frac{3p+q}{2}\, y^2 + \frac{p^2}{2} = 0$$

$$y^2 = \frac{3p+q}{4} \pm \tfrac{1}{4}\sqrt{(p^2+6pq+q^2)}$$

$$y = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\{3p+q\pm\sqrt{(p^2+6pq+q^2)}\}}.$$

Door substitutie van deze waarden van y vindt men nog:

$$x = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\{p+3q\pm\sqrt{(p^2+6pq+q^2)}\}}$$

Wanneer wij ons nu alleen bepalen tot de waarden van y, dan hebben wij:

$$y_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{\{3p+q+\sqrt{(p^2+6pq+q^2)}\}}$$
$$y_2 = \tfrac{1}{2}\sqrt{\{3p+q-\sqrt{(p^2+6pq+q^2)}\}}$$
$$y_3 = -\tfrac{1}{2}\sqrt{\{3p+q+\sqrt{(p^2+6pq+q^2)}\}}$$
$$y_4 = -\tfrac{1}{2}\sqrt{\{3p+q-\sqrt{(p^2+6pq+q^2)}\}}.$$

Wanneer p en q positieve getallen zijn, dan is $\sqrt{(p^2+6pq+q^2)}$ een reëel getal en de vier waarden van y zullen reëel zijn, omdat

$$(3p+q)^2 > p^2+6pq+q^2.$$

In dat geval zijn er dus twee positieve en twee negatieve waarden voor y, die aan het vraagstuk voldoen.

Is een der getallen bijv. q negatief, dan is p^2+q^2 altijd positief, maar q en $6pq$ worden negatief. In dat geval veranderen de waarden van y in

$$y_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{\{3p-q+\sqrt{(p^2-6pq+q^2)}\}}$$
$$y_2 = \tfrac{1}{2}\sqrt{\{3p-q-\sqrt{(p^2-6pq+q^2)}\}}$$
$$y_3 = -\tfrac{1}{2}\sqrt{\{3p-q+\sqrt{(p^2-6pq+q^2)}\}}$$
$$y_4 = -\tfrac{1}{2}\sqrt{\{3p-q-\sqrt{(p^2-6pq+q^2)}\}}.$$

Is nu $6pq > p^2+q^2$, dan wordt de vorm onder het binnenste wortelteeken negatief en men krijgt vier imaginaire waarden voor y.

Heeft men $6pq = p^2 + q^2$, dan wordt de vorm onder het 2de wortelteeken $= 0$ en men vindt:

$y_1 = y_2 = \frac{1}{2}\sqrt{(3p-q)}$ en $y_3 = y_4 = -\frac{1}{2}\sqrt{(3p-q)}$,

zoodat men dan twee paren gelijke wortels heeft. Het zal den Lezer niet moeilijk vallen het gevolg van zoodanige veronderstellingen na te sporen bij de waarden van x. Wij zullen ons dan ook verder met de discussie der antwoorden niet meer zoo uitvoerig bezig houden, maar ons bepalen tot het oplossen van eenige vergelijkingen om daarbij te wijzen op het groote belang, om in eenig vraagstuk eene *juiste* onbekende aan te nemen.

6. ***Er zijn twee getallen; vermenigvuldigt men ze met elkander, dan komt er zestig, terwijl het vierkant van hun verschil gelijk is aan hunne som. Welke getallen zijn dat?***

Stellen wij het eene getal x en het andere y, dan is $xy = 60$ (1), terwijl $(x-y)^2 = x + y$ . . . . . (2). Ontwikkelt men (2), dan vindt men:

$x^2 - 2xy - x - y + y^2 = 0$ uit (1) volgt $y = \frac{60}{x}$ derhalve

$$x^2 - 120 - x - \frac{60}{x} + \frac{3600}{x^2} = 0.$$

of na behoorlijke rangschikking:

$$x^4 - x^3 - 120x^2 - 60x + 3600 = 0,$$

zijnde eene vergelijking van den vierden graad, welke wij nog niet hebben leeren oplossen.

Hadden wij echter het verschil der getallen x gesteld, dan was hunne som x^2; het grootste getal was dan $\frac{1}{2}x(x+1)$ en het kleinste $\frac{1}{2}x(x-1)$, zoodat, het product $= 60$ zijnde, men ook heeft:

$$\tfrac{1}{4}x^2(x^2-1) = 60$$

of $$x^4 - x^2 - 240 = 0$$

waaruit $x^2 = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{961}{4}}$ d. i. $x^2 = 16$ of $x^2 = -15$;

de eerste vergelijking geeft $x = \pm 4$, de tweede $x = \pm\sqrt{-15}$.

Deze waarden substitueerende in de vormen, welke men voor de beide getallen gevonden heeft, vindt men voor $x = 4$:

voor het grootste getal 10, voor het kleinste 6;

voor $x = -4$ vindt men de getallen 6 en 10.

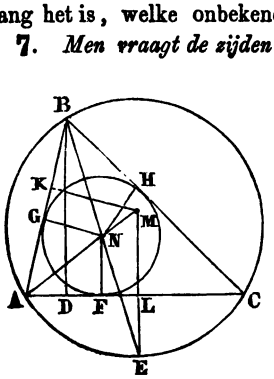
Voor de beide andere getallen zal men vinden $\frac{1}{2}(-15 \pm \sqrt{-15})$.

Indien men geweten had, dat men voor de vroeger gevonden vierdemachtsvergelijking ook kan schrijven

$$(x^2 - 16x + 60)(x^2 + 15x + 60) = 0,$$

dan zou men, door ieder dezer beide tweedemachtsfactoren gelijk aan 0 te stellen, dezelfde antwoorden gevonden hebben. Intusschen toont ons dit voorbeeld ten duidelijkste van hoeveel belang het is, welke onbekende men zich voorstelt te berekenen.

7. *Men vraagt de zijden eens driehoeks te berekenen, indien de stralen van den in- en omgeschreven cirkelomtrek en de hoogte des driehoeks gegeven zijn.*



Zij $BD = h$; NF, de straal des ingeschreven cirkelomtreks, $= r$; AM, de straal des omgeschreven cirkelomtreks $= R$; stellen wij verder $AC = x$ en $BH = y$, dan heeft men onmiddellijk:

$$\text{Inh. } drieh.\ ABC = \frac{hx}{2}.$$

$$\text{Inh. drieh. } ABC = \tfrac{1}{2}(AB + BC + CA) \times r =$$
$$= (AC + BH)r = xr + ry,$$

waaruit de vergelijking $\frac{hx}{2} = xr + ry$ of $y = \frac{hx - 2xr}{2r}$ . . . . (A).

Trekt men nu de lijn BE, die hoek ABC middendoor deelt, dan zijn de driehoeken BHN en CLE gelijkvormig, zoodat men heeft:

$$LE : HN :: CL : BH;$$

maar $CL = \frac{1}{2}x$, $EL = EM - LM = R - \sqrt{\left(R^2 - \frac{x^2}{4}\right)}$,

$$\text{zoodat } R - \sqrt{\left(R^2 - \frac{x^2}{4}\right)} : r :: \tfrac{1}{2}x : y;$$

of indien men daarin de waarde schrijft, die wij in (A) voor y gevonden hebben:

$$R - \sqrt{\left(R^2 - \frac{x^2}{4}\right)} : r :: \tfrac{1}{2}x : \frac{hx - 2xr}{2r},$$

waaruit achtereenvolgens gevonden wordt:

$$R - \sqrt{\left(R^2 - \frac{x^2}{4}\right)} : r :: r : h - 2r$$

$$(h-2r)\,R - r^2 = \sqrt{\left(R^2 - \frac{x^2}{4}\right)} \times (h-2r)$$

$$(h-2r)^2\,R^2 - 2Rr^2(h-2r) + r^4 = \left(R^2 - \frac{x^2}{4}\right)(h-2r)^2$$

$$x^2 = \frac{8Rr^2(h-2r) - 4r^4}{(h-2r)^2}$$

$$x = \pm\,\frac{2r}{h-2r}\,\sqrt{(2Rh - 4Rr - r^2)}.$$

Hieruit nu kan y verder gemakkelijk berekend worden.

Hadde men in plaats van $BH = y$, als tweede onbekende, $AD = z$ als zoodanig aangenomen, dan zou men, na MK normaal tot AB getrokken te hebben, vinden:

$$AK = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{(h^2 + z^2)}}{2};\quad MK = \sqrt{(AM^2 - KA^2)} =$$

$$= \sqrt{\left(R^2 - \frac{h^2 + z^2}{4}\right)};\quad DC = x - z;$$

en uit de gelijkvormige rechthoekige driehoeken CDB en MKA:

$$CD : DB :: MK : KA$$

$$x - z : h :: \tfrac{1}{2}\sqrt{(4R^2 - h^2 - z^2)} : \tfrac{1}{2}\sqrt{(h^2 + z^2)};$$

of na machtsverheffing en rangschikking:

$z^4 - 2xz^3 + (2h^2 + x^2)z^2 - 2xh^2z - (4h^2R^2 - h^2x^2 - h^4) = 0$;

welke vergelijking van den vierden graad is en waaruit men, al is x ook bekend geworden, z nog niet verder op kan lossen, waardoor wij wederom ten duidelijkste zien van hoeveel belang het is eene juiste keuze van onbekenden te doen. Vaste regels zijn dien aangaande moeilijk te geven; veel oefening alleen kan ons daarin eenige vaardigheid geven. Intusschen bestaan er eenige voorschriften, die men bij voorkomende omstandigheden toe kan passen.

8. 1°. Moet men twee getallen zoeken, wier som a is, dan stelt men gewoonlijk het eene $\frac{1}{2}a + x$ en het andere $\frac{1}{2}a - x$, soms ook het eene z en het andere $a - x$.

2°. Moet men twee getallen zoeken, wier verschil a is, dan stelt men het eene gewoonlijk voor door $x + \frac{1}{2}a$ en het tweede door $x - \frac{1}{2}a$; soms ook het eene door x, het andere door $x - a$.

3°. Moet men twee getallen zoeken, wier product gelijk is aan a, dan stelt men deze gewoonlijk voor door x en $\frac{a}{x}$.

4°. Moet men twee getallen zoeken, wier quotiënt gelijk is aan a, dan stelt men deze gewoonlijk voor door x en ax.

5°. Moet men eenige getallen bepalen, die zich verhouden als de getallen a, b, c, ... dan stelt men ze voor door ax, bx, cx, ...

6°. Moet men vier getallen bepalen, die eene meetkundige evenredigheid uitmaken, dan stelt men die getallen dikwijls voor door x, xy, z en yz.

9. Soms ook berekent men eene geheel andere onbekende, als die, waarnaar gevraagd wordt, om zoodoende tot de oplossing van eenig vraagstuk te geraken. Zij bijvoorbeeld nog ter oplossing gegeven het volgende

Vraagstuk. *Het getal* 172 *zoodanig in vier deelen te verdeelen, dat indien men die deelen respectievelijk deelt door* 8, 7, 6, 5 *de quotiënten met twee toenemen. Hoe groot is elk deel?*

Stel het eerste quotiënt x, dan is het tweede $x + 2$, het derde $x + 4$, het vierde $x + 6$, en de deelen zijn: $8x$ $7x + 14$, $6x + 24$, $5x + 30$.

Verder is de som der deelen: $26x + 68 = 172$;

derhalve $x = 4$;

de deelen zijn dus: 32, 42, 48, 50.

10. Ter toepassing strekken de volgende

VRAAGSTUKKEN.

1. Men vraagt twee getallen wier som 25 en wier product 144 is.
2. Er zijn drie gedurig evenredige getallen, wier som 126 en wier product 13824 is. Welke zijn die getallen?
3. Er zijn twee getallen a en b, die men beide in twee deelen wil verdeelen zoodanig, dat het eerste deel van a staat tot het eerste deel van b als m tot n, terwijl het product der beide andere deelen p is. Welke zijn die deelen?
4. Twee voetreizigers ontmoeten elkander tusschen de plaatsen X en Y. Indien A, die d mijlen meer heeft afgelegd dan B, met dezelfde snelheid voortgaande in a dagen te Y zal aankomen, terwijl B nog b dagen noodig zal hebben alvorens hij te X is, hoe ver liggen de plaatsen dan van elkaâr, indien A en B gelijktijdig uit X en Y vertrokken zijn?

5. Een schaapherder kocht voor f 720 schapen en na er 15 voor zich uitgezocht te hebben, verkocht hij de andere voor f 648 en won f 1,20 op elk schaap; hoe vele schapen had hij gekocht?
6. Men vraagt twee getallen zoodanig, dat het verschil hunner vierkanten gelijk is aan q^2, en het verschil van de producten van het eerste getal en a en het tweede en b gelijk is aan s^2.
7. Twee getallen a en b in twee deelen te verdeelen zoodanig, dat het product van de eerste deelen gelijk aan p en dat der tweede deelen gelijk zij aan p'.
8. Op eene middellijn AB is beschreven een halven cirkelomtrek ACB, die in A geraakt wordt door de lijn AF. Men vraagt door het punt B een tweeden cirkelomtrek te brengen, wiens middelpunt op ACB ligt en die de lijn AF raakt. (Gegeven $AB = 2r$).
9. Van een driehoek ABC is gegeven de som der zijden $AC + BC = a$, de hoogte $CD = h$, de basis $AB = b$; men vraagt naar AC en AD.
10. Binnen een halven cirkelomtrek zijn twee elkaâr rakende halve cirkeltrekken beschreven, wier middellijnen a en b te zamen zoo lang zijn als de middellijn des eersten. Hoe lang is de straal des cirkeltreks, die alle drie de gegeven omtrekken aanraakt?

ANTWOORDEN.

1. 9 en 16. 2. 6, 24 en 96.
3. Het eene deel van a is $\frac{na + mb \pm \sqrt{\{(na - mb)^2 + 4mnp\}}}{2n}$

   het eene deel van b is $\frac{na + mb \pm \sqrt{\{(na - mb)^2 + 4mnp\}}}{2m}$.
4. $\frac{d(\sqrt{b} + \sqrt{a})}{\sqrt{b} - \sqrt{a}}$ mijlen. 5. 75 schapen.
6. $\frac{as^2 \pm b\sqrt{\{s^4 - (a^2 - b^2)q^2\}}}{a^2 - b^2}$ en $\frac{bs^2 \pm a\sqrt{\{s^4 - (a^2 - b^2)q^2\}}}{a^2 - b^2}$

7. $a = \frac{ab-(p^2-p)\pm\sqrt{\left[\left\{ab-(p'-p)\right\}^2-4abp\right]}}{2b} +$

$$+\frac{ab+(p-p)\mp\sqrt{\left[\left\{ab-(p'-p)\right\}^2-4abp\right]}}{2b}.$$

8. De straal van den begeerden cirkelomtrek is $-r+r\sqrt{5}$.

9. $AC = \frac{a}{2}\mp\frac{b}{2}\sqrt{\frac{a^2-b^2-4h^2}{a^2-b^2}}$ en $AD = \frac{b}{2}\mp\frac{a}{2}\sqrt{\frac{a^2-b^2-4h^2}{a^2-b^2}}$.

10. De gevraagde straal is lang $\frac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2}$.

---

§ 12. Opgave van vergelijkingen, die door kunstgrepen kunnen worden opgelost.

1. *Zij gegeven* $x+y=a$ *en* $x-y=b$.

Door de overeenkomstige leden der beide vergelijkingen eens op te tellen en eens af te trekken vindt men:

$$x=\tfrac{1}{2}(a+b) \quad \text{en} \quad y=\tfrac{1}{2}(a-b).$$

2. *Zij gegeven* $x+y=a$ *en* $xy=b$.

Men brenge de eerste vergelijking in het vierkant en vermindere haar dan met het viervoud der tweede. Zulks geeft achtereenvolgens:

$$x^2+2xy+y^2=a^2, \quad x^2-2xy+y^2=a^2-4b$$

en na worteltrekking $x-y=\pm\sqrt{(a^2-4b)}$.

Door optelling en aftrekking vinden wij nu

$$x=\tfrac{1}{2}(a\pm\sqrt{(a^2-4b)})$$
$$y=\tfrac{1}{2}(a\mp\sqrt{(a^2-4b)}).$$

Aanmerking. Door deze machtsverheffing zijn geene waarden voor de onbekenden ingevoerd. Uit de tweede toch vindt men $x=\frac{b}{y}$ en $y=\frac{b}{x}$; substitueert men deze waarden elk eenmaal in de eerste vergelijking, dan heeft men:

$$x^2-ax+b=0 \quad \text{en} \quad y^2-ay+b=0,$$

waaruit men voor x en y de bovenstaande waarden zal vinden. Intusschen hebbe men hierbij acht te geven, welke waarden van x en y bij elkander behooren.

Ware de eerste vergelijking $x-y=a$, dan telt men het

viervoud der tweede bij het vierkant van de eerste, en al het bovengezegde blijft van toepassing.

3. *Zij gegeven* $x^2 + y^2 = a$ *en* $xy = b$.

Trekt men het tweevoud der tweede vergelijking eens bij de eerste op, en eens daarvan af, dan vindt men:

$$x^2 + 2xy + y^2 = a + 2b \text{ en } x^2 - 2xy + y^2 = a - 2b$$

$$x + y = \pm\sqrt{(a + 2b)} \qquad x - y = \pm\sqrt{(a - 2b)}$$

$$x = \tfrac{1}{2}\left\{\pm\sqrt{(a + 2b)} \pm \sqrt{(a - 2b)}\right\}$$

$$y = \tfrac{1}{2}\left\{\mp\sqrt{(a + 2b)} \mp \sqrt{(a - 2b)}\right\},$$

wordende er dus voor elk der beide onbekenden vier verschillende waarden gevonden, welke waarden men ook vinden zal, door uit de tweede vergelijking af te leiden $x = \frac{b}{y}$ en $y = \frac{b}{x}$ en deze waarden in de eerste te substitueeren.

4. *Zij gegeven* $x^2 + y^2 = a$ *en* $x \pm y = b$.

Men brenge de tweede vergelijking in het vierkant, vermindere die met de eerste en vindt daardoor $xy = \pm\frac{b^2 - a}{2}$. Hierdoor is de bewerking teruggebracht tot n°. 3. De machtsverheffing heeft geene waarden ingevoerd. Na behoorlijke herleiding vindt men:

$$x = \tfrac{1}{2}b \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(2a - b^2)}$$

$$y = \pm\tfrac{1}{2}b \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{(2a - b^2)}.$$

5. *Zij gegeven* $x^2 - y^2 = a$ *en* $x \pm y = b$.

Deelt men deze vergelijkingen op elkander, dan vindt men

$$x - y = \frac{a}{b}, \quad x + y = b; \quad x + y = \frac{a}{b}, \; x - y = b;$$

door optelling en aftrekking volgt hieruit:

$$x = \frac{a + b^2}{2b} \quad y = \frac{b^2 - a}{2b}; \quad x = \frac{a + b^2}{2b}, \quad y = \frac{a - b^2}{2b}.$$

Door deze deeling te bewerkstelligen zijn geene waarden van x of y verdonkerd geworden.

6. *Zij gegeven* $x^2 - y^2 = a$ *en* $xy = b$.

Men telle viermaal het vierkant der tweede bij het vierkant der eerste, en vindt dan:

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = a^2 + 4b^2$$

$$x^2 + y^2 = \pm\sqrt{(a^2 + 4b^2)}$$

derhalve $x = \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}\left\{a \pm \sqrt{(a^2 + 4b^2)}\right\}}$

$y = \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}\left\{-a \pm \sqrt{(a^2 + 4b^2)}\right\}}$.

Men vindt dus voor elke onbekende vier waarden, die aan de vergelijking voldoen.

7. *Zij gegeven* $x^3 + y^3 = a$ *en* $x + y = b$.

Door deeling dezer vergelijkingen vindt men:

$$x^2 - xy + y^2 = \frac{a}{b}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

brengt men nu de tweede in het vierkant, dan heeft men $x^2 + 2xy + y^2 = b^2$; door aftrekking volgt nu $3xy = \frac{b^3 - a}{b}$ of $xy = \frac{b^3 - a}{3b}$. Deze laatste vergelijking van (2) aftrekkende, komt er $x - y = \pm \sqrt{\frac{4a - b^3}{3b}}$; waaruit door optelling en aftrekking

$$x = \tfrac{1}{2}\left\{b \pm \sqrt{\frac{4a - b^3}{3b}}\right\} \text{ en } y = \tfrac{1}{2}\left\{b \mp \sqrt{\frac{4a - b^3}{3b}}\right\}.$$

8. *Zij gegeven* $x^3 - y^3 = a$ en $x - y = b$.

Door deeling vindt men $x^2 + xy + y^2 = \frac{a}{b}$, en omdat $x^2 - 2xy + y^2 = b^2$ ook $xy = \frac{a - b^3}{3b}$. De verdere herleiding laten wij aan den lezer.

9. *Zij gegeven* $x^3 + y^3 = a$ *en* $xy = b$.

Men brenge de eerste vergelijking in het vierkant, en vermindere haar met viermaal de derde macht der tweede, alsdan vindt men:

$$x^6 - 2x^3y^3 + y^6 = a^2 - 4b^3$$

$$x^3 - y^3 = \pm \sqrt{(a^2 - 4b^3)}$$

$$x = \begin{cases} \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}\left\{a \pm \sqrt{(a^2 - 4b^3)}\right\}} \\ \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}\left\{a \pm \sqrt{(a^2 - 4b^3)}\right\}} \times \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \\ \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}\left\{a \pm \sqrt{(a^2 - 4b^3)}\right\}} \times \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} \sqrt{\tfrac{1}{2}\left\{a \mp \sqrt{(a^2 - 4b^2)}\right\}} \\ \sqrt{\tfrac{1}{2}\left\{a \mp \sqrt{(a^2 - 4b^2)}\right\}} \times \dfrac{-1-\sqrt{-3}}{2} \\ \sqrt{\tfrac{1}{2}\left\{a \mp \sqrt{(a^2 - 4b^2)}\right\}} \times \dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2} \end{cases}$$

Op dergelijke wijze lost men de vergelijking ook op, wanneer gegeven is $x^3 - y^3 = a$ en $xy = b$.

10. *Zij gegeven* $x^4 + x^2y^2 + y^4 = a$ *en* $x^2 + xy + y^2 = b$.

Door deeling der beide vergelijkingen vindt men $x^2 - xy + y^2 = \frac{a}{b}$ en door deze vergelijking van de tweede af te trekken: $xy = \frac{b^2 - a}{2b}$. Deze vergelijking telt men op bij de tweede en trekt haar af van de derde vergelijking, waardoor men vindt:

$$x^2 + 2xy + y^2 = \frac{3b^2 - a}{2b} \text{ en } x^2 - 2xy + y^2 = \frac{3a - b^2}{2b}$$

$$x + y = \pm\sqrt{\frac{3b^2 - a}{2b}} \text{ en } x - y = \pm\sqrt{\frac{3a - b^2}{2b}};$$

$$x = \tfrac{1}{2}\left\{\pm\sqrt{\frac{3b^2 - a}{2b}} \pm \sqrt{\frac{3a - b^2}{2b}}\right\},$$

$$y = \tfrac{1}{2}\left\{\pm\sqrt{\frac{3b^2 - a}{2b}} \mp \sqrt{\frac{3a - b^2}{2b}}\right\}.$$

11. *Zij gegeven:* $x + y + z = a$, $y + z + u = b$,

$$z + u + x = c, \; u + x + y = d.$$

Door optelling vindt men, na deeling door 3:

$$x + y + z + u = \tfrac{1}{3}(a + b + c + d)$$

Trekt men hiervan de gegeven vergelijkingen, elk in het bijzonder, dan vindt men:

$$u = \tfrac{1}{3}(b + c + d - 2a), \; x = \tfrac{1}{3}(a - 2b + c + d),$$

$$y = \tfrac{1}{3}(a + b - 2c + d), \; z = \tfrac{1}{3}(a + b + c - 2d).$$

12 *Zij gegeven:* $xy + xz = a$, $xz + yz = b$, $yz + xy = c$.

Door optelling vindt men: $xy + xz + yz = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

Door elk der vergelijkingen in 't bijzonder daarvan af te trekken:

$yz = \frac{1}{2}(b + c - a)$, $xy = \frac{1}{2}(a - b + c)$, $xz = \frac{1}{2}(a + b - c)$.

Stellen wij de bekende leden respectievelijk voor door p, q, r, dan vinden wij door vermenigvuldiging:

$$x^2y^2z^2 = pqr \quad \text{of} \quad xyz = \pm\sqrt{pqr},$$

waaruit door deeling gevonden wordt:

$$x = \pm\sqrt{\frac{qr}{p}},\ y = \pm\sqrt{\frac{pq}{r}} \text{ en } z = \pm\sqrt{\frac{pr}{q}}.$$

13. *Zij gegeven:* $xyzu = a$, $yzuv = b$, $zuvx = c$, $uvxy = d$, $vxyz = e$.

Door vermenigvuldiging vindt men $x^4y^4z^4u^4v^4 = abcde$, derhalve na worteltrekking:

$xyzuv = \pm\sqrt[4]{(abcde)}$ en $xyzuv = \pm\sqrt[4]{(abcde)} \times \sqrt{-1}$.

Deze beide vergelijkingen achtereenvolgens deelende door de opgegeven vergelijkingen vindt men:

$$v = \pm\sqrt[4]{\frac{bcde}{a^3}} \quad \text{en} \quad = \pm\sqrt[4]{\frac{bcde}{a^3}} \times \sqrt{-1}$$

$$x = \pm\sqrt[4]{\frac{acde}{b^3}} \quad \text{en} \quad = \pm\sqrt[4]{\frac{acde}{b^3}} \times \sqrt{-1}$$

$$y = \pm\sqrt[4]{\frac{abde}{c^3}} \quad \text{en} \quad = \pm\sqrt[4]{\frac{abde}{c^3}} \times \sqrt{-1}$$

$$z = \pm\sqrt[4]{\frac{abce}{d^3}} \quad \text{en} \quad = \pm\sqrt[4]{\frac{abce}{d^3}} \times \sqrt{-1}$$

$$v = \pm\sqrt[4]{\frac{abcd}{e^3}} \quad \text{en} \quad = \pm\sqrt[4]{\frac{abcd}{e^3}} \times \sqrt{-1}.$$

14. *Zij gegeven:* $xyz = avu$, $yzv = bux$, $zvu = cxy$, $vux = dyz$, $uxy = ezv$.

Schrijft men de vergelijkingen voor het gemakkelijk overzicht onder elkander:

$xyz = avu$ ... (1)	Het product van (1) en (4) geeft: $x^2 = ad$;
$yzv = bux$ ... (2)	het product van (2) en (5) geeft: $y^2 = be$;
$zvu = cxy$ ... (3)	het product van (3) en (1) geeft: $z^2 = ac$;
$vux = dyz$ ... (4)	het product van (4) en (2) geeft: $v^2 = bd$;
$uxy = ezv$ ... (5)	het product van (5) en (3) geeft: $u^2 = ce$.

Zoodat men eindelijk heeft:

$x = \pm\sqrt{ad}$, $y = \pm\sqrt{bc}$, $z = \pm\sqrt{ac}$, $v = \pm\sqrt{bd}$, $u = \pm\sqrt{ce}$, enz.

15. *Zij gegeven:* $a(x+y) = a'xy$, $b(y+z) = b'yz$, $c(x+z) = c'xz$.

Deelt men elk der vergelijkingen ieder in 't bijzonder door den

coëfficiënt van zijn eerste en de onbekenden uit zijn tweede lid, dan vindt men:

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=\frac{a'}{a},\quad \frac{1}{z}+\frac{1}{y}=\frac{b'}{b},\quad \frac{1}{z}+\frac{1}{x}=\frac{c'}{c}.$$

Stelt men nu hierin $\frac{1}{x}=x'$, $\frac{1}{y}=y'$, en $\frac{1}{z}=z'$, dan gaan de vergelijkingen over in:

$$y'+x'=\frac{a'}{a},\quad z'+y'=\frac{b'}{b}\text{ en }z'+x'=\frac{c'}{c};$$

waarna zij op de wijze van N°. 11 gemakkelijk kunnen worden opgelost.

16. *Zij gegeven:* $uvx=b(u+v+x+y+z)$, $vxy=c(u+v+x+y+z)$, $xyz=d(u+v+x+y+z)$, $yzu=e(u+v+x+y+z)$, $zuv=f(u+v+x+y+z)$.

Deelt men de eerste vergelijking door de tweede, de tweede door de derde, de derde door de vierde, enz. dan vindt men:

$$\frac{u}{y}=\frac{b}{c},\ \frac{v}{z}=\frac{e}{d},\ \frac{x}{u}=\frac{d}{e},\ \frac{y}{v}=\frac{e}{f},\ \frac{z}{x}=\frac{f}{b}\ldots\text{(A)}$$

waaruit gemakkelijk wordt afgeleid:

$$u=\frac{b}{c}.y,\quad v=\frac{f}{e}.y,\quad x=\frac{d}{e}.\frac{b}{c}\,y\quad\text{en}\quad z=\frac{df}{ce}y.$$

Hierdoor gaat de tweede der opgegeven vergelijkingen $vxy=c(u+v+x+y+z)$ over in $vxy=cy\left(\frac{b}{c}+\frac{f}{e}+\frac{db}{ec}+1+\frac{df}{ce}\right)$ d.i. $vx=c'$, wanneer wij namelijk $c\left(\frac{b}{c}+\frac{f}{e}+\frac{db}{ce}+1+\frac{df}{ce}\right)=c'$ stellen. Wanneer men door middel van de vergelijkingen (A) respectievelijk alle onbekenden uitdrukt in x, in z, in u, in v, dan zal men op soortgelijke wijze uit de eerste, derde, vierde en vijfde vergelijkingen vinden:

$$uv=b',\quad vx=c',\quad xy=d',\quad yz=e',\quad zu=f'.$$

Hieruit volgt door vermenigvuldiging en worteltrekking: $uvxyz=\pm\sqrt{b'c'd'e'f'}$ en omdat $uvxyz=c'e'$, heeft men door deeling: $$u=\pm\sqrt{\frac{b'd'f'}{c'e'}}.$$

Op gelijke wijze zal men al de andere onbekenden kunnen berekenen.

17. *Zij gegeven:* $x^2+y^2+p(x+y)=a$ en $qxy+r(x+y)+b=0$.

Men deelt de tweede vergelijking door q, vermenigvuldigt haar met 2 en telt haar bij de eerste vergelijking op, dan vindt men

$$x^2+2xy+y^2+\left(p+\frac{2r}{q}\right)(x+y)+\left(\frac{2b}{q}-a\right)=0$$

$$\text{of } (x+y)^2+\frac{pq+2r}{q}(x+y)+\frac{2b-aq}{q}=0.$$

Beschouwt men hierin $x+y$ als de onbekende, dan zal men voor $x+y$ twee waarden vinden, die wij voor kunnen stellen door $p'\pm\sqrt{q'}$; brengt men deze waarden over in de tweede vergelijking, dan wordt xy bekend en de oplossing is teruggebracht tot een vorig geval.

Aanmerking. De reeds door mij bijgebrachte voorbeelden zullen ruimschoots voldoende zijn, om aan te wijzen, hoe men *alle* wortels eener vergelijking leert vinden. In de volgende vergelijkingen zal ik mij bepalen tot het aanwijzen van den weg, dien men ter opsporing der wortels te volgen heeft.

18. *Gegeven zijnde* $x^4+y^4=a$ en $x+y=b$.

Men brengt de tweede vergelijking tot de vierde macht en trekt er de eerste af, waardoor men vindt $4x^3y+6x^2y^2+4xy^3=b^4-a$; bij elk lid dezer laatste vergelijking telt men $2x^2y^2$, waardoor zij overgaat in $4xy(x+y)^2=b^4-a+2x^2y^2$. Substitueert men hierin b^2 voor $(x+y)^2$, dan vindt men eene vierkantsvergelijking in xy. Zoodra deze bekend is, is de oplossing tot een vorig N°. teruggebracht.

19. *Zij gegeven:* $x^5+y^5=a$ en $x+y=b$.

Deel de tweede vergelijking op de eerste, daardoor vindt men:

$$x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4=\frac{a}{b} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Verhef de tweede vergelijking tot de vierde macht en trek daarvan de vergelijking (3), dan vindt men achtereenvolgens:

$$x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4=b^4$$

$$5x^3y+5x^2y^2+5xy^3=b^4-\frac{a}{b}$$

$$\text{of} \quad 5xy(x^2+xy+y^2)=b^4-\frac{a}{b} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Uit de tweede vergelijking volgt $x^2 + xy + y^2 = b^2 - xy$; substitueert men deze waarde in (4), dan vindt men:

$$3xy(b^2 - xy) = b^4 - \frac{a}{b}.$$

Uit welke vergelijking xy kan opgelost worden, zoodat het vraagstuk teruggebracht is tot een vorig N°.

20. *Zij gegeven:* $x^2 + y^2 = a$ en $xy = a'(x - y)$.

Men brengt de tweede vergelijking in het vierkant en vindt daardoor $x^2y^2 = a'^2x^2 - 2a'^2xy + a'^2y^2$; . . . (3) vervolgens vermenigvuldigt men de eerste vergelijking met a'^2 en trekt haar van (3), dan vindt men:

$$x^2y^2 = aa'^2 - 2a'^2xy,$$

uit welke vergelijking xy kan opgelost worden. Hierdoor is de oplossing teruggebracht tot die van een vorig N°.

21. *Zij gegeven:* $x^3y + xy^3 = a$ en $x^4 + y^4 = b$.

Uit de eerste vergelijking volgt $x^2 + y^2 = \frac{a}{xy}$ en na machtsverheffing

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = \frac{a^2}{x^2y^2} \text{ of } 2x^2y^2 + b = \frac{a^2}{x^2y^2}.$$

Uit welke laatste vergelijking x^2y^2, dus ook xy kan gevonden worden.

Men zal vinden:

$$x = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}\left[\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}\left\{b \pm \sqrt{(8a^2 + b^2)}\right\}} \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}\left\{3b \mp \sqrt{(8a^2 + b^2)}\right\}}\right]}$$

$$y = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}\left[\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}\left\{b \pm \sqrt{(8a^2 + b^2)}\right\}} \mp \sqrt{\tfrac{1}{2}\left\{3b \mp \sqrt{(8a^2 + b^2)}\right\}}\right]}$$

22. *Zij gegeven:* $(x^3 + y^3)(x^2 + y^2) = a$ *en* $x + y = b$.

Men deelt de eerste vergelijking door de tweede en vindt daardoor:

$$(x^2 - xy + y^2)(x^2 + y^2) = \frac{a}{b}.$$

Verder volgt nog uit de tweede vergelijking:

$$x^2 + y^2 = b^2 - 2xy \text{ en } x^2 - xy + y^2 = b^2 - 3xy.$$

Door deze waarden in de laatste vergelijking te substitueeren, vindt men $(b^2 - 2xy)(b^2 - 3xy) = \frac{a}{b}$,

uit welke vergelijking xy kan opgelost worden.

23. *Zij gegeven:* $(x^2+y^2)\times xy = a$ en $x+y=b$.

Deelt men de eerste vergelijking door de tweede, dan vindt men:

$(x^2-xy+y^2)xy = \frac{a}{b}$; uit de tweede vindt men

$$x^2-xy+y^2 = b^2-3xy;$$

de tweede in de eerste gesubstitueerd geeft:

$$xy(b^2-3xy) = \frac{a}{b};$$

waaruit xy en dus ook x en y kunnen opgelost worden.

24. *Zij gegeven:* $(x^2+y^2)(x+y)=a$ en $(x^2-y^2)(x-y)=b$.

Hiervoor kan men achtereenvolgens schrijven:

$$(x^2-xy+y^2)(x+y)^2 = a \text{ en } (x^2+xy+y^2)(x-y)^2 = b$$

$$\left\{(x^2+y^2)-xy\right\}\left\{(x^2+y^2)+2xy\right\} = a$$

en $$\left\{(x^2+y^2)+xy\right\}\left\{(x^2+y^2)-2xy\right\} = b,$$

of $$(x^2+y^2)^2+xy(x^2+y^2)-2x^2y^2 = a,$$

$$(x^2+y^2)^2-xy(x^2+y^2)-2x^2y^2 = b;$$

waaruit door optelling en aftrekking:

$$(x^2+y^2)^2-2x^2y^2 = \tfrac{1}{2}(a+b)$$

$$xy(x^2+y^2) = \tfrac{1}{2}(a-b).$$

Uit de laatste vergelijking volgt nu $(x^2+y^2)^2 = \frac{(a-b)^2}{4x^2y^2}$, en deze waarde in de voorlaatste gesubstitueerd, geeft:

$$\frac{(a-b)^2}{4x^2y^2} - 2x^2y^2 = \tfrac{1}{2}(a+b),$$

vergelijking, waaruit men xy kan oplossen. Het zal dan verder al zeer weinig moeite kosten, om de onbekenden x en y te vinden.

25. *Zij gegeven:* $x^7y^2+x^2y^7 = a$ *en* $x^2y+xy^2 = b$.

Deelt men de eerste vergelijking door de tweede, dan vindt men, na met xy vermenigvuldigd te hebben:

$$x^2y^2(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4) = \frac{a}{b}xy \quad \ldots \quad (3)$$

Het vierkant van de tweede vergelijking vermenigvuldigt men met $5xy$, en dit bij (3) opgeteld, geeft:

$$x^2y^2(x^4+4x^3y+11x^2y^2+4xy^3+y^4) = \frac{5b^2+a}{b}xy$$

en van beide leden $5x^4y^4$ aftrekkende

$$x^2y^2(x+y)^4 = \frac{5b^2+a}{b} \times xy - 5x^4y^4.$$

Uit de tweede vergelijking volgt verder $x^4y^4(x+y)^4 = b^4$, derhalve $\frac{b^4}{x^2y^2} = \frac{5b^2+a}{b} \times xy - 5x^2y^4$

of $x^6y^6 - \frac{5b^2+a}{5b} x^3y^3 + \frac{b^4}{5} = 0.$

Uit de laatste vergelijking kan xy en dus ook x en y berekend worden.

26. *Zij gegeven:* $xy+n(x+y)=a$, $yz+n(y+z)=b$, $xz+n(x+z)=c$.

Telt men n^2 bij de beide leden van al deze vergelijkingen, dan vindt men:

$(x+n)(y+n)=a+n^2$, $(y+n)(z+n)=b+n^2$, $(z+n)(x+n)=c+n^2$.

Beschouwt men hierin nu $x+n$, $y+n$, $z+n$ als nieuwe onbekenden, dan kan men ze op grond van een vorig N°. gemakkelijk oplossen.

27. *Zij gegeven de vergelijkingen:* $x+y+z+u=a$, $x+2y+4z+8u=b$, $x+3y+9z+27u=c$, $x+4y+16z+64u=d$.

Deze vergelijkingen worden zeer gemakkelijk opgelost door herhaalde aftrekking. Trekt men namelijk de eerste van de tweede, de tweede van de derde enz., dan vindt men:

$y+3z+7u=b-a$, $y+5z+19u=c-b$, $y+7z+37u=d-c$;

$2z+12u=c-2b+a$, $2z+18u=d-2c+b$.

$6u=d-3c+3b-a$.

Hieruit kunnen de onbekenden gemakkelijk opgespoord worden.

28. *Zij gegeven:* $x+y+z=a$, $x^2+y^2+z^2=b$ *en* $x+z=\frac{2xz}{y}$.

Uit de derde vergelijking volgt $xy+yz-2xz=0$ . . . (4)

Trekt men nu van het vierkant der eerste de tweede vergelijking, dan vindt men:

$$xy+xz+yz=\frac{a^2-b}{2},$$

en door hiervan (4) af te trekken : $xz = \frac{a^2-b}{6}$,

dus $xy + yz = \frac{a^2-b}{3}$.

Trekt men verder het viervoud der laatste vergelijking van het vierkant der eerste, dan heeft men :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz = \frac{4b-a^2}{3},$$

of $$x - y + z = \pm\sqrt{\frac{4b-a^2}{3}}.$$

Hierdoor wordt y bekend, alsmede $x+z$, daar verder xz reeds gevonden is, is de oplossing tot een vorig N°. terug gebracht.

29. *Zij gegeven :* $(a+c)x - (c-a)y = 2bc$, . . . (1)
$(b+c)z - (b-c)x = 2ab$, . . . (2)
$(a+b)y - (a-b)z = 2ac$, . . . (3)

Vermenigvuldig (1) met $(b-c)$ en (2) met $(a+c)$ en neem de som dezer producten, dan is :
$(a+c)(b+c)z - (b-c)(c-a)y = 2ab(a+c) + 2bc(b-c)$ . . . (4)
Vermenigvuldigt men (4) met $(a+b)$ en (3) met $(b-c)$ en $(c-a)$; telt men deze producten bij elkaâr op en deelt men door $2(ac^2 + b^2c + a^2b + abc)$, dan vindt men :

$$z = a + b - c.$$

Substitueert men deze waarde van z in de vergelijkingen (2) en (3), dan worden x en y onmiddellijk gevonden.

30. *Zij gegeven :* $y^3 - y^2 + 2y + 2x - x^2 = 0$ . . . (1)
en $y^4(4-3x) - y^2x - y^2(6x - 5x^2) - y(6x^2 + x^3) = -x^4$. (2)
Uit (2) volgt na behoorlijke ontwikkeling en herleiding :
$x^3(x^2+y^2) + 4y^2(x^2+y^2) - 3xy(2x+2y+y^2) - xy(x^2+y^2) = 0$ (3)
uit (1) vindt men $2x + 2y + y^3 = x^3 + y^3$;
uit (3) volgt derhalve $(x^2 - 4xy + 4y^2)(x^2 + y^2) = 0$,
of $x^2 - 4xy + 4y^2 = 0$ en $x^2 + y^2 = 0$;
d. i. $x = 2y$, $x = 2y$, $x = y\sqrt{-1}$, $x = -y\sqrt{-1}$.
Deze waarden in (1) overbrengende, heeft men :

$$y^3 - 5y^2 + 6y = 0,\ y^3 - 5y^2 + 6y = 0,$$
$$y^3 + (2 + 2\sqrt{2})y = 0,\ y^3 + (2 - \sqrt{2})y = 0,$$

waaruit twaalf waarden voor y gevonden worden, waaronder vier gelijke waarden 0.

Aanmerking. De bovenstaande voorbeelden, die nog met een groot aantal zouden kunnen vermeerderd worden, zullen wel voldoende zijn, om den Lezer eenigszins bekend te maken met de kunstgrepen, waarvan men zich bedient, om soortgelijke vergelijkingen op te lossen. Het is intusschen alleen door langdurige oefening, dat in zoodanige oplossingen eenige vaardigheid verkregen wordt.

31. Wanneer in eene vergelijking de onbekenden met elkander kunnen verwisseld worden, zonder dat de vergelijking daardoor verandert, dan noemt men zoodanige vergelijking *symmetriek ten opzichte van de onbekenden;* zijn van twee of meer vergelijkingen de onbekenden en bekenden zoodanig gegeven, dat door eene regelmatige verandering der letters de eene vergelijking overgaat in de andere, dan noemt men die vergelijkingen *onderling symmetriek.* Zoo is de vergelijking $x^4 + x^2y^2 + y^4 = b$ symmetriek ten opzichte harer onbekenden, want verandert men x in y en y in x, dan vindt men dezelfde vergelijking in eene andere rangschikking. Klaarblijkelijk zullen in zoodanige vergelijkingen de waarden, die voor de eene onbekende voldoen, ook voor de andere voldoen; men hebbe intusschen te letten, welke waarden bij elkander behooren. Zoo vindt men in N°. 7 x en y beiden gelijk aan $\frac{1}{2}b \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4a-b^2}{3b}}$; maar omdat $x+y=b$ gegeven is, zal men bij $x=\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4a-b^2}{3b}}$ moeten nemen $y=\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4a-b^2}{3b}}$ en bij $x=\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4a-b^2}{3b}}$ ook $y=\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4a-b^2}{3b}}$.

N°. 12 levert een voorbeeld van onderling symmetrieke vergelijkingen.

Verandert men daarin x in y, y in z, z in u, a in c, c in b en b in a, dan krijgt men dezelfde vergelijkingen, die men oorspronkelijk had.

Wanneer men twee onbekenden voor elkander in de plaats kan stellen en de vergelijking daardoor dezelfde absolute waarde blijft behouden, maar van teeken verandert, dan noemt men

zoodanige vergelijking eene *alterneerende*; N°. 8 levert ons daarvan een voorbeeld. Daar toch is gegeven:

$$x^3 - y^3 = a \quad \text{en} \quad x - y = b;$$

schrijft men nu daarin x voor y en y voor x, dan gaan deze vergelijkingen over in

$$x^3 - y^3 = -a \quad \text{en} \quad x - y = -b.$$

---

§ 13. Over de oplossing der vergelijkingen van den derden graad.

1. Wanneer gegeven is de vergelijking van den derden graad

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

dan vindt men na deeling door A

$$x^3 + \frac{B}{A}x^2 + \frac{C}{A}x + \frac{D}{A} = 0,$$

en na vermenigvuldiging met de meetk. reeks $1, A, A^2, A^3$

$$y^3 + By^2 + CAy + DA^2 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Deze herleiding altijd mogelijk zijnde, blijkt ons daaruit, dat de vergelijking (2) even algemeen is, als de vergelijking (*A*). Stelt men nu in de vergelijking (2) $y = x - \frac{1}{3}B$, dan vindt men:

$$\begin{array}{rl} y^3 = & x^3 - x^2B + \frac{1}{3}xB^2 - \frac{1}{27}yB^3 \\ By^2 = & \quad x^2B - \frac{2}{3}xB^2 + \frac{1}{9}B^3 \\ CAy = & \quad\quad xCA - \frac{1}{3}ABC \\ DA^2 = & \quad\quad\quad DA^2 \end{array}$$

Waaruit door optelling volgt:

$$y^3 + By^2 + CAy + DA^2 = x^3 + Px + Q = 0, \quad . \quad . \quad (3)$$

waarin $P = CA - \frac{1}{3}B^2$ en $Q = \frac{2}{27}B^3 - \frac{1}{3}ABC + DA.$

Kan men dus de wortels opsporen uit de vergelijking (3), dan zal men die moeten verminderen met $\frac{1}{3}B$, om de wortels te hebben der vergelijking (2), en deze wederom door A deelen, om de wortels te vinden der vergelijking (1). — De laatste herleiding eveneens altijd mogelijk zijnde, zullen wij in den loop van dit hoofdstuk veronderstellen, dat de algemeene gedaante der vergelijkingen van den derden graad is:

$$x^3 + Px + Q = 0.$$

2. Stellen wij, om de wortels der vergelijking $x^3+Px+Q=0$ te vinden, $x=y+z$, dan is:

$$x^3=(y+z)^3=y^3+3yz(y+z)+z^3$$

of $$x^3-3yzx-(y^3+z^3)=0;$$

en dewijl deze vergelijking identiek is met de opgegevene, heeft men de twee nieuwe vergelijkingen:

$$3yz=-P \quad \text{en} \quad y^3+z^3=-Q$$

of $$yz=-\tfrac{1}{3}P \quad \text{en} \quad y^6+2y^3z^3+z^6=Q^2$$

$$4y^3z^3=-\tfrac{4}{27}P^3 \quad \text{en} \quad y^3-z^3=\pm\sqrt{(Q^2+\tfrac{4}{27}P^3)};$$

waaruit: $$y=\sqrt[3]{\left\{-\tfrac{1}{2}Q\pm\sqrt{(\tfrac{1}{4}Q^2+\tfrac{1}{27}P^3)}\right\}},$$

$$z=\sqrt[3]{\left\{-\tfrac{1}{2}Q\mp\sqrt{(\tfrac{1}{4}Q^2+\tfrac{1}{27}P^3)}\right\}}.$$

Van het dubbele teeken, dat in deze beide vormen voorkomt, gebruikt men er slechts een, omdat de vergelijkingen, waaruit deze wortels gevonden worden, symmetriek zijn (Verg. § 12, 31).

Stelt men nu den absoluten derdemachtswortel uit

$$-\tfrac{1}{2}Q+\sqrt{(\tfrac{1}{4}Q^2+\tfrac{1}{27}P^3)}$$

gelijk aan p, den derdemachtswortel uit

$$-\tfrac{1}{2}Q-\sqrt{(\tfrac{1}{4}Q^2+\tfrac{1}{27}P^3)}$$

gelijk aan q en de beide imaginaire derdemachtswortels uit de eenheid $=\alpha$ en α_1, dan kan men voor $x=y+z$ schrijven:

$$\begin{array}{lll} p+q & p+\alpha q & p+\alpha_1 q \\ \alpha p+q & \alpha p+\alpha q & \alpha p+\alpha_1 q \\ \alpha_1 p+q & \alpha_1 p+\alpha q & \alpha_1 p+\alpha_1 q; \end{array}$$

zoodat men negen wortels zou vinden, indien niet tevens voldaan moest worden aan de omstandigheid

$$yz=-\tfrac{1}{3}P,$$

d. i. als het product van de beide deelen der wortels niet reëel moest zijn.

Neemt men dus:

voor y: p, p, αp, αp, $\alpha_1 p$, $\alpha_1 p$,

voor z: αq, $\alpha_1 q$, q, αq, q, $\alpha_1 q$,

dan kan het product yz niet reëel zijn; derhalve voldoen alleen de wortels:

$$p+q, \quad \alpha p+\alpha_1 q \quad \text{en} \quad \alpha_1 p+\alpha q$$

d. i. m. a. w., men zal vinden:

$$x_1 = \sqrt[3]{\left\{-\tfrac{1}{2}Q+\sqrt{(\tfrac{1}{4}Q^2+\tfrac{1}{27}P^3)}\right\}}+\sqrt[3]{\left\{-\tfrac{1}{2}Q-\sqrt{(\tfrac{1}{4}Q^2+\tfrac{1}{27}P^3)}\right\}};$$

$$x_2 = \sqrt[3]{\left\{-\tfrac{1}{2}Q+\sqrt{(\tfrac{1}{4}Q^2+\tfrac{1}{27}P^3)}\right\}}\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}+$$

$$+\sqrt[3]{\left\{-\tfrac{1}{2}Q-\sqrt{(\tfrac{1}{4}Q^2+\tfrac{1}{27}P^3)}\right\}}\times\frac{-1-\sqrt{-3}}{2};$$

$$x_3 = \sqrt[3]{\left\{-\tfrac{1}{2}Q+\sqrt{(\tfrac{1}{4}Q^2+\tfrac{1}{27}P^3)}\right\}}\times\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}+$$

$$+\sqrt[3]{\left\{-\tfrac{1}{2}Q-\sqrt{(\tfrac{1}{4}Q^2+\tfrac{1}{27}P^3)}\right\}}\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.$$

Aanmerking. De eerste rechtstreeksche oplossing eener derdemachtsvergelijking is van SCIPIO FERREO 1505, die de vergelijking $x^3+mx=a$ oploste en aan zijnen leerling FIORE de oplossing mededeelde. Deze ging met TARTALEA uit Brescia eene weddingschap aan, wie van hen het eerst dertig voorstellen, die de een den ander op zou geven, oplossen konde. TARTALEA vond de oplossing der vergelijking $x^3+mx=a$ en ook die van $x^3=mx+a$. Hij leerde deze oplossing aan HIERONYMUS CARDANUS van Milaan, die hem de stiptste geheimhouding moest beloven, doch zijn woord schond en in 1545 in het werk: *Artis magnae sive de regulis Algebrae liber unus*, de oplossing der kubische vergelijkingen openbaar maakte. Hierover ontstond tusschen hem en TARTALEA, † 1557, een hevige strijd, die door den laatste in zijne *Quesiti et inventioni diverse* is medegedeeld. CARDANUS erkende, dat hij de oplossing van TARTALEA geleerd had, doch verdedigde zich met het beweeren, dat hij de bewerking het eerst bewezen had. Hoe het zij, hij kreeg de eer der uitvinding en nog heden ten dage spreekt men van den regel van CARDANUS in plaats van dien van TARTALEA. (KLÜGEL W. I. e. v. *Algebra.*)

3. a) Wanneer wij, even als in het vorige N°.

$$p = \sqrt[3]{\left\{-\tfrac{1}{2}Q+\sqrt{(\tfrac{1}{4}Q^2+\tfrac{1}{27}P^3)}\right\}}$$

en

$$q = \sqrt[3]{\left\{-\tfrac{1}{2}Q-\sqrt{(\tfrac{1}{4}Q^2+\tfrac{1}{27}P^3)}\right\}}$$

stellen, dan vindt men voor p en q twee reëele waarden, zoolang $\frac{1}{4}Q^2 + \frac{1}{27}P^3$ positief is, daaruit volgt dan, dat $x_1 = p + q$ een reëele wortel is,

en $\left.\begin{matrix} x_2 = \alpha p + \alpha q \\ x_3 = \alpha^2 p + \alpha q \end{matrix}\right\}$ imaginaire wortels zijn.

b) Is $\frac{1}{4}Q^2 + \frac{1}{27}P^3 = 0$, dan vindt men $p = q = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}Q}$. Alsdan wordt

$$\begin{aligned} x_1 &= p + q = 2q = -2\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}Q} \\ x_2 &= -p \quad\;\; = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}Q} \\ x_3 &= -p \quad\;\; = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}Q} \end{aligned}$$

zoodat de vergelijking in dat geval drie reëele wortels heeft, waarvan er twee aan elkander gelijk zijn.

c) Is $\frac{1}{4}Q^2 + \frac{1}{27}P^3$ negatief, dan kan zulks alleen plaats hebben, omdat $\frac{1}{27}P^3$ negatief en $> \frac{1}{4}Q^2$ is, of wat hetzelfde is, indien men heeft: $\frac{3}{2}P\sqrt{3} > Q$; welk teeken toch Q voor zich hebbe, $\frac{1}{4}Q^2 = (\frac{1}{2}Q)^2$ zal altoos positief zijn. Indien $\frac{1}{27}P^3$ negatief is, is zulks ook het geval met P en de oorspronkelijke vergelijking is dus:

$$x^3 - Px + Q = 0 \quad \text{of} \quad x^3 - Px - Q = 0.$$

voor $x = \sqrt{P}$ wordt $x^3 - Px + Q = P\sqrt{P} - P\sqrt{P} + Q$ posit.
voor $x = \frac{1}{3}\sqrt{3P}$ wordt $x^3 - Px + Q = \frac{1}{9}P\sqrt{3P} - \frac{1}{3}P\sqrt{3P} + Q$ negat.
voor $x = 0$ wordt $x^3 - Px + Q = Q$ posit.

voor a negatief
$(a^2 - P)$ positief
en $a(a^2 - P) > P$
} wordt $x^3 - Px + Q$ negatief.

De opgegeven vergelijking $x^3 - Px + Q$ heeft dus één wortel tusschen $\sqrt{P}$ en $\frac{1}{3}\sqrt{3P}$, één tusschen $\frac{1}{3}\sqrt{3P}$ en 0 en een derden negatieven wortel tusschen 0 en $a(a^2 - P) > Q$, mits a negatief zij; in het geval derhalve, dat de wortels p en q eene imaginaire gedaante aannemen, heeft de vergelijking drie reëele wortels, want voor de tweede vergelijking, die dezelfde wortels heeft, maar met tegengestelde teekens, geldt dezelfde redeneering. Dit geval is bekend onder den naam van „*casus irreductibilis*" = onherleidbaar geval, en zal in het volgend N°. behandeld worden.

Aanmerking. CARDANUS heeft zich zeer uitvoerig met het onherleidbaar geval bezig gehouden in het werk, ge-

titeld: *Aliza regula;* hij is echter tot geene goede verklaring kunnen geraken. Nog heeft hij opgemerkt, dat de imaginaire wortels steeds paarsgewijze voorkomen en dat in eene volledige derdemachtsvergelijking, die op 0 herleid is, het aantal positieve wortels overeenkomt met het aantal variatiën. (KLÜGEL I, pag. 37).

4. Om de reëele wortels der vergelijking $x^3 - P_x + Q = 0$ te bepalen, voor het geval dat $\frac{1}{4}Q^2 - \frac{1}{27}P^3$ negatief is, moet men den derdemachtswortel uit $-\frac{1}{2}Q \pm \sqrt{(\frac{1}{4}Q^2 - \frac{1}{27}P^3)}$ ontwikkelen door middel van het binomium van NEWTON. (Zie mijne *Theor. der Algem. Rekenk.*, II. pag. 180.) Om deze ontwikkeling te verrichten, stellen wij gemakshalve:
$-\frac{1}{2}Q = a$ en omdat $\sqrt{(\frac{1}{4}Q^2 - \frac{1}{27}P^3)}$ imaginair moet zijn, stellen wij deze waarde voor door $a\sqrt{-k}$.

Wij vinden dan voor de wortels der vergelijking $x^3 - P_x + Q = 0$:

$$x_1 = \sqrt[3]{(a + a\sqrt{-k})} + \sqrt[3]{(a - a\sqrt{-k})},$$

$$x_2 = \sqrt[3]{(a + a\sqrt{-k})} \times \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} + \sqrt[3]{(a - a\sqrt{-k})} \times \frac{-1-\sqrt{-3}}{2},$$

$$x_3 = \sqrt[3]{(a + a\sqrt{-k})} \times \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} + \sqrt[3]{(a - a\sqrt{-k})} \times \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.$$

Ontwikkelt men nu den vorm $(a + a\sqrt{-k})^{\frac{1}{3}}$, dan vinden wij, dat alle termen van oneven rang reëel zullen zijn, terwijl alle termen van even rang imaginair blijven; ontwikkelt men $(a - a\sqrt{-k})^{\frac{1}{3}}$, dan zal zich daar het zelfde verschijnsel voordoen, maar daarbij valt dan nog op te merken, dat alle termen van oneven rang dezelfde teekens, die van even rang de tegengestelde teekens zullen hebben van de overigens gelijke termen in de eerste ontwikkeling. — Vereenigt men de reëele termen tot één term en de imaginaire eveneens, dan zal men dus kunnen stellen: (Vergel. ook § 3, 4.)

$$(a + a\sqrt{-k})^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}}(1 + \sqrt{-k})^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}} \times (p + q\sqrt{-1})$$

$$(a - a\sqrt{-k})^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}}(1 - \sqrt{-k})^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}} \times (p - q\sqrt{-1}),$$

waarin p en q geheele of gebroken positieve getallen zijn; derhalve: $x_1 = (a + a\sqrt{-k})^{\frac{1}{3}} + (a - a\sqrt{-k})^{\frac{1}{3}} = 2p\sqrt[3]{a}$.

Verder is:

$$(a+a\sqrt{\ }-k)^{\frac{1}{3}} \times \frac{-1+\sqrt{\ }-3}{2} = \tfrac{1}{3}a^{\frac{1}{3}}(p+q\sqrt{\ }-1)(-1+\sqrt{\ }-3) =$$

$$= \tfrac{1}{2}\{-(p+q\sqrt{3}) + p\sqrt{\ }-3-q\sqrt{\ }-1\}\sqrt[3]{a},$$

$$(a-a\sqrt{\ }-k)^{\frac{1}{3}} \times \frac{-1-\sqrt{\ }-3}{2} = \tfrac{1}{3}a^{\frac{1}{3}}(p-q\sqrt{\ }-1)(-1-\sqrt{\ }-3) =$$

$$= \tfrac{1}{2}\left\{-(p+q\sqrt{\ }3) - p\sqrt{\ }-3+q\sqrt{\ }-1\right\}\sqrt[3]{a};$$

derhalve $x_2 = -(p+q\sqrt{\ }3)\sqrt[3]{a} = -\frac{x_1}{2} - q\sqrt{\ }3 \times \sqrt[3]{a}$.

Eindelijk:

$$(a+a\sqrt{\ }-k)^{\frac{1}{3}} \times \frac{-1-\sqrt{\ }-3}{2} = \tfrac{1}{3}a^{\frac{1}{3}}(p+q\sqrt{\ }-1)(-1-\sqrt{\ }-3) =$$

$$= \tfrac{1}{2}\left\{-(p-q\sqrt{\ }3) - p\sqrt{\ }-3-q\sqrt{\ }-1\right\}\sqrt[3]{a},$$

$$(a-a\sqrt{\ }-k)^{\frac{1}{3}} \times \frac{-1+\sqrt{\ }-3}{2} = \tfrac{1}{3}a^{\frac{1}{3}}(p-q\sqrt{\ }-1)(-1+\sqrt{\ }-3) =$$

$$= \tfrac{1}{2}\left\{-(p-q\sqrt{\ }3) + p\sqrt{\ }-3 + q\sqrt{\ }-1\right\}\sqrt[3]{a}$$

derhalve $x_3 = -(p-q\sqrt{\ }3)\sqrt[3]{a} = -\frac{x_1}{2} + q\sqrt{\ }3 \times \sqrt[3]{a}$.

Om nu de waarden van p en q te vinden, hebben wij:

$$(1+\sqrt{\ }-k)^{\frac{1}{3}} = 1 + \tfrac{1}{3}\sqrt{\ }-k + \tfrac{1}{9}k - \tfrac{5}{81}k\sqrt{\ }-k - \tfrac{10}{243}k^2 +$$
$$\tfrac{22}{729}k^2\sqrt{\ }-k + \tfrac{154}{6561}k^3, \ldots\ldots\ldots$$

waarin $p = 1 + \frac{1}{9}k - \frac{10}{243}k^2 + \frac{154}{6561}k^3 - \frac{385}{59049}k^4 +$ enz.

en $q = \frac{1}{3} - \frac{5}{81}k + \frac{22}{729}k^2 - \frac{374}{19683}k^3 +$ enz.

Wij vinden derhalve eindelijk:

$$x_1 = 2p\sqrt[3]{a} = 2\left\{1 + \tfrac{1}{9}k - \tfrac{10}{243}k^2 + \tfrac{154}{6561}k^3 - \tfrac{385}{59049}k^4 +\right.$$
$$\left. + \tfrac{5236}{1594323}k^5 - \ldots.\right\}\sqrt[3]{a},$$

$$x_2 \text{ of } x_3 = -\frac{x_1}{2} \mp q\sqrt{\ }3 \times \sqrt[3]{a} = \frac{x_1}{2} \mp \left\{1 - \tfrac{5}{27}k^2 + \tfrac{22}{243}k^3 -\right.$$
$$\left. - \tfrac{374}{6561}k^3 + \tfrac{2156}{59049}k^4 - \ldots..\right\}\sqrt[3]{a} \times \sqrt{\ }\frac{k}{3}.$$

In den regel is het gemakkelijk de coëfficiënten van de machten

van k in eene tiendeelige breuk te veranderen, ik laat die hier dus volgen:

$$\frac{1}{9} = 0{,}11111\ 11111 \qquad \frac{5}{27} = 0{,}18518\ 51853$$
$$\frac{10}{243} = 0{,}04115\ 22634 \qquad \frac{23}{243} = 0{,}09053\ 49795$$
$$\frac{154}{6561} = 0{,}02347\ 20317 \qquad \frac{374}{6561} = 0{,}05700\ 35055$$
$$\frac{935}{59049} = 0{,}01583\ 43071 \qquad \frac{2150}{531441} = 0{,}04046\ 54514$$
$$\frac{5591}{478296} = 0{,}01169\ 00193$$

5. Ter toepassing zullen wij de wortels bepalen uit de vergelijking

$$x^3 + 3x^2 - 2x - 24 = 0.$$

Stellen wij om den tweeden term te verdrijven $x = y - \frac{1}{3}$, dan vinden wij:

$$\begin{aligned} x^3 &= y^3 - 3y^2 + \tfrac{1}{3}y - \tfrac{1}{27} \\ 3x^2 &= \qquad 3y^2 - \tfrac{2}{3}y + \tfrac{1}{9} \\ -2x &= \qquad\qquad - 2y + \tfrac{2}{3} \\ -24 &= \qquad\qquad\qquad - 24. \end{aligned}$$

Zoodat de primitieve vergelijking overgaat in:

$$y^3 - \tfrac{11}{3}y - \tfrac{308}{27} = 0;$$

waaruit na vermenigvuldiging met de reeks 1, 3, 9, 27 gevonden wordt:

$$x^3 - 93x - 308 = 0.$$

Vergelijken wij nu deze vergelijking met de vergelijking $x^3 - Px + Q = 0$, dan volgt daaruit, dat men heeft

$P = 93$, $Q = -308$, $a = -\frac{1}{2}Q = 154$ en $a \mp k = \sqrt{(\frac{1}{4}Q^2 - \frac{1}{27}P^3)}$,

uit welke laatste vergelijking na herleiding volgt $k = \frac{6075}{3969}$.

Brengen wij nu deze waarden over in:

$$x_1 = 2\left\{1 + \tfrac{1}{9}k - \tfrac{10}{243}k^2 + \tfrac{154}{6561}k^3 - \tfrac{935}{59049}k^4 + \tfrac{5591}{478296}k^5 \ldots\right\} \sqrt[3]{a}$$

$$x_2 \text{ of } x_3 = -\frac{x_1}{2} \mp \left\{1 - \tfrac{5}{27}k + \tfrac{23}{243}k^2 - \tfrac{374}{6561}k^3 + \tfrac{2150}{531441}k^4 - \ldots\right\} \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{\frac{k}{3}}$$

en bedienen wij ons daarbij van logarithmen, dan komt de bewerking als volgt:

$k = \frac{6075}{23716}$

$\log. k = 9,408\,5049 - 10$ $\qquad$ $\log. \frac{1}{9} = 9,045\,7575 - 10$

$\log. k^2 = 8,817\,0098 - 10$ $\qquad$ $\log. k = 9,408\,5049 - 10$

$\log. k^3 = 8,225\,5147 - 10$ $\qquad$ $\log. \frac{1}{9}k = 8,454\,3624 - 10$

$\log. k^4 = 7,634\,0196 - 10$ $\qquad$ $\frac{1}{9}k = 0,0284683$

$\log. k^6 = 7,042\,5245 - 10$

$\log. \frac{154}{6561} = 8,370\,5507 - 10$

$\log. \frac{55913}{4782969} = 8,067\,8152 - 10$ $\qquad$ $\log. k^3 = 8,225\,5147 - 10$

$\log. k^5 = 7,042\,5245 - 10$ $\qquad$ $\log. \frac{154}{6561}k^3 = 6,596\,0654 - 10$

$\log. \frac{55913}{4782969}k^5 = 5,1103397 - 10$ $\qquad$ $\frac{154}{6561}k^3 = 0,00039451$

$\frac{55913}{4782969}k^5 = 0,0000128$

$$1 + \frac{1}{9}k + \frac{154}{6561}k^3 + \frac{55913}{4782969}k^5 = 1,0288757$$

$\log. \frac{10}{243} = 8,614\,3937 - 10$ $\qquad$ $\log. \frac{935}{59049} = 8,199\,5990 - 10$

$\log. k^2 = 8,817\,0098 - 10$ $\qquad$ $\log. k^4 = 7,634\,0196 - 10$

$\log. \frac{10}{243}k^2 = 7,431\,4035 - 10$ $\qquad$ $\log. \frac{935}{59049}k^4 = 5,833\,6186 - 10$

$\frac{10}{243}k^2 = 0,0027002$ $\qquad$ $\log. \frac{935}{59049}k^4 = 0,0000681$

$\frac{10}{243}k^2 + \frac{935}{59049}k^4 = 0,002\,7684.$

$$x_1 = 2\left\{1,028\,8757 - 0,002\,7684\right\}\sqrt[3]{154} = 2,052\,2146\sqrt[3]{154}$$

$$\begin{aligned} \log. 2,052\,2146 &= 0,312\,1819 \\ \tfrac{1}{3}\log. 154 &= 0,729\,1736 \\ \hline \log. x_1 &= 1,0413555 \\ x_1 &= 10,999 \end{aligned}$$

Door op dergelijke wijze te handelen, zal men vinden:

$$x_2 \text{ of } x_3 = -\frac{x_1}{2} \mp 1,5001$$

welke waarden tot in honderdste deelen nauwkeurig zijn.

Neemt men namelijk $x_1 = 11$, $x_2 = -\frac{11}{2} - 1,5$ en $x_3 = -\frac{11}{2} + 1,5$, dan vindt men $x_1 = 11$, $x_2 = -7$ en $x_3 = -4$, — welke waarden voldoen aan de vergelijking $x^3 - 93x - 308 = 0$; want

$$-(x_1 + x_2 + x_3) = -(11 - 7 - 4),\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 =$$
$$= -77 - 44 + 28 = -93 \text{ en } -(x_1x_2x_3) = -308.$$

Deelt men deze wortels door 3, dan vindt men $\frac{11}{3}$; $-\frac{7}{3}$ en $-\frac{4}{3}$ voor de wortels van de vergelijking

$$y^3 - \tfrac{1}{3}\tfrac{1}{3}y - \tfrac{3}{2}\tfrac{0}{7}\tfrac{8}{7};$$

terwijl men eindelijk, door $x = y - \frac{1}{3}$ te nemen, 2, -4 en -3 vindt, als wortels van de opgegeven vergelijking:

$$x^3 + 5x^2 - 2x - 24 = 0.$$

6. *Men vraagt de wortels van de vergelijking* $x^3 - 3x^2 + x + 5 = 0$.

Stellen wij hierin $x = y + 1$, dan gaat de opgegeven vergelijking over in:

$$\begin{array}{rcl} x^3 & = & y^3 + 3y^2 + 3y + 1 \\ -3x^2 & = & -3y^2 - 6y - 3 \\ x & = & y + 1 \\ 5 & = & 5 \end{array}$$

derhalve $x^3 - 3x^2 + x + 5 = y^3 - 2y + 4 = 0$, waarin $P = 2$ en $Q = 4$.

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}Q^2 - \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{7}P^3)} = \sqrt{(4 - \tfrac{8}{2}\tfrac{1}{7})} = \tfrac{1}{3}^0\sqrt{3}$$

$$y_1 = \sqrt[3]{\left\{-\tfrac{1}{2}Q + \sqrt{(\tfrac{1}{4}Q^2 - \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{7}P)}\right\}} + \sqrt[3]{\left\{-\tfrac{1}{2}Q^2 - \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{7}P^3)\right\}} =$$

$$= \sqrt[3]{(-2 + \tfrac{1}{3}^0\sqrt{3})} + \sqrt[3]{(-2 - \tfrac{1}{3}^0\sqrt{3})}.$$

Past men hierop de leerwijze toe om den derdemachtswortel te trekken uit binomia met wortelvormen, dan vindt men: (Vergel. *Theorie der Algem. Rekenk.* II. pag. 191.)

$$y_1 = -1 + \tfrac{1}{3}\sqrt{3} + (-1 - \tfrac{1}{3}\sqrt{3}) = -2$$

en dewijl $x = y + 1$, is $x = -1$ een wortel van de vergelijking $x^3 - 3x^2 + x + 5 = 0$. Het eerste lid dezer vergelijking is dus deelbaar door $x + 1$, waardoor men vindt, volgens de methode van HORNER (*Th. der Alg. Rek.* I. pag. 99.):

$$\begin{array}{rrrrr} & 1 & -3 & +1 & +5 \\ -1 & & -1 & +4 & -5 \\ \hline & 1 & -4 & +5 & \end{array}$$

$$x^2 - 4x + 5.$$

Deze vierkantsvergelijking oplossende vindt men:

$$x = 2 \pm \sqrt{-1}.$$

De drie wortels der opgegeven vergelijking zijn derhalve:

$$x_1 = -1 \qquad x_2 = 2 + \sqrt{-1} \qquad x_3 = 2 - \sqrt{-1}.$$

Aanmerking. 1. De beide bovenstaande voorbeelden zullen wel voldoende zijn om aan te toonen, hoe men door middel van de formule van TARTALEA eene derdemachtsvergelijking op moet lossen. Men ziet daaruit tevens, dat men, zoodra men een meetbaren wortel gevon-

den heeft, de beide andere wortels kan vinden door middel van de oplossing eener vierkantsvergelijking.

2. LEIBNITZ schijnt de eerste geweest te zijn, die er op gewezen heeft, dat in het onherleidbare geval, wortels gevonden kunnen worden door middel van reeksen; NICOLE heeft het eerst zoodanige reeksen uitgewerkt, doch zijne verhandeling is tamelijk onbegrijpelijk. KÄSTNER heeft in zijne *Analysis* uitvoerig aangetoond, dat de regel van TARTALEA drie reëele wortels kan opleveren. Zonder eenig verder resultaat hebben zich na hem nog verscheidene schrijvers met deze formules bezig gehouden, o. a. MAZÈRES, NICOLAI, CANTERZANI e. a. (Vergel. KLUGEL. I. pag. 393).

7. Eene andere oplossing der derdemachtsvergelijkingen wordt verkregen door middel der goniometrie. *) Volgens eene bekende formule toch is:

$$\sin(a+b+c) = \sin\left\{(a+b)+c\right\} =$$
$$\sin(a+b)\cos c + \sin c\cos(a+b) =$$
$$= \left\{\begin{array}{l}\sin a\cos b\cos c \\ \quad + \sin b\cos a\cos c - \sin a\sin b\sin c. \\ \quad + \sin c\cos a\cos b.\end{array}\right.$$

Stelt men daarin nu $a = b = c = \varphi$ en $\cos^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi$, dan vindt men:

$\sin 3\varphi = 3\sin\varphi\cos^2\varphi - \sin^3\varphi = 3\sin\varphi - 3\sin^3\varphi - \sin^3\varphi$

of na behoorlijke rangschikking en na deeling door 4:

$$\sin^3\varphi - \tfrac{3}{4}\sin\varphi + \tfrac{1}{4}\sin 3\varphi = 0.$$

Neemt men nu de vergelijking $x^3 - Px + Q = 0$, waarin P positief is en bovendien $\frac{1}{4}Q^2 < \frac{1}{27}P^3$, dan zal deze vergelijking in het onherleidbare geval verkeeren en drie reëele wortels opleveren. Om deze op te sporen, deelen wij de opgegeven vergelijking door de reeks $1, p, p^2, p^3,$

*) Om het verband zijn de goniometrische en geometrische oplossing der derdemachtsvergelijkingen in deze § opgenomen. Zij, die intusschen aan de goniometrie en aan de hoogere meetkunde niets gedaan hebben, kunnen van N°. 7 tot aan het einde der § overslaan, zonder dat zulks aan het verband der zaak eenig nadeel zal doen.

vinden daardoor $y^3 - \frac{P}{p^2}y + \frac{Q}{p^3} = 0$,

waarin wij p nu zoodanig willen bepalen, dat

$$\frac{P}{p^2} = \frac{3}{4} \text{ en } \frac{Q}{p^3} = \frac{1}{4} \sin 3\varphi \text{ wordt,}$$

dan zal y gelijk zijn aan sin φ. Hiertoe hebbe men te voldoen aan de vergelijkingen

$$3p^2 = 4P \qquad \sin 3\varphi = \frac{4Q}{p^3} = \frac{4Q}{8 \times \frac{P}{3}\sqrt{\frac{P}{3}}} = \frac{3Q}{2P\sqrt{\frac{P}{3}}}$$

$$p = 2\sqrt{\frac{P}{3}}$$

of

$$\varphi = \tfrac{1}{3} \text{ boog sin } \frac{3Q}{2P\sqrt{\frac{P}{3}}},$$

welke vorm altijd een bestaanbare waarde voor φ op zal leveren, omdat $\frac{1}{4}Q^2 < \frac{1}{27}p^3$, dus $3Q < 2P\sqrt{\frac{P}{3}}$ en bijgevolg sin $3\varphi < 1$.

Om nu de beide andere wortels te vinden, merke men op, dat sin $(\pi - 3\varphi)$ en $-\sin(\pi + 3\varphi)$ voor sin 3φ geschreven kunnen worden in de vergelijking sin $3\varphi = \frac{4Q}{p^3}$, waardoor men behalve sin φ nog vindt de wortels sin $(60^0 - \varphi)$ en $-\sin.(60^0 + \varphi)$;

derhalve is $x_1 = py_1 = 2\sqrt{\frac{1}{3}P} \times \sin \varphi$,

$x_2 = 2\sqrt{\frac{1}{3}P} \times \sin(60^0 - \varphi)$,

$x_3 = -2\sqrt{\frac{1}{3}P} \times \sin(60^0 + \varphi)$.

Aanmerking. 1. „Men kan zich gemakkelijk overtuigen, dat er niet meer dan drie verschillende wortels zijn, die aan de vergelijking voldoen, indien men in het oog houdt, dat niet de boog 3φ in graden gegeven is, maar wel een gebroken $4Q : p^3$, dat als de sinus van zekeren boog 3φ voorkomt. Tot dezen sinus behooren een oneindig aantal bogen, welke in twee reeksen vervat zijn, namelijk:

3φ, $2\pi + 3\varphi$, $4\pi + 3\varphi$, $6\pi + 3\varphi$, ... $2n\pi + 3\varphi$

$\pi - 3\varphi$, $3\pi - 3\varphi$, $5\pi - 3\varphi$, $7\pi - 3\varphi$ .....$(2n+1)\pi - 3\varphi$."

(JACOB DE GELDER, *Beg. der Stelkunst*, pag. 366.)

Nu vinden wij, de derde gedeelten dezer bogen nemende:

$$\sin\left(\frac{3\varphi}{3}\right) = \sin\varphi$$

$$\sin\left(\frac{\pi-3\varphi}{3}\right) = \sin\left(\tfrac{1}{3}\pi-\varphi\right) = \sin\left(60^0-\varphi\right)$$

$$\sin\left(\frac{2\pi+3\varphi}{3}\right) = \sin\left(\tfrac{2}{3}\pi+\varphi\right) = \sin\left(120^0+\varphi\right)$$

$$\sin\left(\frac{3\pi-3\varphi}{3}\right) = \sin\left(\pi-\varphi\right) = \sin\left(180^0-\varphi\right)$$

$$\sin\left(\frac{4\pi+3\varphi}{3}\right) = \sin\left(1\tfrac{1}{3}\pi+\varphi\right) = \sin\left(240^0+\varphi\right)$$

$$\sin\left(\frac{5\pi-3\varphi}{3}\right) = \sin\left(1\tfrac{2}{3}\pi-\varphi\right) = \sin\left(300^0-\varphi\right)$$

$$\sin\left(\frac{6\pi+3\varphi}{3}\right) = \sin\left(2\pi+\varphi\right) = \sin\varphi$$

$$\sin\left(\frac{7\pi-3\varphi}{3}\right) = \sin\left(2\tfrac{1}{3}\pi-\varphi\right) = \sin\left(60^0-\varphi\right)$$

$$\sin\left(\frac{8\pi+3\varphi}{3}\right) = \sin\left(2\tfrac{2}{3}\pi+\varphi\right) = \sin\left(120^0+\varphi\right)$$

$$\sin\left(\frac{9\pi-3\varphi}{3}\right) = \sin\left(3\pi-\varphi\right) = \sin\left(180^0-\varphi\right)$$

$$\sin\left(\frac{10\pi+3\varphi}{3}\right) = \sin\left(3\tfrac{1}{3}\pi+\varphi\right) = \sin\left(240^0+\varphi\right)$$

$$\sin\left(\frac{11\pi-3\varphi}{3}\right) = \sin\left(1\tfrac{2}{3}\pi-\varphi\right) = \sin\left(300^0-\varphi\right)$$

enz.

Merkt men nu op, dat deze reeks zoo voortgaande zes aan zes de zelfde uitkomsten levert; dat verder $120^0+\varphi$ en $60^0-\varphi$, $240^0+\varphi$ en $300^0-\varphi$, φ en $180^0-\varphi$ elkaârs supplementen zijn en dus dezelfde sinussen hebben, dan blijkt ons ten duidelijkste, dat de vergelijking

$$\sin.^3\varphi - \tfrac{3}{4}\sin.\varphi + \tfrac{1}{4}\sin.3\varphi = 0$$

slechts drie worteis kan hebben, namelijk sin. φ, sin. $(60^0-\varphi)$ en sin. $(240^0+\varphi)$;

of, omdat ook sin $(240^0+\varphi) = -\sin(60+\varphi)$, de drie wortels:

$$\sin.\varphi,\ \sin.(60^0-\varphi) \text{ en } -\sin.(60+\varphi).$$

2. De eerste sporen van eene oplossing door goniome-

trie vindt men bij VIËTA (1540—1603); later heeft GIRARD in zijn werkje „*Invention nouvelle en l'Algèbre* 1629, eene goniometrische oplossing aangegeven voor kubische vergelijkingen, waarvan twee wortels imaginair zijn. LOBATTO heeft bovendien een middel aangewezen om bijzondere derdemachtsvergelijkingen te herleiden tot volkomen derdemachten. (Vergel. zijne *Rechtlijnige en Spherische Trigonometrie*, 2e dr., pag. 47.)

8. Laat ter toepassing gevraagd worden de wortels van de vergelijking

$$x^3 - 19x + 30 = 0.$$

In deze vergelijking is $Q = 30$, $P = 19$, $\varphi = \frac{1}{3}$ boog sin. $\dfrac{3Q}{2P\sqrt{\frac{P}{3}}}$.

Bedienen wij ons van logarithmen, dan komt de bewerking als volgt:

$$\begin{array}{lll}
\log.\ 3Q = & & = 1{,}954\,2425 \\
\log.\ P = & 1{,}278\,7536 & \\
\log.\ 3 = & 0{,}477\,1213 & \\
\hline
\log.\ \dfrac{P}{3} & 0{,}801\,6323 & \\
 & 2/\ \overline{\phantom{0{,}400\,8161}} & \\
\log.\sqrt{\dfrac{P}{3}} & 0{,}400\,8161 & \\
\log.\ P = & 1{,}278\,7536 & \\
\log.\ 2 = & 0{,}301\,0300 & \\
\hline
\log.\ 2P\sqrt{\dfrac{P}{3}} = & & = 1{,}980\,5997 \\
\hline
\text{log. boog sin. } \dfrac{3Q}{2P\sqrt{\frac{P}{3}}} & & = 9{,}973\,6428 - 10 \text{ af.}
\end{array}$$

$$\text{boog sin. } \frac{3Q}{2P\sqrt{\frac{P}{3}}}\ 70^\circ\ 14'\ 23''$$

$$\begin{array}{rcl}
\varphi & = & 23^\circ\ 24'\ 47''6 \\
60^\circ - \varphi & = & 36^\circ\ 35'\ 12''4 \\
-(60^\circ + \varphi) & = & -83^\circ\ 24'\ 47''6.
\end{array}$$

$\log \sin \varphi = 9{,}5991824 - 10$;	$\log \sin (60^0 - \varphi) = 9{,}7752751 - 10$;	$\log \sin (60^0 + \varphi) = 9{,}9971237 - 10$
$\log 2\sqrt{\frac{1}{3}P} = 0{,}7018461$	$0{,}7018461$	$0{,}7018461$
$\log x_1 = 9{,}3011285$;	$\log x_2 = 0{,}4771212$;	$\log x_3 = 0{,}6989698(-)$
$x_1 = 1{,}9999$;	$x_2 = 2{,}99999$;	$x_3 = -4{,}99999$

van welke waarden de eerste 0,0001, de tweede 0,00001 en de derde — 0,00001 van de volkomen nauwkeurige waarden 2, 3, — 5 afwijken.

9. Maar niet alleen in het onherleidbaar geval, ook in het geval, dat slechts één wortel bestaanbaar is en de twee andere imaginair zijn, kan men de goniometrie met vrucht toepassen, om den reëelen wortel, zoowel als de imaginaire wortels op te sporen.

Nemen wij eerst de vergelijking $x^3 - Px + Q = 0$,

$$\frac{1}{4}Q^2 > \frac{1}{27}P^3, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

dan kunnen wij deze vergelijking deelen door de reeks $1, p, p^2, p^3$ en vinden daardoor

$$y^3 - \frac{P}{p^2}y + \frac{Q}{p^3} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (A)$$

Nemen wij ook hier $p = 2\sqrt{\frac{P}{3}}$, dan gaat de vergelijking (A) over in

$$y^3 - \frac{3}{4}y + \frac{Q}{\left(2\sqrt{\frac{P}{3}}\right)^3} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (A')$$

Zij nu verder $\frac{\left(2\sqrt{\frac{P}{3}}\right)^3}{4Q} = \text{sin. } \varphi$, 't geen wegens de relatie (α) altijd mogelijk is, dan is $\frac{8Q}{\left(2\sqrt{\frac{P}{3}}\right)^3} = 2 \text{ cosec. } \varphi = \text{tang } \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{\text{tang } \frac{\varphi}{2}}$.

Zij verder $y = -\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, dan verandert $y^3 - \frac{3}{4}y$ in $-\frac{1}{2}\left(z^3 + \frac{1}{z^3}\right)$ en de vergelijking (A') gaat over in:

$$z^3 + \frac{1}{z^3} = \frac{8Q}{\left(2\sqrt{\frac{P}{3}}\right)^3} = \text{tang } \tfrac{1}{2}\varphi + \frac{1}{\text{tang } \frac{1}{2}\varphi},$$

uit welke vergelijking onmiddellijk volgt $z^3 = \text{tang } \frac{1}{2}\varphi$, en

$$z_1 = \sqrt[3]{\text{tang } \tfrac{1}{2}\varphi}$$

$$z_2 = \sqrt[3]{\text{tang } \tfrac{1}{2}\varphi} \times \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$

$$z_3 = \sqrt[3]{\text{tang } \tfrac{1}{2}\varphi} \times \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

van welke drie wortels altijd een reëel en twee imaginair zijn.

10. Laat, om deze formule toe te passen, gevraagd worden naar den reëelen wortel van de vergelijking $x^3 - 9x + 28 = 0$.

Hierin is $P = 9$, $Q = 28$, $\text{sin. } \varphi = \frac{\left(2\sqrt{\frac{P}{3}}\right)^3}{4Q}$,

$z = \sqrt[3]{\text{tang } \frac{1}{2}\varphi}$, $y = -\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, $x = 2\sqrt{\frac{P}{3}} \times y$.

$\log. \frac{P}{3}$	$= 0{,}477\,12125$	$\log. \frac{1}{z}$	$= 0{,}2385615$
$\log. \sqrt{\frac{P}{3}}$	$= 0{,}238\,5606$	$\frac{1}{z}$	$= 1{,}73205$
$\log. 2$	$= 0{,}301\,0300$	z	$= 0{,}577349$
$\log. 2\sqrt{\frac{P}{3}}$	$= 0{,}539\,5906$	$\frac{1}{z} + z$	$= 2{,}309399$
$\log. \left(2\sqrt{\frac{P}{3}}\right)^3$	$= 1{,}618\,7719$	$y = -\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$	$= -1{,}154699$

$\log. 4Q = 2{,}049\,2180$ $\qquad$ $\log. y = 0{,}0624691(-)$

$\log.\sin.\varphi = 9{,}569\,5539-10$ $\qquad$ $\log. 2\sqrt{\frac{P}{3}} = 0{,}5395906$

$\varphi = 21^0\ 47'\ 12''$ $\qquad$ $\log. x_1 = \overline{0{,}6020597(-)}$

$\log.\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi = 9{,}2843156-10$ $\qquad$ $x_1 = -3{,}99999.$

$\log. z = 9{,}761\,4385-10$ $\qquad$ $x_1 = -4$

$z = 0{,}577\,349.$

11. Laat eindelijk gevraagd worden, de wortels op te sporen van de vergelijking $x^3 + Px + Q = 0$, waarin P positief is.

Wederom voor de reeks $1, p, p^2, p^3$ deelende en p gelijk stellende aan $2\sqrt{\frac{P}{3}}$, vindt men:

$$y^3 + \tfrac{1}{4}y + \frac{Q}{\left(2\sqrt{\frac{P}{3}}\right)^3} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

Stelt men nu $y = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)$ en $\frac{Q}{\left(2\sqrt{\frac{P}{3}}\right)^3} = \cot.\varphi$, dan gaat de vergelijking (α) over in

$$z^3 - \frac{1}{z^3} = \frac{-8Q}{\left(2\sqrt{\frac{P}{3}}\right)^3} = -2\cot.\varphi = -(\cot.\tfrac{1}{2}\varphi - \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi) =$$

$$= \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi - \frac{1}{\operatorname{tang}.\frac{1}{2}\varphi},$$ waaraan voldaan zal worden door:

$$z_1 = \sqrt[3]{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi}, \quad z_2 = \sqrt[3]{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi} \times \frac{-1+\sqrt{-3}}{2},$$

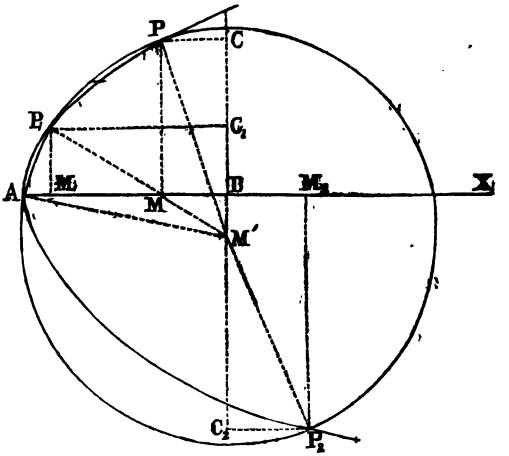
$$z_3 = \sqrt[3]{\operatorname{tang}.\tfrac{1}{2}\varphi} \times \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

De toepassing op eene getallenvergelijking verblijve aan den Lezer.

12. Zij AX de as eener parabool en M' het middelpunt eens cirkelomtreks, welke laatste door den top der parabool gaat en haar bovendien nog snijdt in een ander punt P. Zij voorts de parameter der parabool $= p$, $AM = x$ en $PM = y$, dan is

$$y^2 = px \text{ en } x = \frac{y^2}{p} \quad \ldots\ldots\ldots, \quad \ldots \quad (\alpha)$$

Zij $AB = a$, $BM' = b$ en $AM' = x$, nemen wij A als oorsprong der coördinaten aan en de as der x langs AX, dan is



$M'C = b + y$ en $PC = a - x$, derhalve is de vergelijking van den cirkelomtrek $(a-x)^2 + (b+y)^2 = r^2$, waaruit, omdat $a^2 + b^2 = r^2$, gevonden wordt:

$$x^2 + y^2 - 2ax + 2by = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

Substitueert men hierin de waarde van x, die wij in (α) vonden, dan komt er na behoorlijke herleiding en deeling door y

$$y^2 - (2a - p)py + 2bp^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\gamma)$$

Zij nu eene gegevene kubische vergelijking

$$y^3 - Ppy + Qp^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\delta)$$

waarin wegens de factoren p en p^2 P en Q lijnen voorstellen; stellen wij echter hierin $p = 1$, dan zijn P en Q getallencoëfficiënten. — Dat men verder den parameter willekeurig aan kan nemen, blijkt daaruit, dat door de coëfficiënten slechts twee vergelijkingen gegeven worden, om de grootheden a, b en p te bepalen. Voor het overige is de parameter, als eenheid aangenomen, geheel willekeurig. Uit de vergelijkingen (γ) en (δ) volgt onmiddellijk: $a = \frac{1}{2}(P + p)$ en $b = \frac{1}{2}Q$, hetgeen aanleiding geeft tot de volgende handelwijze:

Men beschrijve met p als parameter eene parabool, waarvan AX de as is, neme daarna $AB=a=\frac{1}{2}(P+p)$ en $BM'=b=\frac{1}{2}Q$ normaal tot AB; beschrijve uit M' met $M'A$ als straal den cirkelomtrek $P P_1 P_2$. Snijdt deze de parabool in de drie punten P, P_1, P_2, dan zijn de ordinaten PM, P_1M_1 en P_2M_2 de drie wortels der gegeven vergelijking; de wortels PM en P_1M_1 zijn positief en P_2M_2 stelt den negatieven wortel voor. Want hadde men in de berekening P_2 in plaats van P genomen, dan zou men de vergelijking

$$y^3-(2a-p)y-2bp^2=0$$

gevonden hebben, wier wortels absoluut genomen dezelfde zijn, als van de vergelijking (γ), doch het tegengestelde teeken hebben.

Heeft de vergelijking twee gelijke wortels, dan raakt de cirkelomtrek de parabool; snijdt de omtrek de parabool behalve in A slechts in één punt, dan heeft de vergelijking slechts één reëelen en twee imaginaire wortels.

Heeft P het teeken $+$ en is Q negatief, dan wordt b ook negatief en men neemt in dat geval BM' aan de andere zijde der as; is a negatief, dan neemt men AB in de tegengestelde richting, die zij in de figuur heeft.

Aanmerkingen. 1. Wil men zich ten slotte overtuigen, dat PM, P_1M_1, P_2M_2 werkelijk de wortels zijn van de vergelijking $y^3-Ppy+Qp^2=0$, dan hebbe men slechts de volgende bewerking te verrichten:

$CM'=CB+BM'=y+\frac{1}{2}Q$; $PC=AB-AM=a-x=\frac{1}{2}(P+p)-x$;

$M'P^2=CM'^2+PC^2=y^2+yQ+\frac{1}{4}Q^2+\frac{1}{4}(P+p)^2-x(P+p)+x^2$;

Maar $M'P^2=a^2+b^2=\frac{1}{4}(P+p)^2+\frac{1}{4}Q^2$ en $x=\frac{y^2}{p}$,

derhalve:

$\frac{1}{4}(P+p)^2+\frac{1}{4}Q^2=y^2+yQ+\frac{1}{4}Q^2+\frac{1}{4}(P+p)^2-x(P+p)+x^2$;

of na behoorlijke herleiding en deeling door y:

$$y^3-Ppy+Qp^2=0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\gamma')$$

waaruit blijkt, dat y, d. i. PM een wortel der opgegeven vergelijking is; op gelijke wijze kan zulks ook aangetoond worden voor P_1M_1 en P_2M_2.

Indien men in aanmerking neemt, dat de vergelijkingen (γ) en (γ') verkregen zijn na deeling door y, dan ziet men

aanstonds, dat men eigenlijk eene vierdemachtsvergelijking heeft opgelost, waarvan eene der wortels gelijk aan 0 is.

2. De bovenstaande constructie is grootendeels ontleend aan: *„de constructione problematum solidarum, sive aequationum tertiae vel quartae potestatis, unica data parabola ac circulo efficienda; dissertatiuncula. Auth.* EDM. HALLEY. Deze verhandeling komt voor in CASTILLIONE's uitgave van NEWTON's *Arith. univ.* II. addit. pag. 35. — Men vergelijke nog WOLF, *Elem. math.*, KLÜGEL W. I. 142. en vooral DESCARTES, *Geometrie* 3de boek pag. 395. (Vertaling van GLAZEMAKER), waar hij in XXV eene algemeene wijze geeft *om alle de lighamelyke werkstukken, die tot eene vergelijking van drie of vier afmeetingen gebracht zijn, te bewerken.*

---

§ 14. Rechtstreeksche oplossing der vierdemachtsvergelijkingen.

1. Zij gegeven de vergelijking van den vierden graad:

$$Ax^4 + Ex^3 + Cx^2 + Dx + E = 0; \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

deelen wij dan alle termen door A en vermenigvuldigen wij de alsdan te vinden vergelijking met de reeks $1, A, A^2, A^3, A^4$, dan vinden wij

$$y^4 + Ey^3 + CAy^2 + DA^2y + EA^3 = 0, \quad . \quad . \quad (\alpha')$$

Stellen wij nu hierin $y = z - \frac{1}{4}B$, dan komt er:

$$\begin{aligned}
y^4 &= z^4 - Bz^3 + \tfrac{3}{8}B^2z^2 - \tfrac{1}{16}B^3z + \tfrac{1}{256}B^4 \\
Ry^3 &= \quad + Bz^3 - \tfrac{3}{4}B^2z^2 + \tfrac{3}{16}B^3z - \tfrac{1}{64}B^4 \\
CAy^2 &= \quad + CAz^2 - \tfrac{1}{2}BCAz + \tfrac{1}{16}B^2CA \\
DA^2y &= \quad + DA^2z - \tfrac{1}{4}BDA^2 \\
EA^3 &= \quad + EA^3;
\end{aligned}$$

zoodat de vergelijking (α) eindelijk overgaat in de vergelijking

$$z^4 + Pz^2 + Qz + R = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

Zoodanige herleiding altijd mogelijk zijnde, kan men de vergelijking (β) aanmerken even algemeen te zijn, als de vergelijking (α).

2. Er bestaan verscheidene leerwijzen, om de wortels eener vierdemachtsvergelijking te bepalen; wij willen er daarvan ach-

tereenvolgens een viertal behandelen. Laat bijv. gevraagd worden naar de wortels der vergelijking

$$x^4 + Px^2 + Qx + R = 0,$$

waarin P, Q en R positief of negatief kunnen zijn, dan kunnen wij daarvoor ook schrijven:

$$x^4 = -(Px^2 + Qx + R)$$

waarvoor wij gemakshalve zullen schrijven:

$$x^4 = px^2 + qx + r.$$

Men zoeke nu een getal y zoodanig, dat $2x^2y + y^2$, opgeteld bij $px^2 + qx + r$ een volkomen vierkant zij van een binomium $Ax + B$, dan heeft men:

$$(p + 2y)x^2 + qx + (r + y^2) = A^2x^2 + 2ABx + B^2$$

of $A^2 = p + 2y$ ...(A) $2AB = q$ ...(B) en $B^2 = r + y^2$ ...(C).

Dewijl nu viermaal het product der eerste en derde vergelijkingen gelijk is aan het vierkant der tweede vergelijking, heeft men:

$$4(p + 2y)(r + y^2) = q^2$$

of na ontwikkeling:

$$8y^3 + 4py^2 + 8ry + (4pr - q^2) = 0;$$

waarvoor men ook kan schrijven:

$$y^3 + \tfrac{1}{2}py^2 + ry + \frac{4pr - q^2}{8} = 0,$$

welke vergelijking voor $y = z - \frac{1}{6}p$ overgaat in

$$z^3 - (\tfrac{1}{12}p^2 - r)z + (\tfrac{1}{108}p^3 + \tfrac{1}{3}pr - \tfrac{1}{8}q^2) = 0$$

Stelt men hierin nu $K = \frac{1}{12}p^2 - r$ en $L = \frac{1}{108}p^3 + \frac{1}{3}pr - \frac{1}{8}q^2$, dan gaat zij eindelijk over in

$$z^3 - Kz + L = 0,$$

waaruit men vindt (§ 13, 2):

$$z_1 = \sqrt[3]{\left\{-\tfrac{1}{2}L + \sqrt{(\tfrac{1}{4}L^2 - \tfrac{1}{27}K^3)}\right\}} + \sqrt[3]{\left\{-\tfrac{1}{2}L - \sqrt{(\tfrac{1}{4}L^2 - \tfrac{1}{27}K^3)}\right\}}$$

$$z_2 = \sqrt[3]{\left\{-\tfrac{1}{2}L + \sqrt{(\tfrac{1}{4}L^2 - \tfrac{1}{27}K^3)}\right\}} \times \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} +$$

$$+ \sqrt[3]{\left\{-\tfrac{1}{2}L - \sqrt{(\tfrac{1}{4}L^2 - \tfrac{1}{27}K^3)}\right\}} \times \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$$

$$z_3 = \sqrt[3]{\left\{-\tfrac{1}{2}L + \sqrt{(\tfrac{1}{4}L^2 - \tfrac{1}{27}K^3)}\right\}} \times \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} +$$

$$+ \sqrt[3]{\left\{-\tfrac{1}{2}L - \sqrt{(\tfrac{1}{4}L^2 - \tfrac{1}{27}K^3)}\right\}} \times \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}.$$

Zoodra deze waarden van z bekend zijn, is ook y bekend en kan men de waarden van A en B bepalen; verder heeft men dan $x^4+2x^2y+y^2=(p+2y)x^2+qx+(r+y^2)=(\pm Ax\pm B)^2$, of

$$x^2+y=\pm Ax\pm B$$

waaruit de waarden van x bepaald kunnen worden.

Dewijl men voor y drie verschillende waarden vindt, zullen A^2 en B^2 ook drie verschillende waarden bekomen; A en B hebben dus drie paar waarden, waarvan elk paar absoluut gelijk is, maar tegengestelde teekens heeft, blijkens de vergelijkingen (A) en (C). Verder volgt nog uit (B), dat A en B gelijke of ongelijke teekens hebben, naar gelang q het teeken $+$ of $-$ voor zich heeft. Door de drie waarden van y, waaruit zes waarden voor A en B volgen, ontstaan er derhalve zes vierkantsvergelijkingen in x, die elk twee wortels der vierdemachtsvergelijking bevatten. Hierin nu ligt niets ongerijmds, want zijn a_1, a_2, a_3, a_4 de wortels eener biquadratische vergelijking, dan kan men daaruit samenstellen de volgende vierkantsvergelijkingen:

$$(x-a_1)(x-a_2)=0,\ (x-a_1)(x-a_3)=0,\ (x-a_1)(x-a_4)=0,$$
$$(x-a_2)(x-a_3)=0,\ (x-a_2)(x-a_4)=0,\ (x-a_3)(x-a_4)=0.$$

Twee dezer vergelijkingen, namelijk de derde en de vierde of de eerste en de zesde, of de tweede en de vijfde, zijn voldoende om de wortels der vierdemachtsvergelijking te vinden.

Zijn twee wortels imaginair, dan hebben A en B slechts eene reëele waarde, al had y ook drie reëele waarden; in dat geval bevat één vierkantsvergelijking de twee imaginaire, eene andere de twee reëele wortels.

Aanmerking. De hier voorgedragene leerwijze is van LUDOVICO FERRARI uit Bologna, die zich op aansporing van CARDANUS met het zoeken naar de wortels eener biquadratische vergelijking heeft bezig gehouden. De oplossing komt het eerst voor in de *Ars magna* van CARDANUS; later vindt men ze ook in de algebra van BOMBELLI 1572, waarom eenigen, zooals WALLIS en EULER, de oplossing aan dezen laatsten schrijver hebben toegeschreven. (BALTZER, *Elem.*; DE GELDER, *Stelk.*; KLÜGEL, *W. I.* pag 38).

3. Laat ter toepassing gevraagd worden, de wortels op te sporen van de vergelijking

$$x^4 - 15x^2 - 10x + 24 = 0.$$

Schrijft men hiervoor $x^4 = 15x^2 + 10x - 24$,

telt men $2x^2y + y^2$ bij beide leden der vergelijking op, dan is

$x^4 + 2x^2y + y^2 = (15 + 2y)x^2 + 10x + (y^2 - 24) = (Ax + B)^2$

dus $A^2 = 15 + 2y$, $2AB = 10$, $B^2 = y^2 - 24$.

Hieruit volgt $4(15 + 2y)(y^2 - 24) = 100$,

of na herleiding $8y^3 + 60y^2 - 192y - 1540 = 0$

$$y^3 + \tfrac{15}{2}y^2 - 24y - \tfrac{385}{2} = 0$$

$y = \frac{1}{2}z$; $z^3 + 15z^2 - 96z - 1540 = 0$

$z = z' - 5$; $z'^3 - 171z' - 810 = 0$.

Door op deze laatste vergelijking de regels der vorige § toe te passen, vindt men:

$$z'_1 = 15,\ z'_2 = -6,\ z'_3 = -9.$$

of $z_1 = 10,\ z_2 = -11,\ z_3 = -14.$

of $y_1 = 5,\ y_2 = -\tfrac{21}{2},\ y_3 = -7.$

$A^2 = 2y + 15$	=	25,	4,	1.
$B^2 = y^2 - 24$	=	1,	$\frac{25}{4}$,	25.

Verder hebben A en B hetzelfde teeken, omdat $2AB = +10$ is, derhalve vindt men voor de vierkantsvergelijking:

$$x^2 - Ax - B + y = 0.$$

Voor $A = \pm 5$ $\begin{cases} x^2 - 5x + 4 = 0, & \text{waaruit } x_1 = 4 \text{ en } x_2 = 1; \\ x^2 + 5x + 6 = 0, & \text{waaruit } x_3 = -2 \text{ en } x_4 = -3; \end{cases}$

Voor $A = \pm 2$ $\begin{cases} x^2 - 2x - 8 = 0, & \text{waaruit } x_1 = 4 \text{ en } x_3 = -2; \\ x^2 + 2x - 3 = 0, & \text{waaruit } x_2 = 1 \text{ en } x_4 = -3; \end{cases}$

Voor $A = \pm 1$ $\begin{cases} x^2 - x - 12 = 0, & \text{waaruit } x_1 = 4 \text{ en } x_4 = -3; \\ x^2 + x - 2 = 0, & \text{waaruit } x_2 = 1 \text{ en } x_3 = -2. \end{cases}$ Voor $B = \pm 5$

Evenzoo handelende, zal men uit de vierdemachtsvergelijking $x^4 - 16x - 12 = 0$, afleiden de derdemachtsvergelijking $y^3 + 12y - 32 = 0$, $A = \pm 2$, $B = \pm 4$, $x^2 - 2x - 2 = 0$, $x^2 + 2x + 6 = 0$, $x_1 = 1 + \sqrt{3}$, $x_2 = 1 - \sqrt{3}$, $x_3 = -1 + \sqrt{-5}$, $x_4 = -1 - \sqrt{-5}$.

4. Veronderstellen wij, dat de vergelijking van den vierden graad herleid is tot de gedaante

$$x^4 + Px^2 + Qx + R = 0,$$

en stellen wij dan, dat het voorste lid ontstaan is uit de vermenigvuldiging van
$(x^2 + px + q)$ en $(x^2 - px + r)$, dan vinden wij:

$$(x^2+px+q)(x^2-px+r) = x^4+(q+r-p^2)x^2-p(q-r)x+qr =$$
$$x^4 + Px^2 + Qx + R = 0; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (H)$$

derhalve $q + r - p^2 = P$, $(r - q)p = Q$ en $qr = R$;

dus $$r + q = P + p^2, \quad r - q = \frac{Q}{p}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

en omdat $$(r + q)^2 = (r - q)^2 + 4qr,$$

$$(P+p^2)^2 - \frac{Q^2}{p^2} - 4R = 0$$

of na ontwikkeling:

$$p^6 + 2Pp^4 + (P^2 - 4R)p^2 - Q^2 = 0. \quad . \quad . \quad (A).$$

Stelt men hierin $y = p^2$, dan gaat de vergelijking over in

$$y^3 + 2Py^2 + (P^2 - 4R)y - Q^2 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (A_1)$$

zijnde eene derdemachtsvergelijking, waaruit y berekend kan worden.

Zoodra y bekend is, vindt men door middel der vergelijkingen (α)

$$r + q = P + y \text{ en } r - q = \frac{Q}{\pm\sqrt{y}}$$

derhalve

$$r = \tfrac{1}{2}\left(P + y \pm \frac{Q}{\sqrt{y}}\right), \quad q = \tfrac{1}{2}\left(P + y \mp \frac{Q}{\sqrt{y}}\right).$$

Hierdoor zijn de coëfficiënten der gestelde tweedemachtsfactoren bekend en kunnen dus de waarden van x bepaald worden.

Omtrent de vergelijking (A_1) valt nog het volgende op te merken:

a) Indien alle wortels reëel zijn, dan is wegens den bekenden term $-Q^2$ zeker één wortel positief; is P negatief, en $P^2 > 4R$, dan zijn de drie wortels positief. In deze beide gevallen vindt men reëele waarden voor p dus ook voor q en r.

b) Heeft de vergelijking (H) vier reëele wortels a_1, a_2, a_3, a_4, dan kan men daaruit zes vierkantsvergelijkingen samenstellen, die elk twee wortels bevatten en de gedaante hebben van $x^2 \pm px + q = 0$ en elk twee der wortels bevatten; waaruit dus verder volgt, dat p één der waarden kan hebben:
$a_1 + a_2$, $a_1 + a_3$, $a_1 + a_4$, $a_2 + a_3$, $a_2 + a_4$, $a_3 + a_4$,
waardoor voor p eene zesdemachtsvergelijking gevonden wordt.

Intusschen ontbreekt in de vergelijking (H) de tweede term, derhalve is $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$, waaruit volgt, dat p slechts drie absoluut verschillende wortels heeft, zoodat $y = p^2$ door eene derdemachtsvergelijking bepaald is.

c) Heeft de vergelijking (H) twee reëele en twee imaginaire wortels, dan kan men die voorstellen door a_1, a_2, $a_3 + b\sqrt{-1}$, $a_3 - b\sqrt{-1}$. Hierdoor vindt men voor p slechts twee reëele waarden, namelijk $a_1 + a_2$ en $2a_3$, die bovendien, omdat $a_1 + a_2 + a_3 - b\sqrt{-1} + a_3 - b\sqrt{-1} = 0$, gelijk zijn, maar het tegengestelde teeken hebben; $y = p^2$ heeft dus slechts eene reëele waarde, d. i. de vergelijking (A_1) heeft slechts één reëelen wortel.

d) Heeft de vergelijking (H) vier imaginaire wortels, die men voor kan stellen door $a \pm b\sqrt{-1}$ en $c \pm d\sqrt{-1}$, dan heeft p de volgende waarden:

$$2a,\ a + c + (b + d)\sqrt{-1},\ a + c + (b - d)\sqrt{-1},$$
$$a + c + (d - b)\sqrt{-1},\ a + c - (b + d)\sqrt{-1},\ 2c$$

Houdt men hierbij in het oog, dat

$$(a + b\sqrt{-1}) + (a - b\sqrt{-1}) + (c + d\sqrt{-1}) + (c - d\sqrt{-1}) = 0,$$

dan vindt men $2a = -2c$ of $a = -c$, zoodat de bovenstaande waarden voor p overgaan in

$$2a,\ (b + d)\sqrt{-1},\ (b - d)\sqrt{-1},\ (d - b)\sqrt{-1},\ -(b + d)\sqrt{-1},\ -2a;$$

de vergelijking (A_1) heeft dus drie reëele wortels

$$4a^2,\ -(b + d)^2,\ -(b - d)^2,$$

maar p zelf heeft slechts twee reëele waarden $2a$ en $-2a$, die absoluut gelijk zijn, maar tegengestelde teekens hebben.

Aanmerking. De in dit N°. verklaarde methode is van DESCARTES en komt voor in het derde boek zijner Meetkunde § XXII, onder den titel van *De herleiding der vergelijkingen, die vier afmeetingen hebben, als het werkstuk plat is, en welken degenen zijn, die men liyhamelyk noemt.* (Zie GLAZEMAKER's vertaling van de *Principia philosophiae*, II. pag. 390. Na de vierdemachtsvergelijking herleid te hebben tot de algemeene gedaante $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, veronderstelt hij, dat zij ontbonden kan worden in

$$\left(x^2 - yx + \tfrac{1}{2}y^2 \times \tfrac{1}{2}p \times \frac{q}{2y}\right)\left(x^2 + yx + \tfrac{1}{2}y^2 \times \tfrac{1}{2}p \times \frac{q}{2y}\right),$$

't geen met onze herleiding volkomen overeenstemt. Vervolgens wordt het nut dezer oplossing door een meetkundig voorbeeld opgehelderd.

5. Ter toepassing van deze methode nemen wij de vergelijking van N°. 3 namelijk, $x^4 - 15x^2 - 10x + 24 = 0$, waaruit men, door $P = -15$, $Q = -10$ en $R = 24$ te nemen, voor de vergelijking (A_1) van het vorige N°. vindt:

$$y^3 - 30y^2 + 129y - 100 = 0.$$

Stelt men hierin $y = z + 10$, dan komt er

$$z^3 - 171z - 810 = 0,$$

dezelfde vergelijking, die wij in N°. 3 gevonden hebben.

Deze vergelijking oplossende, vindt men:

	$z_1 = 15$,	$z_2 = -6$,	$z_3 = -9$.
of voor y:	25	4	1
d. i. $p =$	± 5	± 2	± 1
$r =$	$\begin{cases} 4 \\ 6 \end{cases}$	$\begin{cases} -8 \\ -3 \end{cases}$	$\begin{cases} -12 \\ -2 \end{cases}$
$q =$	$\begin{cases} 6 \\ 4 \end{cases}$	$\begin{cases} -3 \\ -8 \end{cases}$	$\begin{cases} -2 \\ -12 \end{cases}$

Derhalve vindt men voor

	$x^2+px+q=0$		$x^2-px+r=0$
$p=5, q=6$	$x^2+5x+6=0$	$r=4$	$x^2-5x+4=0$
$p=-5, q=4$	$x^2-5x+4=0$	$r=6$	$x^2+5x+6=0$
$p=2, q=-3$	$x^2+2x-3=0$	$r=-8$	$x^2-2x-8=0$
$p=-2, q=-8$	$x^2-2x-8=0$	$r=-3$	$x^2+2x-3=0$
$p=+1, q=-2$	$x^2+x-2=0$	$r=-12$	$x^2-x-12=0$
$p=-1, q=-12$	$x^2-x-12=0$	$r=-2$	$x^2+x-2=0$

welke twaalf vergelijkingen slechts zes verschillende vergelijkingen opleveren, die geheel overeenkomen met de vergelijkingen van N°. 3, ten bewijze, dat beide oplossingen ons dezelfde wortels doen vinden.

6. Stellen wij, om eene andere oplossing te vinden van de vergelijkingen van den 4den graad, dat de wortel van zoodanige vergelijking de gedaante heeft van $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, waarin p, q, r de wortels voorstellen van eene derdemachtsvergelijking $z^3 - fz^2 + gz - h = 0$, zoodat $p + q + r = f$

$pq + pr + qr = g$ en $pqr = h$. Verheft men de aangenomene waarde van x in het vierkant, dan vindt men:

$x^2 = p + q + r + 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr}$, of omdat $p + q + r = f$ is ook $x^2 - f = 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr}$. Verheft men deze vergelijking nogmaals tot de tweede macht, dan vindt men:

$x^4 - 2fx^2 + f^2 = 4pq + 4pr + 4qr + 8\sqrt{p^2qr} + 8\sqrt{pq^2r} + 8\sqrt{pqr^2}$;

maar $4(pq + pr + qr) = 4g$, derhalve

$$x^4 - 2fx^2 + f^2 - 4g = 8\sqrt{pqr} \times (\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}),$$

of omdat $\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} = x$ en $pqr = h$,

$$x^4 - 2fx^2 - 8x\sqrt{h} + f^2 - 4g = 0, \quad \ldots\ldots \quad (A)$$

waarvan $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$ een der wortels is, terwijl p, q, r wortels zijn van de derde machtsvergelijking $z^3 - fz^2 + gz - h = 0$.

Nemen wij nu de algemeene vergelijking van den vierden graad

$$x^4 + Px^2 + Qx + R = 0, \quad \ldots\ldots \quad (B)$$

dan moet men stellen, om de waarden van f, g, h te vinden,

$$2f = -P \qquad 8\sqrt{h} = -Q \quad \text{en} \quad f^2 - 4g = R$$

waaruit $f = \frac{-P}{2}$ $\qquad h = \frac{Q^2}{64}$ $\qquad g = \frac{P^2 - 4R}{16}$.

Opdat nu de vierdemachtsvergelijking (B) deze waarden van f, g en h doe vinden, stelle men daarmede de derdemachtsvergelijking samen:

$$z^3 - fz^2 + gz - h = z^3 + \frac{P}{2}z^2 + \frac{P^2 - 4R}{16}z - \frac{Q^2}{64} = 0.$$

Lost men deze derdemachtsvergelijking op en stelt men de wortels daarvan $z_1 = p$, $z_2 = q$, $z_3 = r$, dan zal een der wortels van de vergelijking (B) gelijk zijn aan $\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$.

Oogenschijnlijk vindt men nu slechts één wortel van de vergelijking (B); doch indien men in aanmerking neemt, dat $\sqrt{p}$, $\sqrt{q}$ en $\sqrt{r}$ het dubbele teeken voor zich hebben, en daarbij opmerkt, dat $\sqrt{pqr}$ gelijk moet zijn aan $\sqrt{h} = -\frac{Q}{8}$, dan zal men de waarden van $\sqrt{p}$, $\sqrt{q}$ en $\sqrt{r}$ zoodanig moeten kiezen, dat haar product positief of negatief is, naargelang $\frac{-Q}{8}$ positief of negatief is. Zoodoende vindt men voor

$\frac{-Q}{8}$ positief
$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} \\ x_2 = \sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r} \\ x_3 = -\sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r} \\ x_4 = -\sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r} \end{cases}$$

$\frac{-Q}{8}$ negatief.
$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r} \\ x_2 = \sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r} \\ x_3 = -\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} \\ x_4 = -\sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r} \end{cases}$$

waarin de wortels absoluut genomen moeten worden. Indien de derdemachtsvergelijking drie reëele positieve wortels heeft, dan heeft de biquadratische vergelijking vier reëele wortels. Zijn onder de reëele wortels der derdemachtsvergelijking negatieve, dan zijn alle wortels der vierdemachtsvergelijking imaginair. Heeft de derdemachtsvergelijking twee imaginaire wortels, dan zijn twee wortels der vierdemachtsvergelijking reëel; want omdat $\frac{Q^2}{64}$ altijd positief is, is p ook positief en $\pm\sqrt{p}$ reëel. Het imaginaire gedeelte van $\pm\sqrt{q}\pm\sqrt{r}$ verdwijnt, maar het imaginaire gedeelte van $\pm\sqrt{q}\mp\sqrt{r}$ blijft, derhalve heeft de vierdemachtsvergelijking twee reëele wortels.

Aanmerking. De laatst verklaarde oplossing is van EULER. Hij heeft ze voor het eerst bekend gemaakt in de *Comm. Petrop. vet.* VI onder den titel van *Conjectatio de formis radicum aequationum* (KLÜGEL II pag. 408.) Later heeft hij ze opgenomen in zijne Algebra. De bovenstaande verklaring is overgenomen uit de *Elémens d'algèbre par* M. LEONARD EULER, *traduits de l'Allemand. Lyon et Paris* 1774. Blijkens het privilegie des konings, dat achter het tweede deel gevoegd is, zijn deze *Elémens, traduits de l'Allemand et enrichis de notes par* M. BERNOULLI, *avec une traité d'Analyse indéterminée par* M. DE LA GRANGE.

7. Ter toepassing nemen wij wederom het voorbeeld van N°. 3 en 5, namelijk

$$x^4 - 15x^2 - 10x + 24 = 0,$$

waarin $P = -15$, $Q = -10$, $R = 24$

$$f = \tfrac{15}{4}, \quad h = \tfrac{100}{81}, \quad g = \tfrac{129}{16}.$$

Daardoor vinden wij de derdemachtsvergelijking

$$z^3 - \tfrac{15}{2}z^2 + \tfrac{129}{16}z - \tfrac{100}{64} = 0,$$

of na vermenigvuldiging met de reeks 1, 4, 16, 64.

$$z'^3 - 30z'^2 + 129z' - 100 = 0.$$

Stellen wij nu $z' = y + 10$, dan komt er na herleiding:

$$y^3 - 171y - 810 = 0,$$

zijnde dezelfde vergelijking, die wij in N°. 3 en N°. 5 gevonden hebben, en die tot wortels heeft

$$y_1 = 15, \quad y_2 = -6, \quad y_3 = -9;$$

derhalve

$$z'_1 = 25, \quad z'_2 = 4, \quad z'_3 = 1,$$

$$z_1 = \tfrac{25}{4}, \quad z_2 = 1, \quad z_3 = \tfrac{1}{4},$$

$$\sqrt{z_1} = \pm\tfrac{5}{2}, \quad \sqrt{z_2} = \pm 1, \quad \sqrt{z_3} = \pm\tfrac{1}{2}.$$

Nu is $\sqrt{h} = -\frac{Q}{8} = -\left(\frac{-10}{8}\right)$ positief, derhalve

$$x_1 = -\tfrac{5}{2} + 1 + \tfrac{1}{2} = 4, \quad x_2 = \tfrac{5}{2} - 1 - \tfrac{1}{2} = 1$$
$$x_3 = -\tfrac{5}{2} + 1 - \tfrac{1}{2} = -2, \quad x_4 = -\tfrac{5}{2} - 1 + \tfrac{1}{2} = -3$$

zijnde dezelfde waarden, welke wij op eene andere wijze reeds in N°. 3 en N°. 5 gevonden hebben.

8. Indien men veronderstelt, dat de wortel van eene vierdemachtsvergelijking uit de som van drie deelen p, q, r bestaat, dan is $x = p + q + r$ en

$$\left.\begin{array}{l} x^4 = 4p^2r + 4pq^2r + 4p^2qr + 4q^2r + 4p^2r^2 + 4q^2r^2 \\ +4p^3q + 2p^2r^2 + 4pq^3 + 2q^2r^2 + 2r^4 + 4pqr^2 + 8p^2q^2 + 4pqr^2 \\ +8p^2qr + 4pr^3 + 8pq^2r + 4qr^3 \\ +p^4 + 2p^2q^2 + q^4 - r^4 + 4pqr^2 - 4p^2q^2. \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} = (4p^2r + 4q^2r)(p+q+r) \\ +(4pq + 2r^2)(p+q+r)^2 \\ +(p^2+q^2)^2 - (r^2 - 2pq)^2. \end{array}\right\} \begin{array}{r} (4p^2r + 4q^2r)x + \\ = +(4pq + 2r^2)x^2 \\ +(p^2+q^2)^2 - (r^2 - 2pq)^2 \end{array}$$

Vergelijkt men nu eene willekeurige vierdemachtsvergelijking

$$x^4 + Px^2 + Qx + R = 0$$

met de gevondene, dan is

$$4pq + 2r^2 = -P, \quad 4p^2r + 4q^2r = -Q, \quad (p^2+q^2)^2 - (r^2 - 2pq)^2 = -R$$

Uit de tweede vergelijking volgt: $p^2 + q^2 = -\frac{Q}{4r}$; uit de eerste $2pq = -\frac{P + 2r^2}{2}$. Deze waarden in de derde overbrengende, heeft men:

$$r^6 + \tfrac{1}{2}Pr^4 + \tfrac{1}{16}(P-4R)r^2 - \tfrac{1}{64}Q^2 = 0,$$

waaruit r gevonden kan worden.

Verder heeft men nog uit de eerste en tweede vergelijking:

$$2pq = -\tfrac{1}{2}P - r^2 \quad \text{en} \quad p^2+q^2 = \frac{-Q}{4r}.$$

Twee gelijke maar tegengestelde waarden van r met de daarbij behoorende dubbele waarden van $(p+q)$, die uit de laatste vergelijking kunnen gevonden worden, verbonden, geven de wortels der opgegeven vergelijking.

Aanmerking. Deze oplossing is van WARING en komt voor in de *Philosophical Transactions* van 1779. Vergelijk HUTTON, D. en KLÜGEL, W. H.

9. Passen wij deze methode nogmaals toe op de vergelijking

$$x^4 - 15x^2 - 10x + 24 = 0,$$

dan is wederom $P = -15$, $Q = -10$, $R = 24$.

De zesdemachtsvergelijking in r wordt alsdan

$$r^6 - \tfrac{15}{2}r^4 + \tfrac{129}{16}r^2 - \tfrac{100}{64} = 0$$

of na vermenigvuldiging met de reeks 1, 4, 16, 64 en vervanging van r^2 door x:

$$x^3 - 30x^2 + 129x - 100 = 0$$

$x = y + 10 \qquad y^3 - 171y - 810 = 0$

zijnde dezelfde vergelijking, die wij in N°. 3, 5 en 7 gevonden hebben, en welke tot wortels heeft:

$$\begin{array}{lll} y_1 = 15, & y_2 = -6, & y_3 = -9. \\ x_1 = 25, & x_2 = 4, & x_3 = 1 \\ r_1^2 = \tfrac{25}{4}, & r_2^2 = 1, & r_3^2 = \tfrac{1}{4} \end{array}$$

Hieruit volgt verder:

$2pq = \tfrac{5}{4}$, $p^2+q^2 = 1$, $p^2+q^2 = \tfrac{1}{4}$ voor $r = \pm\tfrac{5}{2}$
waaruit $p+q = \pm\tfrac{3}{2}$; $p+q = \pm\tfrac{1}{2}$.

$2pq = \tfrac{16}{4}$, $p^2+q^2 = \tfrac{10}{4}$, $p^2+q^2 = -\tfrac{10}{4}$ voor $r = \pm 1$
waaruit $p+q = \pm 3$; $p+q = \pm 2$

$2pq = \tfrac{24}{4}$, $p^2+q^2 = 5$, $p^2+q^2 = -5$ voor $r = \pm\tfrac{1}{2}$
waaruit $p+q = \pm\tfrac{7}{2}$; $p+q = \pm\tfrac{3}{2}$

uit welke vergelijkingen men dezelfde waarden voor x vindt, die wij reeds vroeger door middel der andere oplossingen gevonden hebben.

10. Stelt men, dat eene volledige vierdemachtsvergelijking

$$x^4 + Px^3 + Qx^2 + Rx + S = 0$$

ontbindbaar is in het verschil der twee vierkanten

$$(x^2 + \tfrac{1}{2}Px + r)^2 - (sx + t)^2 = 0,$$

waarin r, s, t onbekenden zijn, dan geeft de ontwikkeling der laatste vergelijking eene vierdemachtsvergelijking, die identiek moet zijn met de opgegevene; men heeft dus:

$$\tfrac{1}{4}P^2 + 2r - s^2 = Q,\ Pr - 2st = R \text{ en } r^2 - t^2 = S \ldots (\alpha)$$

waaruit onmiddellijk volgt:

$$s^2 = \tfrac{1}{4}P^2 + 2r - Q,\ 2st = Pr - R,\ t^2 = r^2 - S$$

of omdat $4.s^2.t^2 = (2st)^2$, $4(\tfrac{1}{4}P^2 - Q + 2r)(r^2 - S) = (Pr - R)^2$, d. i. de derdemachtsvergelijking

$$r^3 - \tfrac{1}{2}Qr^2 + \tfrac{1}{4}(PR - 4S)r - \tfrac{1}{8}(P^2S - 4QS + R^2) = 0,$$

waaruit r gevonden kan worden; door middel der vergelijkingen (α) vindt men verder s en t en zoodoende de wortels der vergelijking.

11. Past men ook deze methode toe op het voorbeeld van N°. 3, dan hebben wij $P = 0$, $Q = -15$, $R = -10$, $S = 24$, en

$$r^3 + \tfrac{15}{2}r^2 - 24r - 39\tfrac{5}{2} = 0,$$

of na vermenigvuldiging met de reeks 1, 2, 4, 8.

$$z^3 + 15z^2 - 96z - 1540 = 0$$

dezelfde vergelijking, die wij in N°. 3 gevonden hebben, en die tot wortels heeft

$$z_1 = 10,\ z_2 = -11,\ z_3 = -14.$$

De verdere bewerking laten wij aan den Lezer, wien wij tevens overlaten de verschillende omstandigheden te bepalen, die het imaginair zijn van twee of vier wortels ten gevolge hebben enz.

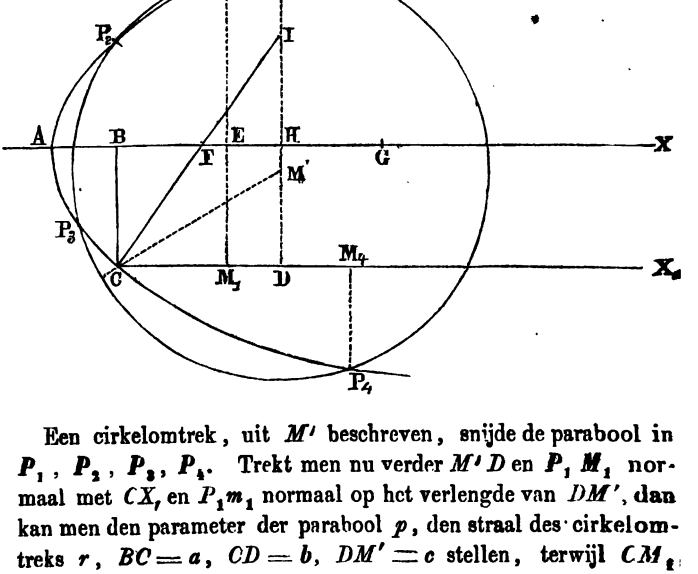
Aanmerkingen. 1. De laatst verklaarde oplossing is van SIMPSON, een Engelsch wiskundige der vorige eeuw, en onderscheidt zich daardoor van de andere methoden, dat de tweede term uit de vergelijking niet behoeft verdreven te worden.

2. De derdemachtsvergelijking, die bij alle oplossingen gebleken is de zelfde te zijn, heet bij EULER *Resolvente*, bij LAGRANGE *réduite*. (Vergel. BALTZER *Elem.* I, § 2, § 7.)

3. De ontdekkingen van TARTALEA en FERRARE gaven eenig recht om te vermoeden, dat ook vergelijkingen van

hoogeren graad dan de vierde, rechtstreeks zouden kunnen opgelost worden. Tot nog toe is het echter niet mogen gelukken daarvoor eene rechtstreeksche oplossing te vinden. Bovendien geven de berekeningen, die vereischt worden om den wortel uit derde- en vierdemachtsvergelijkingen te vinden, grond om aan te nemen dat „eene algemeene formule voor de oplossing der hooge machtsvergelijkingen eer uit een theoretisch, dan uit een practisch oogpunt als belangrijk te beschouwen zou zijn." (LOBATTO, *Algebra.*)

12. Zij P_1AP_4 eene parabool, waarvan A de top, AX de as en CX_1 eene middellijn is, op een afstand BC van de as getrokken.



Een cirkelomtrek, uit M' beschreven, snijde de parabool in P_1, P_2, P_3, P_4. Trekt men nu verder $M'D$ en P_1M_1 normaal met CX_1 en P_1m_1 normaal op het verlengde van DM', dan kan men den parameter der parabool p, den straal des cirkelomtreks r, $BC = a$, $CD = b$, $DM' = c$ stellen, terwijl CM_1 en M_1P_1 de x en y van het punt P_1 zijn; wanneer C als oorsprong en CX_1 als as der x van rechthoekige coördinaten wordt aangenomen.

De topvergelijking van de parabool is $y'^2 = px'$; maar $y' = EP_1 = M_1P_1 - M_1E = y - a$. $BC^2 = p \times AB$, d. i. $AB = \frac{a^2}{p}$. $x' = AE = AB + BE = \frac{a^2}{p} + x$, derhalve:

$$(y-a)^2 = p\left(\frac{a^2}{p} + x\right),$$

of na ontwikkeling:

$$px = y^2 - 2ay \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

De vergelijking van den cirkelomtrek is, omdat b en c de coördinaten van het middelpunt zijn:

$$(y-c)^2 + (b-x)^2 = r^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

Ontwikkelt men deze vergelijking en schrijft men daarin voor x de waarde, die zij in de vergelijking (α) heeft, dan vindt men na behoorlijke herleiding:

$$y^4 - 4ay^2 + 4a^2 \left| y^2 + 4abp \right| y + c^2 \left| p^2 = 0. \right.$$
$$\left. \begin{matrix} + p^2 \\ - 2bp \end{matrix} \right\} \left. \begin{matrix} - 2cp^2 \end{matrix} \right\} \left. \begin{matrix} + b^2 \\ - r_2 \end{matrix} \right|$$

waarin alle grootheden slechts naar hare grootte (quantiteit) in rekening worden gebracht.

Neemt men nu eene algemeene vierdemachtsvergelijking aan:

$$y^4 - Py^3 + Qpy^2 + Rp^2y - Sp^3 = 0,$$

dan is: $4a = P$ of $a = \frac{1}{4}P$

$$4a^2 + p^2 - 2bp = Qp \quad \text{of} \quad b = \frac{2a^2}{p} + \tfrac{1}{2}p - \tfrac{1}{4}Q.$$

$$4ab - 2pc = Rp \quad \text{of} \quad c = \frac{2ab}{p} - \tfrac{1}{2}R$$

$$c^2 + b^2 - r^2 = -Sp \quad \text{of} \quad r^2 = b^2 + c^2 + Sp.$$

Nu is $\frac{2a^2}{p} = 2AB$, $\frac{2ab}{p}$ is de vierde evenredige tot p, a en $2b$ en Sp is de middelevenredige tusschen S^2 en p^2.

Een en ander geeft nu aanleiding tot de volgende geometrische oplossing eener vierdemachtsvergelijking.

Met een willekeurigen parameter p teekene men eene parabool en trekke op een afstand $BC = \frac{1}{4}P$ de middellijn CX_1, wanneer P positief is, dat is het teeken — voor zich heeft. Is P nega-

tief, dan trekt men CX_1 aan de andere zijde der as. Daarna neme men $BF = \frac{1}{2}p$ en $FG = 2AB = \frac{2a^2}{p}$; dan van G naar H $GH = \frac{1}{2}Q$, wanneer Q positief is; dan is $BH = BF + FG - HG = \frac{1}{2}p + \frac{2a^2}{p} - \frac{1}{2}Q = b$, derhalve is ook $CD = b$. Vervolgens trekke men door C en F eene rechte lijn, die het verlengde van DH in I snijdt, dan is $DI = \frac{2ab}{p}$, omdat $FB : BC :: CD : DI$ of $\frac{1}{2}p : a :: b : DI$. Op DI neme men $ICM' = \frac{1}{2}R$ in de richting naar D, dan is M' het middelpunt van den cirkelomtrek, welks straal nog geconstrueerd moet worden. Wij vonden $r^2 = b^2 + c^2 + Sp$, waarbij S positief en negatief kan zijn. De constructie van de lijn r wordt in de elementaire meetkunde geleerd, wij nemen die dus aan als bekend en beschrijven met r als straal een cirkelomtrek, die de parabool

in vier punten zal snijden, wanneer de vier wortels reëel zijn;

in twee punten zal snijden en in één punt raken, wanneer de vergelijking vier reëele wortels heeft, waarvan er twee gelijk zijn;

in twee punten zal snijden, wanneer twee wortels reëel en twee imaginair zijn;

in twee punten zal raken, wanneer er twee paren gelijke reëele wortels zijn;

in één punt zal raken, wanneer er een paar gelijke reëele en een paar imaginaire wortels zijn;

in geen punt zal raken of snijden, wanneer er geene reëele wortels aan de vergelijking voldoen.

Voor het geval, dat er drie wortels gelijk en reëel zijn, wordt er slechts een door de constructie aangewezen.

Is S negatief en $Sp > b^2 + c^2$, dan is r imaginair en zonder constructie ziet men dan, dat alle wortels der vergelijking imaginair zijn. De parameter wordt hierbij natuurlijk aangenomen als eenheid.

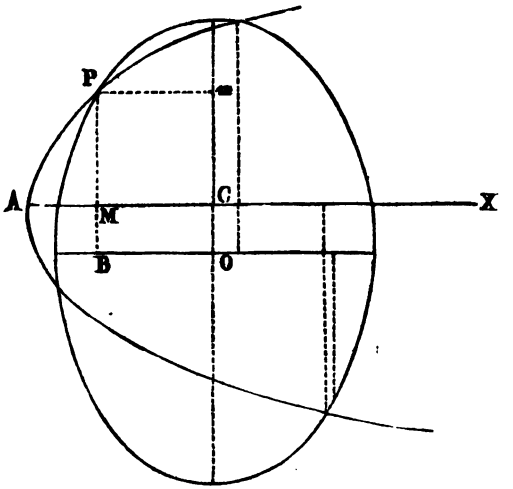
Aanmerkingen. 1. Dergelijke constructie is ook toe te passen op eene volkomen derdemachtsvergelijking. Heeft men namelijk de vergelijking

$$y^3 - Py^2 + Qy + R = 0,$$

dan vermenigvuldigt men deze met y en krijgt dan eene vierdemachtsvergelijking $y^4 - Py^3 + Qy^2 + Ry + S = 0$, waarvan $S = 0$. Bij constructie door middel van parabool en cirkelomtrek, zal de cirkelomtrek juist door den top der parabool gaan, waardoor een wortel $y = 0$ gevonden wordt.

2. Voor negatieve waarden van de coëfficiënten, worden deze geconstrueerd in juist tegenovergestelde richting, als wij ze in de figuur hebben afgeteekend. Met eenige opmerkzaamheid zal de Lezer hiermede weinig moeite hebben.

3. Het is duidelijk, dat men eene vierdemachtsvergelijking ook kan oplossen door middel van de snijding van eene ellips en eene parabool.



Zij $AM = x$ en $PM = y$, dan is in de parabool $px = y^2$ of $x = \frac{y^2}{p}$ . . . . . (α)

Zij O het middelpunt van de ellips, dan is, $OC = b$ en $AC = c$ stellende:
$Om = OC + Cm = b + y$ en $OB = CM = AC - AM = c - x$; stellen wij nu verder de assen der ellips $2A$ en $2B$, dan heeft men voor hare vergelijking:

$$\frac{(b+y)^2}{A^2} + \frac{(c-x)^2}{B^2} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\beta)$$

Hierin de waarde van x uit (α) substitueerende, vindt men na behoorlijke herleiding:

$$y^4 + \frac{B^2p^2 - 2A^2op}{A^2}y^2 + \frac{2B^2bp^2}{A^2}y + \frac{A^2C^2 + B^2b^2 - A^2B^2}{A^2} = 0.$$

Door deze normaalvergelijking met eenige vierdemachtsvergelijking, waaruit de tweede term verdreven is, te vergelijken, zal men uit de laatste de wortels kunnen bepalen. Wij laten dit intusschen gerustelijk over aan den Lezer.

4. Het oplossen *van vierdemachtsvergelijkingen* door middel eener figuur, heeft verschillende beoefenaars gevonden. In de eerste plaats verdient DESCARTES genoemd te worden, die daaraan ruim 9 bladzijden wijdt. (Zie zijne Geometrie III : XXV). Zie ook de *Grond beginselen van alle de mathematische Wetenschappen door* CHR. WOLFF, *in het Nederl. vertaald door* J. CHR. VAN SPRÖGEL. 1738. pag. 470 sqq.

Zeer verdienstelijke verhandelingen over de oplossing der derde en vierde machtsvergelijkingen vindt men achter CASTILLIONE's uitgave van NEWTON's *Arithmetica univers.*: o. a. COLSON's *Aequationum cub. en biquad. tum geom. et mech., resol. univ.*; HALLEY's *de constr. probl. solidorum.* KLÜGEL W. I. pag. 140 sqq.

5. Al de bijzonderheden der meetkundige constructie na te gaan, ligt buiten het bestek van dit werk. Voor hen, die de analytische meetkunde kennen, zal bovenstaande aanwijzing voldoende zijn, om hun het opsporen der wortels door constructie duidelijk te maken; hun daarentegen, die aan de anal. meetk. nog weinig of niets gedaan hebben, moet ik aanraden dit N°. over te slaan, omdat zij daarvan niets zullen begrijpen en het daarbij voor het verband van het geheel niet noodig is. — Zeer nuttig is het voor de eerstgenoemden na te gaan, wanneer en hoe vergelijkingen opgelost kunnen worden door middel van de snijding van parabool en hyperbool; van twee parabolen, enz.

18. Even als bij de kubische vergelijkingen zouden wij nu nog de goniometrische oplossing van de biquadratische vergelijkingen kunnen behandelen. Dewijl wij echter verschillende leerwijzen hebben leeren kennen, om de vierdemachtsvergelijking terug te brengen tot eene derdemachtsvergelijking en de goniometrische oplossing daarvan reeds behandeld is, zouden wij hier in eene herhaling vallen van § 14, 7 enz. — Wij eindigen daarom met de opgave van eenige vraagstukken, die wij den Lezer aanraden volgens verschillende methoden op te lossen.

VRAAGSTUKKEN.

1. $x^3 - 6x^2 + 13x - 12 = 0$. 2. $x^3 - 3x - 1 = 0$.
3. $x^3 - 22x - 24 = 0$. 4. $x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 4x - 8 = 0$.
5. $x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 4x - 8 = 0$.

ANTWOORDEN.

1. $x = 3$, $x_1 = \frac{3+\sqrt{-7}}{2}$, $x_2 = \frac{3-\sqrt{-7}}{2}$.
2. $x = 1.8794$, $x_1 = -1,5321$, $x_2 = -0,3473$.
3. $x = 5,1623$, $x_1 = -1,1623$, $x_2 = -4$.
4. $x = 5,2361$, $x_1 = 0,7639$, $x_2 = 2,7320$, $x_3 = -0,7320$.
5. $x = 3+\sqrt{5}$, $x_1 = 3-\sqrt{5}$, $x_2 = 1+\sqrt{3}$, $x_3 = 1-\sqrt{3}$.

ALGEMEENE HERHALING.

1. Men vraagt de waarde van x in de vergelijking:
$$\sqrt{(cx - ac)} = b + \sqrt{(x-a)}.$$
2. Welke is de waarde van x in de evenredigheid:
$$\sqrt{\frac{3x}{2}} : \sqrt{(x-1)} :: 3 : 1 ?$$
3. Men vraagt naar de waarde van x in de vergelijking:
$$(b^4 - x^4)^{\frac{1}{4}} = (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}.$$
4. Welke zijn de waarden van x en y in de vergelijkingen:
$$a\frac{x-c}{a+b} + b\frac{y-c}{a-b} = a + b \text{ en } b\frac{x-a}{b+c} - a\frac{y-a}{b-c} = b - a.$$

5. Welke zijn de waarden van x, y en z in de vergelijkingen

$$\frac{x+y}{a}+\frac{x+z}{a-b}-\frac{y+z}{a-c}=3\frac{x-a}{c-b},$$

$$\frac{x-y}{c-b}+\frac{x-z}{c}-\frac{y-z}{b}=2\frac{y-b}{a-c},$$

$$\frac{x+y-z}{a+b+c}=\frac{ax+by-cz}{a^2+b^2-c^2}?$$

6. Men vraagt naar de waarden der onbekenden uit het volgende stelsel vergelijkingen :

$$\begin{aligned}
x+y+z+t+u&=a\\
x+y+z+u+w&=b\\
x+y+z+t+w&=c\\
x+y+u+t+w&=d\\
x+z+u+t+w&=e\\
y+z+u+t+w&=f.
\end{aligned}$$

7. Men vraagt de waarde van x in de vergelijking :

$$x^2+2x+4\sqrt{(x^2+2x+1)}=44.$$

8. Welke is de waarde van x in de vergelijking :

$$\frac{x^2}{(x^2-4)^2}+\frac{6}{x^2-4}=\frac{351}{25x^2}?$$

9. Bereken x uit de vergelijking :

$$ab^2x^2+(1+c)bd\sqrt{c}+cb^2x^2=[b^2d\sqrt{c}+(ab+c)(1+c)]\,x.$$

10. Doe hetzelfde uit de vergelijking :

$$7\sqrt{(\tfrac{3}{4}x-5)}-\sqrt{\left(\frac{x}{5}+45\right)}-\tfrac{7}{4}\sqrt{(10x+56)}=0.$$

11. Men vraagt de waarden van x, y en z uit de vergelijkingen :

$$\frac{xyz}{x+y}=a,\quad \frac{xyz}{y+z}=b,\ \frac{xyz}{x+z}=c.$$

12. De waarden van x en y moeten bepaald worden uit de vergelijkingen :

$$\frac{18x}{y}=\frac{8y}{x},\text{ en }3xy+2x+y=485.$$

13. De waarden van x te bepalen uit de vergelijking :

$$x^3=15x^2-71x+297.$$

14. Men verlangt hetzelfde van de vergelijking :

$$x^3+6x^2-9x+3=0.$$

15. Doet hetzelfde van de vierdemachtsvergelijking:
$$x^4 - 12x^2 + 12x - 3 = 0.$$
16. Men vraagt de waarden van x uit de vergelijking:
$$13x^3 - 15\sqrt[3]{169}.x^2 + 27\sqrt[3]{13}.x - 13 = 0.$$
17. Men vraagt naar de waarden van x en y uit de vergelijkingen:
$$\frac{3x^3+xy^2}{x-y} = 5292 \text{ en } \frac{3x^6+10x^4y^2-3x^2y^4}{x^2-2xy+y^2} = 10859184.$$
18. Welke zijn de waarden van x en y in de vergelijkingen:
$x^3 - 4x^2y + 5xy^2 - 2y^3 = 0$ en $x^4 + 16xy = 1584$?
19. $x+y+z=10$, $x^2+y^2+z^2=42$, $xy-xz-yz=11$.
Welke waarde hebben in deze vergelijkingen x, y en z?
20. Men vraagt naar de waarden van x en y in de vergelijkingen:
$$x\sqrt{x} + \sqrt{x^3y^3} + y\sqrt{y} = a \text{ en } x^2 + xy\sqrt{xy} + y^2 = b.$$
21. Eenige personen eenig geld moetende deelen bevinden, dat er f 20 overblijft, indien elk f 5 neemt en f 70 te kort komt, indien elk f 6 ontvangt. Hoe veel moet ieder ontvangen, als zij elk even veel krijgen?
22. Men heeft drie metalen kanonstukken; het eerste is gegoten uit een mengsel van 0,8 koper, 0,12 messing en 0,08 tin; het tweede uit een mengsel van 0,85 koper, 0,1 messing en 0,07 tin; het derde uit een mengsel van 0,85 koper, 0,06 messing en 0,09 tin. Indien men uit het metaal van deze drie stukken een ander wil gieten, welks mengsel bestaat uit 0,82 koper, 0,105 messing *) en 0,065 tin, vraagt men in welke verhouding het metaal der kanonnen gemengd moet worden.
23. Eene belegerde vesting wordt uit drie batterijen beschoten. Terwijl uit de eerste batterij 7 schoten gedaan worden, doet men er uit de tweede 5; terwijl men er uit de tweede 9 doet, doet men er uit de derde 8. Indien men het aantal schoten uit de eerste batterij eens vermenigvuldigt met het aantal schoten uit de tweede, en eens met het aantal schoten uit de derde batterij en de som neemt van

*) Messing = geel koper; eene vereeniging van rood koper en zink.

deze producten, dan heeft men zooveel minder, dan 1881680, als aangewezen wordt door het product der schoten uit de tweede en derde batterijen. Hoeveel schoten zijn er uit elke batterij gedaan?

24. Van een gelijkbeenigen driehoek is de inhoud a^2 en de omtrek $= O$, men vraagt naar de zijden.

25. In een gelijkbeenigen driehoek worden drie cirkeltrekken beschreven; de grootste raakt de drie zijden, de beide andere raken de opstaande zijden en den daaronder liggenden cirkelomtrek; indien nu de straal van den grootsten cirkeltrek $= r_1$, die van den kleinsten r_2 is, dan vraagt men naar de basis en de opstaande zijden.

ANTWOORDEN.

1. $x = a + \frac{b^2}{c - 2\sqrt{c} + 1}$.

2. $x = 1\frac{1}{2}$.

3. $x = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{b^4 - a^4}{2}}$.

4. $x = a + b + c$ en $y = a - b + c$.

5. $x = a - b + c$, $y = a + b - c$, $z = a - b - c$.

6. Stelt men $s = a + b + c + d + e + f$, dan is: $x = \frac{1}{5}s - f$ $y = \frac{1}{5}s - e$, $z = \frac{1}{5}s - d$, $w = \frac{1}{5}s - c$, $t = \frac{1}{5}s - b$, $w = \frac{1}{5}s - a$.

7. $x = 4$ of -10.

8. $x = \pm 3$ of $\pm\sqrt{\frac{39}{11}}$.

9. $x = \frac{bd\sqrt{c}}{ab + c}$ of $\frac{1 + c}{b^2}$.

10. $x = 20$.

11. $x = \pm\sqrt{\frac{2abc(ab - ac + bc)}{(ab + ac - bc)(bc + ac - ab)}}$,

$y = \pm\sqrt{\frac{2abc(bc + ac - ab)}{(ab + ac - bc)(ab - ac + bc)}}$,

$z = \pm\sqrt{\frac{2abc(ab + ac - bc)}{(ab - ac + bc)(bc + ac - ab)}}$.

12. $x = 10$, of $= -\frac{97}{9}$, of $= \frac{1 \pm \sqrt{-34919}}{18}$;

$x = 15$, of $= -\frac{97}{6}$, of $= \frac{-1 \pm \sqrt{-34919}}{18}$.

13. $x_1 = 5 + \sqrt[3]{\frac{864+\sqrt{746304}}{9}} + \sqrt[3]{\frac{864-\sqrt{746304}}{9}} = 11$

$x_2 = 2 + \sqrt{-23}$ en $x_3 = 2 - \sqrt{-23}$.

14. $x_1 = 0{,}5739$, $x_2 = 0{,}7168$, $x_3 = -7{,}2908$.

15. $x_1 = 2{,}85808$, $x_2 = 0{,}60601$, $x_3 = 0{,}44327$, $x_4 = -3{,}90737$.

16. $x_1 = \frac{1}{13}\sqrt[3]{169}$, $x_2 = \frac{1}{13}\sqrt[3]{169}$ en $x_3 = \sqrt[3]{169}$.

17. Eene der waarden van x en y is: $y = 36$, $y = 9$.

18. $x = \pm 6$ en $x = \pm 6\sqrt{-1}$; $y = \pm 3$ en $y = \pm 3\sqrt{-1}$.

19. $x = 4$, $y = 5$ en $z = 1$.

20. $x = \left\{\frac{\pm\sqrt{(3a^2-b)} + \sqrt{(5b-a^2)}}{2\sqrt{2a}}\right\}^{\frac{4}{3}}$;

$y = \left\{\frac{\pm\sqrt{(3a^2-b)} + \sqrt{(5b-a^2)}}{2\sqrt{2a}}\right\}^{\frac{5}{3}}$.

21. $f\,5\frac{1}{3}$.—

22. 0,375 van het 1e, 0,5625 van het 2e en 0,0625 van het derde kanon.

23. Uit de eerste 1008; uit de tweede 720; uit de derde 640.

24. De basis $= \sqrt[3]{\left\{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}\right\}} +$

$+ \sqrt[3]{\left\{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3\right)}\right\}}$, waarin $p = -\frac{O^2}{12}$ en

$q = \frac{864a^4 - O^4}{1080}$.

25. De basis $= \frac{r_1}{r_2}\sqrt[3]{r_1 r_3^2}$; de opstaande zijde $r_1 + r_3 + 2\sqrt{r}$.

AFDEELING II.

OVER DE ONBEPAALDE VRAAGSTUKKEN.

§ 15. Onbepaalde vraagstukken van den eersten graad met ééne onbekende.

1. Vroeger (§ 2 en § 7) is door ons opgemerkt geworden, dat een vraagstuk bepaald is, wanneer men zoovele niet-identieke, onderling onafhankelijke, niet met elkander in strijd zijnde vergelijkingen kan opschrijven, als men onbekenden heeft aangenomen. Heeft men dus een vraagstuk met ééne onbekende in vergelijking gebracht en is zoodanige vergelijking identiek, d. i. kan men voor x alle mogelijke waarden aannemen en voldoen deze aan de vergelijking, dan is het vraagstuk *onbepaald;* in plaats van één antwoord, dat aan de vergelijking voldoet, vindt men er oneindig veel. Intusschen is hierbij niet uit het oog te verliezen, dat er in het vraagstuk zelf voorwaarden kunnen voorkomen, die, ofschoon niet in vergelijking kunnende gebracht worden, het aantal antwoorden zeer beperken, ja dikwijls tot één enkel antwoord terug brengen, gelijk wij somtijds gelegenheid zullen hebben op te merken. Een enkel voorbeeld zal voldoende zijn, om ons met deze handelwijze bekend te maken.

Aanmerking. Eene zeer fraaie en uitvoerige verhandeling over de onbepaalde vraagstukken is te vinden in EULER's tweede deel der Algebra. Van dit werk, dat door LAGRANGE met zeer belangrijke noten verrijkt geworden is, bestaat, gelijk ik vroeger reeds opgemerkt heb, eene uitmuntende Fransche vertaling, die door mij bij deze verhandeling herhaaldelijk gevolgd zal worden. Ook heeft men daarvan

eene Nederlandsche vertaling van M. S. S. BEVEL, waarvan in 1807 de tweede druk verschenen is. Hun, die soms vragen, waarom dit gedeelte der algebra zoo uitvoerig behandeld is, antwoord ik met de woorden van EULER: „Il arrive que cette partie de l'analyse demande souvent des artifices tout-à-fait particuliers, et qu'elle sert beaucoup à aiguiser l'esprit des commençants, et à leur donner de l'adresse dans le calcul. — Ik ben deze meening van den grooten wiskundige geheel toegedaan.

2. Vraagstuk. ***Een getal bestaat uit drie cijfers: het cijfer der tientallen is één meer dan dat der honderdtallen en dat der eenheden is het zevende deel van het vijfvoud van de som van de cijfers der tientallen en honderdtallen. Deelt men het geheele getal door honderd, dan vindt men het $\frac{39}{35}$ gedeelte van het cijfer der honderdtallen, vermeerderd met $\frac{3}{28}$. Men vraagt naar dat getal.***

Stelt men het cijfer der honderdtallen voor door x, dan is dat der tientallen $x+1$ en dat der eenheden $\frac{5(2x+1)}{7}$. Verder is volgens de gegevens van het vraagstuk:

$$\frac{100x+10(x+1)+\frac{5(2x+1)}{7}}{100}=\frac{39}{35}x+\frac{3}{28}.$$

$$700x+70x+70+10x+5=780x+75$$

$$780x+75=780x+75.$$

De vergelijking is dus identiek en zou een oneindig aantal antwoorden toelaten, indien men niet wist, dat $\frac{5(2x+1)}{7}$ een cijfer voorstelt en men dus in ieder geval heeft:

$\frac{5(2x+1)}{7}<9\frac{2}{7}$ Verder heeft men, dat $\frac{1}{7}(2x+1)$ een geheel getal moet zijn; dewijl nu 7 geen factoren gemeen heeft met 5, moet $2x+1$ een zevenvoud zijn; zij $2x+1=7t$, dan is $7t<13$, waarin t een geheel getal is, dus $t<1\frac{6}{7}$, derhalve hoogstens $=1$. Is nu $2x+1=7$, dan is $x=3$ en het begeerde getal is 345, zijnde het eenige, dat aan de voorwaarden van het vraagstuk voldoet; waaruit ons blijkt, dat

$2x+1<13$

$x<6$

de nevenomstandigheden van het vraagstuk, welke niet in de vergelijking konden opgenomen worden, het vraagstuk volkomen bepalen.

---

§ 16. Onbepaalde vraagstukken van den eersten graad met twee en meer onbekenden.

1. Wanneer men ééne vergelijking heeft van den eersten graad met twee onbekenden, dan mag men voor eene onbekende willekeurige waarden aannemen en kan daarna de andere onbekende uit de vergelijking oplossen. Hierdoor ontstaan voor de beide onbekenden wederom een zeer groot aantal waarden, die intusschen door nevenomstandigheden van het vraagstuk zeer beperkt kunnen worden. Wij brengen deze soort van vergelijkingen tot drie hoofdvergelijkingen. Men vindt namelijk voor eindvergelijking

$$ax + by = c$$
$$ax - by = c$$
$$ax - by = 0$$

waarin a, b en c positieve getallen voorstellen.

Aanmerking. Men lette hier op de uitdrukking eindvergelijking, daar wij in deze paragraaf voornamelijk die vraagstukken zullen behandelen, welke, ofschoon n onbekenden bevattende, slechts aanleiding geven tot $n-1$ onderling onafhankelijke vergelijkingen van den eersten graad, waarbij de eindvergelijking dus altijd van de opgegeven gedaante is.

2. Vraagstuk. *Er zijn twee kogelstapels, waarin te zamen* 180 *kogels liggen. Telt men de kogels van den eersten stapel zeven aan zeven, dan blijven er twee over en telt men de kogels van den tweeden stapel dertien aan dertien, dan blijven er ook twee over. Hoeveel kogels zijn er in iederen stapel?*

Veronderstelt men, dat men uit den eersten stapel x hoopen van 7 kogels, uit den tweeden stapel y hoopen van 13 kogels kan leggen, dan heeft men de vergelijking

$$7x + 2 + 13y + 2 = 180,$$

waarin x en y geheele getallen moeten zijn en bovendien, om rechtstreeks aan de vraag te voldoen, ook positief.

Uit deze vergelijking volgt $7x = 176 - 13y$ of $x = 25 - y - \frac{6y-1}{7}$.

Maar omdat x een geheel getal moet zijn, moet $6y-1$ deelbaar zijn door 7; wij kunnen dus stellen $6y - 1 = 7p$, waarin p een geheel getal voorstelt. Daaruit volgt $y = p + \frac{p+1}{6}$. Dewijl y een geheel positief getal moet zijn, moet $\frac{p+1}{6}$ ook een geheel getal zijn; men kan dus stellen $p + 1 = 6q$ of $p = 6q - 1$, waarin ook q weder een geheel getal is. Daaruit wordt nu onmiddellijk afgeleid:

$$y = 7q - 1$$
$$x = 27 - 13q,$$

waarin q een geheel getal moet zijn. Dewijl y en x positief moeten zijn, om rechtstreeks aan de vraag te voldoen, is ook noodzakelijk

$$7q > 1 \quad \text{en} \quad 27 > 13q;$$

derhalve:

$$q > \tfrac{1}{7} \quad \text{en} \quad q < 2\tfrac{1}{13}.$$

Tusschen deze twee grenzen zijn slechts twee geheele waarden voor q gelegen, namelijk $q = 1$ of $q = 2$; men vindt dus $x = 14$ of $= 1$ en $y = 6$ of $= 13$.

$7x + 2 =$ aantal kogels van den eenen stapel $= 100$ of 9;
$13y + 2 =$ " " " " tweeden " $= 80$ of 171;

zoodat dit onbepaalde vraagstuk maar twee waarden voor de onbekenden toelaat.

3. Vraagstuk. *Een man koopt vogels van vijf cent, van één gulden en van vijf gulden het stuk. Indien hij voor f 100 honderd levende vogels koopt, hoeveel heeft hij er dan van elke soort?*

Stelt men, dat hij x vogels heeft van f 0,05, y van f 1, dan heeft hij er $100 - x - y$ van f 5. De eerste soort kost hem dus $5x$, de tweede $100y$, de derde $500\ (100 - x - y)$ cent, dat is te zamen f 100; derhalve:

$$5x + 100y + 50000 - 500x - 500y = 10000.$$
$$400y + 495x = 40000$$
$$80y + 99x = 8000$$

$y = 100 - x - \frac{12}{80}x.$

Dewijl y een geheel getal moet zijn, is

$19x = 80p,$

$x = 4p + \frac{4}{19}p;$

x een geheel getal moetende zijn, is

$4p = 19q,$

$p = 4q + \frac{3}{4}q;$

dewijl p een geheel getal moet zijn, is

$3q = 4r,$

$q = r + \frac{1}{3}r;$

omdat ook q een geheel getal is, heeft men

$r = 3s.$

Deze waarden van overbrengende, vin men:

$r = 3s,$

$q = 4s,$

$p = 19s,$

$x = 80s,$

$y = 100 - 99s.$

Opdat nu x en y geheele positieve getallen zijn, daar hier va andere getallen geene sprake kan zijn, moet s ook een gehee positief getal zijn; bovendien moet $100 > 99s$ dus $s < 1\frac{1}{99}$. Aangezien er nu maar één geheel positief getal kleiner is dan $1\frac{1}{99}$, stellen wij $s = 1$, dan wordt $x = 80$, $y = 1$ en het onbepaalde vraagstuk is zoo bepaald mogelijk, daar het slechts één antwoord toelaat.

4. De beide vorige vraagstukken gaven aanleiding tot eene vergelijking van de gedaante $ax + by = c$,
en hadden een zeer beperkt aantal antwoorden. Thans willen wij een vraagstuk behandelen, dat aanleiding geeft tot eene vergelijking van de gedaante $ax - by = c$,
en wij zullen vinden, dat daaraan een oneindig groot aantal antwoorden voldoen.

Vraagstuk. *Twee geheele positieve getallen verschillen* 50. *Deel ik het grootste door* 11, *zoo rest er* 2; *deel ik het kleinste door* 12, *zoo rest er* 6. *Welke zijn die getallen?*

Het grootste getal voorstellende door $11x + 2$, het kleinste door $12y + 6$, heeft men de vergelijking:

$$11x - 12y = 54$$

$x = 4 + y + \frac{10+y}{11}$ en omdat x een geheel getal moet zijn,

$10 + y = 11r,$

$y = 11p - 10,$ derhalve $x = 12p - 6.$

Opdat x en y geheele positieve getallen zijn, behoeft men slechts te voldoen aan de voorwaarde $11p > 10$, d. i. $p > \frac{10}{11}$.

Neemt men dus voor p achtereenvolgens 1, 2, 3, 4, enz.

dan vindt men $x = 6, \quad 18, \quad 30, \quad 42,$ enz.

$y = 1, \quad 12, \quad 23, \quad 34,$ enz.

Zoodat de getallen zijn: $\begin{cases} 68, & 200, & 332, & 464, \text{ enz.} \\ 18, & 150, & 282, & 414, \text{ enz.} \end{cases}$

welk aantal antwoorden men tot in het oneindige voort kan zetten.

5. Tot eene vergelijking van de gedaante $ax - by = 0$ geeft aanleiding het volgende

Vraagstuk. *Men vraagt een getal, dat te gelijkertijd door* 3 *en* 11 *deelbaar is.*

Dit getal kan voorgesteld worden door $3x$ en door $11y$; derhalve is

$$3x = 11y, \quad x = 3y + \tfrac{2}{3}y, \quad 2y = 3p, \quad y = p + \tfrac{1}{2}p, \quad p = 2q,$$
$$x = 11q \qquad\qquad y = 3q.$$

Hierin kan men voor q alle geheele positieve getallen nemen en vindt zoodoende een oneindig aantal antwoorden, die aan de vraag voldoen.

Aanmerking. Zoodanige onbepaalde vraagstukken, als wij in dit en het voorgaand N°. behandeld hebben, worden dikwerf nader bepaald door de bijvoeging: „men vraagt de kleinste geheele getallen, die aan de vraag voldoen." Ofschoon er dan slechts één antwoord kan gegeven worden, blijft het vraagstuk *onbepaald*, omdat zonder eene nadere aanwijzing van het antwoord het onbepaald aantal antwoorden mogelijk bleef.

6. Vraagstuk. *Men vraagt het kleinst geheel positief getal, dat door* 3 *gedeeld* 2, *door* 7 *gedeeld* 1 *en door* 8 *gedeeld niet rest laat.*

Volgens de voorwaarden van het vraagstuk kan men het getal voorstellen door: $3x + 2$, $7y + 1$ en $8z + 5$, zoodat men de vergelijkingen heeft:

$$3x + 2 = 7y + 1 \quad \text{en} \quad 3x + 2 = 8z + 5.$$

Uit de eerste vergelijking vindt men, door op de gewone wijze te handelen:

$$3x = 7y - 1$$
$$x = 2y + \frac{y-1}{3}$$
$$y = 3p + 1, \quad \text{derhalve } x = 7p + 2.$$

Substitueert men nu deze waarde van x in de tweede vergelijking, dan heeft men:

$$8z = 21p + 3,$$
$$z = 2p + \frac{5p+3}{8},$$
$$p = q + \frac{3q-3}{5},$$
$$q = r + 1 + \frac{2r}{3},$$
$$r = s + \frac{s}{2},$$
$$s = 2t;$$

of door terug te werken:

$$s = 2t,$$
$$r = 3t,$$
$$q = 5t + 1,$$
$$p = 8t + 1,$$
$$z = 21t + 3,$$
$$y = 24t + 4,$$
$$x = 56t + 9.$$

Dewijl x, y en z aan geene andere voorwaarden moeten voldoen, dan dat zij geheel positief zijn, kan men voor t alle mogelijke waarden nemen van 0 tot $+\infty$. De kleinste waarden van x, y en z zijn dus 9, 4, 3, gevende volgens den eisch van 't vraagstuk het zelfde getal 29.

Men ziet hieruit, dat het vraagstuk, ofschoon met drie onbekenden, opgelost wordt even als een vraagstuk met twee onbekenden. Men drukt eerst twee onbekenden uit in eene derde, substitueert de waarde van ééne dier onbekenden in de tweede vergelijking en handelt dan op de gewone wijze. Wij willen thans nog een vraagstuk behandelen met vier onbekenden.

7. Vraagstuk. *Men vraagt vier geheele positieve getallen te vinden zoodanig, dat de som van driemaal het eerste, vijfmaal het tweede, zesmaal het derde en zevenmaal het vierde gelijk is aan tachtig; dat vijfmaal het eerste, plus tienmaal het tweede, plus twintigmaal het derde, plus veertigmaal het vierde, gelijk is aan driehonderd twintig en dat de som van het eerste en tweede gelijk is aan het vierde.*

Stelt men de onbekenden voor door x, y, u en v, dan is: $3x+5y+6u+7v=80$, $5x+10y+20u+40v=320$, $x+y=v$.

Trekt men nu tweemaal de eerste vergelijking van het $\frac{1}{3}$ gedeelte der tweede, dan vindt men:

$$10v - 4y - 3x = 82;$$

of, omdat volgens de derde vergelijking $10v = 10x + 10y$,

$$6y + 7x = 32$$

$$y = 5 - x + \frac{2-x}{6}$$

$$x = 2 - 6p, \qquad \text{dus } y = 3 + 7p,$$

$$v = x + y = 5 + p \quad \text{en} \quad u = 4 - 4p.$$

Dewijl x, y, u en v geheele positieve getallen moeten zijn, moet p ook een geheel getal zijn; verder is $2 > 6p$ dus $p < \frac{1}{3}$. Neemt men p negatief, dan moet $3 > 7p$; er blijft dus geene andere waarde dan $p = 0$, waardoor men vindt $x = 2$, $y = 3$, $u = 4$ en $v = 5$.

Wilde men ook sommige negatieve waarden toelaten, dan zoude men weder een zeer groot aantal antwoorden vinden.

Aanmerking. Voorstellen als het laatste komen zeer veel voor in de mengingrekening, vooral als er van menging van edele metalen sprake is. In de oudere rekenboeken worden zij gebracht tot de *Regula coeci* of *regula cecis* ook *regula virginum* genoemd. Vergelijk o. a. *Practicque om te leeren Rekenen, Cypheren ende Boeckhouden, deur* NICOLAUM PETRI DAUENTRIENSEM 1591 en alle volgende rekenboeken tot aan dat van STRABBE toe. KLÜGEL W. i. v. EULER II, 30. JEAN TRENCHANT II, pag. 198 etc. — In mijne *Theorie der Algem. Rekenk.* vindt men soortgelijke vraagstukken opgelost. Deel II, pag. 115.

8. Wij hebben ons tot hiertoe bezig gehouden met vraagstukken, wier eindvergelijking slechts twee onbekenden bevatte. Om aan de algemeenheid niet te kort te doen, willen wij thans nog een voorbeeld uitwerken, waarin de eindvergelijking meer dan twee onbekenden bevat.

Vraagstuk. *Men vraagt drie getallen zoodanig, dat het tweevoud van het eerste, vermeerderd met het drievoud van het tweede en het viervoud van het derde gelijk is aan* 29.

Stelt men de getallen voor door x, y, z, dan is

$$2x + 3y + 4z = 29.$$

Hieruit de onbekende met den kleinsten coëfficiënt oplossende, is $x = 14 - y - 2z - \frac{y-1}{2}$.

Verlangt men voor x, y, z geheel willekeurige getallen, dan kan men voor twee der onbekenden, bijv. voor y en z zoodanige waarden aannemen en vervolgens x oplossen.

Verlangt men geheele getallen, dan behoeft men slechts te zorgen, dat $\frac{y-1}{2}$ een geheel getal is, derhalve zal aan het vraagstuk voldaan worden, indien men y slechts oneven neemt.

Verlangt men positieve geheele getallen, dan stellen wij

$$\frac{y-1}{2} = p, \text{ zoodat } y = 2p + 1.$$

Verder vindt men: $x = 13 - (3p + 2z)$. Uit den aard der laatste voorwaarde volgt nu nog, omdat x, y en z geheele positieve getallen moeten zijn:

$$\begin{array}{llll} 13 > 3p + 2z & & y = 2p + 1 & 2p + 1 > 0 \\ 2z < 13 - 3p & & & p > -\frac{1}{2} \\ 3p < 13 & & & \\ p < 4\frac{1}{3} & & & \end{array}$$

Opdat aan deze voorwaarden voldaan worde, neme men achtereenvolgens $p = 0, 1, 2, 3, 4$, dan zal men vinden, omdat

$$z < \frac{13-3p}{2}:$$

dan is:

$$\begin{array}{llll} p = 0 & y = 1; & z = 6, 5, 4, 3, 2, 1; & x = 1, 3, 5, 7, 9, 11. \\ p = 1 & y = 3; & z = 4, 3, 2, 1; & x = 2, 4, 6, 8. \\ p = 2 & y = 5; & z = 3, 2, 1; & x = 1, 3, 5. \\ p = 3 & y = 7; & z = 1; & x = 2. \\ p = 4 & y = 9; & z = 0; & \text{voldoet niet.} \end{array}$$

Aanmerking. Bovenstaande oplossing is voldoende om den weg te wijzen, hoe men in soortgelijke gevallen te handelen heeft. Met eenige weinige opmerkzaamheid zal het niet moeilijk vallen de limieten, waarbinnen de antwoorden liggen, aan te wijzen. Zoo volgt bijv. uit $2z < 13 - 3p$, dat $13 - 3p > 2$, anders kan z geen geheel getal zijn, zoodat $p < 4$ weder eene nauwere grens

is dan $p < 4\frac{1}{4}$; door $p < 4$ te nemen vervalt juist de waarde, die $z = 0$ maakt en die wij daarom verworpen hebben.

---

§ 17. Onbepaalde vraagstukken met twee onbekenden, waarin eene onbekende van den eersten graad is.

1. De vergelijkingen, waarvan hier sprake is, hebben tot algemeene gedaante:

$a + bx + cy + dx^2 + exy + fx^3 + gx^2y + hx^4 + kx^3y +$ enz. $= 0$.

Wij zullen ons tot eenige weinige voorbeelden bepalen, die ons duidelijk zullen maken, hoe in dergelijke gevallen gehandeld moet worden. Voor het overige veronderstellen wij, dat hier alleen sprake is van geheele positieve getallen.

2. Vraagstuk. *Het product van twee getallen, vermeerderd met hunne som, is gelijk aan* 89; *welke zijn die getallen?*

Stelt men de getallen voor door x en y, dan is

$$xy + x + y = 89 \quad \text{of} \quad (x+1)y = 89 - x;$$

derhalve $$y = \frac{89-x}{x+1} = -1 + \frac{90}{x+1}.$$

Dewijl y een geheel getal moet zijn, is 90 deelbaar door $x+1$, en dewijl 90 tot deelers heeft:

	1,	2,	3,	5,	6,	9,	10,	15,	18,	30,	45,	90,
is $x =$	0,	1,	2,	4,	5,	8,	9,	14,	17,	29,	44,	89;
$y =$	89,	44,	29,	17,	14,	9,	8,	5,	4,	2,	1,	0.

De laatste getallen zijn dezelfde uitkomsten als de eerste; neemt men bovendien 0 niet in aanmerking, dan heeft men de volgende antwoorden:

$$x = 1, \ 2, \ 4, \ 5, \ 8;$$
$$y = 44, \ 29, \ 17, \ 14, \ 9.$$

3. Vraagstuk. *Zevenmaal het product van twee getallen, vermeerderd met tienmaal het eerste en zesmaal het tweede getal, bedraagt* 80; *welke zijn die getallen?*

Stelt men de getallen voor door x en y, dan heeft men onmiddellijk: $7xy + 10x + 6y = 80$,

of $(7x+6)y = 80-10x$; d. i.: $y = \frac{80-10x}{7x+6}$ of $7y = \frac{-70x+560}{7x+6}$,

waaruit $7y = -10 + \frac{620}{7x+6}$.

Omdat $7y$ een geheel getal moet zijn, moet ook $\frac{620}{7x+6}$ opgaan. De deelers van 620 zijn: **1, 2, 4, 5, 10, 20, 31, 62, 124, 155, 310, 620.** Van deze deelers kan men alleen die gebruiken, welke met 6 verminderd een zevenvoud opleveren, dus 20 en 62. Hieruit nu vindt men gemakkelijk $x = 2$ en $y = 3$, of $x = 8$ en $y = 0$; zoodat er in den eigenlijken zin van het vraagstuk slechts door één antwoord voldaan wordt.

4. De vraagstukken, in de beide vorige N°s. opgegeven, zijn van de algemeene gedaante

$$mxy = ax + by + c, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

waarin m, a, b en c bekende getallen zijn. In het eerste vraagstuk is $m = 1$, $a = b = -1$, $c = 89$; in het tweede is $m = 7$, $a = -10$, $b = -6$, $c = 80$. Op gelijke wijze handelende, als wij in de beide vorige voorbeelden deden, vindt men:

$$(mx-b)y = ax + c, \text{ dus } y = \frac{ax+c}{mx-b}.$$

Vervolgens verdrijft men x uit den teller, door beide leden der laatste vergelijking met m te vermenigvuldigen, zoodat

$$my = \frac{max+mc}{mx-b} = a + \frac{mc+ab}{mx-b}.$$

Dewijl my een geheel getal is, moet $\frac{mc+ab}{mx-b}$ zulks ook zijn; $mx-b$ is derhalve een deeler van $mc + ab$. Schrijft men nu alle deelers van $mc + ab$ op, dan zullen die deelers waarden voor x zijn, welke met b vermeerderd, een m-voud zijn. Zijn nu onder de deelers van $mc + ab$ een of meer, die den vorm $mx-b$ hebben, dan is $mc + ab$ ontbindbaar in twee factoren, want uit

$$my = a + \frac{mc+ab}{mx-b} \text{ volgt } my - a = \frac{mc+ab}{mx-b},$$

$$\text{of } (my-a)(mx-b) = mc + ab.$$

5. De handelwijze van het vorige N°. is algemeen en kan toegepast worden op alle vormen van de algemeene gedaante, die wij in N°. 1 hebben opgegeven. Heeft men bijv.

$$mx^2 + nxy = ax + by + c,$$

dan is $y = \frac{ax - mx^2 + c}{nx - b}$, of na vermenigvuldiging met n^2

$$yn^2 = -mnx + an - mb + \frac{n^2c + abn - mb^2}{nx - b};$$

dewijl nu yn^2 een geheel getal is, moet ook het gebroken uit het tweede lid een geheel getal worden; men spoort derhalve de deelers op, die met b vermeerderd, door n deelbaar zijn, enz.

Heeft men de vergelijking

$$gx^2y + fx^2 + exy + dx^2 + cy + bx = a,$$

dan is $y = \frac{-fx^2 - dx^2 - bx + a}{gx^2 + ex + c}$, met welken vorm men wederom op dergelijke wijze handelt.

---

§ 18. Over het rationeel maken van eenige polynomia.

1. Vraagstuk. *Welke waarde moet men aan x geven, opdat $1 + x^2$ een zuiver vierkant worde?*

Stellen wij $1 + x^2 = (x + q)^2$, dan vinden wij:

$$1 + x^2 = x^2 + 2qx + q^2,$$

of $x = \frac{1 - q^2}{2q}$, waarin men voor q alle geheele en gebroken, positieve en negatieve getallen nemen kan.

Substitueert men de gevondene waarde van x, dan vindt men:

$$1 + x^2 = 1 + \left(\frac{1-q^2}{2q}\right)^2 = \frac{4q^2 + 1 - 2q^2 + q^4}{4q^2} =$$

$$= \frac{1 + 2q^2 + q^4}{4q^2} = \left(\frac{1+q^2}{2q}\right)^2.$$

Vermenigvuldigt men het tweede en vijfde lid dezer vergelijking met $4q^2$, dan heeft men:

$$(2q)^2 + (1 - q^2)^2 = (1 + q^2)^2,$$

of $$(1 - q^2)^2 = (1 + q^2)^2 - (2q)^2;$$

waaruit wij leeren: *twee vierkanten te vinden, wier som, en twee andere vierkanten, wier verschil een vierkant is.*

Neemt men bijv. $q = 3$, dan is

$$36 + 64 = 100$$

$$64 = 100 - 36.$$

Men kan aan het vraagstuk ook nog op eene andere wijze voldoen, door te stellen:

$$1 + x^2 = \left(1 + \frac{mx}{n}\right)^2 = 1 + \frac{2mx}{n} + \frac{m^2x^2}{n^2}$$

$$n^2x - m^2x = 2mn$$

$$x = \frac{2mn}{n^2 - m^2}.$$

Hierdoor wordt:

$$1 + x^2 = 1 + \left(\frac{2mn}{n^2 - m^2}\right)^2 = \frac{n^4 - 2n^2m^2 + m^4 + 4m^2n^2}{(n^2 - m^2)^2} =$$

$$= \left(\frac{n^2 + m^2}{n^2 - m^2}\right)^2;$$

waaruit wederom volgt:

$$(n^2 - m^2)^2 + (2mn)^2 = (n^2 + m^2)^2,$$

of indien men tot voorbeeld neemt $n = 2$, $m = 1$:

$$9 + 16 = 25.$$

2. Vraagstuk. *Welke waarden moet men aan x geven, opdat $nx^2 + 1$ een zuiver vierkant worde en tevens een geheel getal zij?*

Indien hier eveneens gebroken waarden voldeden, zoude men slechts te stellen hebben $nx^2 + 1 = \left(1 + \frac{xp}{q}\right)^2$, waardoor men voor x vindt $\frac{2pq}{nq^2 - p^2}$. Dewijl hier echter alleen sprake is van geheele getallen, zullen wij een geheel anderen weg moeten inslaan.

Vooreerst merken wij op, dat n noch een negatief getal, noch een volkomen vierkant mag zijn, want is n negatief, dan is uit $nx^2 + 1$ geen wortel te trekken; is n een volkomen vierkant, dan zal $nx^2 + 1$ een getal voorstellen, dat eene eenheid grooter

is, dan een volkomen vierkant en dus geen vierkant zijn kan. Bovendien is de methode, die wij hier zullen aanwijzen, ofschoon algemeen, slechts toepasselijk voor ieder geval in 't bijzonder; wij zullen daarvan een paar gevallen uitwerken. Zij $n = 2$, dan moet $2x^2 + 1$ een volkomen vierkant zijn. Dewijl $2x > \sqrt{(2x^2 + 1)} > x$, stellen wij $2x^2 + 1 = (x + p)^2$ of $2x^2 + 1 = x^2 + 2px + p^2$ of $x^2 - 2px - p^2 + 1 = 0$; of alleen den positieven wortel in rekening brengende:

$$x = p + \sqrt{(2p^2 - 1)}.$$

Het komt er dan slechts op aan, dat $2p^2 - 1$ een vierkant zij; zulks heeft plaats, indien men $p = 1$ neemt; men heeft dus $x = 2$. Hieruit volgt $2x^2 + 1 = 9$, welk getal een volkomen vierkant is.

Nemen wij nu $n = 3$, dan moet $3x^2 + 1$ een volkomen vierkant worden. Dewijl $3x > \sqrt{(3x^2 + 1)} > x$, stellen wij $3x^2 + 1 = (x + p)^2 = x^2 + 2px + p^2$ of $2x^2 - 2px - p^2 + 1 = 0$, waaruit $x = \frac{p + \sqrt{(2p^2 - 2)}}{2}$. Hierin moet $2p^2 - 2$ een volkomen vierkant zijn, en dewijl $\sqrt{(3p^2 - 2)} > p$ en dus ook $x > \frac{2p}{2} > p$ moet zijn, stellen wij $x = p + q$ en vinden dan:

$2p + 2q = p + \sqrt{(3p^2 - 2)}$ of $p + 2q = \sqrt{(3p^2 - 2)}$.
Deze laatste vergelijking in het vierkant brengende, levert:
$p^2 + 4pq + 4q^2 = 3p^2 - 2$, waaruit gevonden wordt

$$p = q + \sqrt{(3q^2 + 1)}.$$

Stelt men hierin $q = 0$, dan is $p = 1$ en $x = 1$, zoodat men heeft:

$$3x^2 + 1 = 4.$$

Aanmerking. Deze leerwijze is van Pell en wordt door Euler medegedeeld. (Euler, *Alg.* II, 118). Ofschoon elke waarde van n eene andere herleiding vereischt, komen de herleidingen toch in zoo verre overeen, dat men uit de beide uitgewerkte voorbeelden met niet zeer veel moeite zal kunnen bepalen, wanneer $5x^2 + 1$, $6x^2 + 1$ enz. volkomen vierkanten zijn. Wij laten het onderzoek hiernaar aan den Lezer en verwijzen hem voor eene breedvoerige behandeling naar het aangehaalde werk. Overigens willen wij voor hen, die dit werk niet in hun bezit hebben, nog een voorbeeld uitwerken.

3. Vraagstuk. *Men vraagt voor x zoodanige waarde te bepalen, dat $13x^2+1$ een geheel volkomen vierkant worde.*

Dewijl $4x > \sqrt{(13x^2+1)} > 3x$, stellen wij $13x^2+1 = (3x+p)^2 = 9x^2+6px+p^2$, waaruit $x = \frac{3p+\sqrt{(13p^2-4)}}{4}$, dus $x > \frac{6}{11}p$. Stellen wij nu $x = p+q$, dan is $p+4q = \sqrt{(13p^2-4)}$, waaruit na behoorlijke herleiding gevonden wordt: $p = \frac{q+\sqrt{(13q^2+3)}}{3}$, dus $p > q$. Stellen wij $p = q+r$, dan is $2q+3r = \sqrt{(13q^2+3)}$, waaruit na behoorlijke herleiding gevonden wordt: $q = \frac{2r+\sqrt{(13r^2-3)}}{3}$, dus $q > r$. Stellen wij $q = r+s$, dan is $r = \frac{s+\sqrt{(13s^2+4)}}{4}$, dus $r > s$. Stellen wij $r = s+t$, dan is $r = 3t+\sqrt{(13t^2-1)}$, dus $s > 6t$. Stellen wij $s = 6t+u$, dan is $t = \frac{3u+\sqrt{(13u^2+4)}}{4}$, dus $t > u$. Zij dus $t = u+v$, dan is $u = \frac{v+\sqrt{(13v^2-3)}}{3}$, dus $u > v$. Zij nu $u = v+w$, dan is $v = \frac{2w+\sqrt{(13w^2+3)}}{3}$, dus $v > w$. Stellen wij $v = w+y$, dan is $w = \frac{y+\sqrt{(13y^2-4)}}{4}$, dus $w > y$. Zij dus $w = y+z$, dan is $y = 3z+\sqrt{(13z^2+1)}$. Deze vorm gelijkvormig zijnde met den eersten, nemen wij $z = 0$ en vinden dan door terugwerking:

z	y	w	v	u	t	s	r	q	p	x
0	1	1	2	3	5	33	38	71	109	180

zoodat 180 na 0 het kleinste getal is, dat men voor x kan substitueeren, opdat $13x^2+1$ een volkomen vierkant zij.

Inderdaad vinden wij $13x^2+1 = 421201 = (649)^2$.

Aanmerking. Men ziet uit deze bewerking, tot welke lastige herleidingen dit vraagstuk aanleiding kan geven. „Lorsqu'il s'agit de nombres plus grands, on est souvent obligé de passer par dix fois plus d'opérations que nous n'en avons eu à faire pour le nombre 13." Men kan hierover misschien eenigszins oordeelen door op te merken, dat voor $n = 61$

voor x gevonden zal worden 226153980, zijnde na $x=0$ het kleinste getal, dat in dit geval $61x^2+1$ een geheel vierkant maakt. EULER II, pag. 134.

4. Vraagstuk. *In welke gevallen kan* $a+bx+cx^2$ *tot geen volkomen vierkant herleid worden?*

Om het overzicht van dezen vorm te vergemakkelijken, verdrijven wij den tweeden term en stellen daartoe $x=\frac{y-b}{2c}$, waardoor hij overgaat in $\frac{4ac-b^2+y^2}{4c}$. Dewijl deze uitdrukking een volkomen vierkant moet worden, stellen wij haar gelijk aan $\frac{z^2}{4}$ en vinden dan $y^2=cz^2+b^2-4ac$. Is nu de laatste vorm een volkomen vierkant, dan zal de opgegeven vorm zulks ook zijn en omgekeerd. Stellen wij verder $b^2-4ac=p$, dan zal men slechts behoeven te beoordeelen, in welke gevallen cz^2+p geen vierkant zal kunnen opleveren.

Is $p=0$, dan zal cz^2 geen volkomen vierkant kunnen zijn, tenzij c zulks ook zij. Is p niet gelijk aan 0, dan zal men door de deelers van een getal kunnen bepalen of cz^2+p een volkomen vierkant kan worden of niet.

Nemen wij bij voorbeeld den deeler 5, dan worden alle getallen voorgesteld door $5n$, $5n+1$, $5n+2$, $5n+3$ of $5n+4$.

Het vierkant van $5n$ is niet alleen deelbaar door 5, maar ook door 25.

Het vierkant van $5n+1$, door 5 gedeeld wordende, laat tot rest 1.

Het vierkant van $5n+2$ door 5 gedeeld wordende, laat tot rest 4.

Het vierkant van $5n+3$ door 5 gedeeld wordende, laat tot rest 4.

Het vierkant van $5n+4$ door 5 gedeeld wordende, laat tot rest 1.

Derhalve zal een getal, dat, door 5 gedeeld wordende, opgaat, en niet door 25 gedeeld kan worden, geen vierkant zijn, terwijl een getal, dat door 5 gedeeld wordende, niet opgaat, maar eene rest 2 of 3 laat, evenmin een vierkant zal zijn.

Er blijft ons nog over aan te toonen, dat de vorm $5x^2+2$, zijnde x^2 gelijk aan n, ook geen vierkant kan opleveren, in geval x een gebroken is. Veronderstellen wij derhalve $x=\frac{y}{z}$, waarin y en z relatief priem zijn, dan moet, opdat $\frac{5y^2}{z^2}+2$ een volkomen vierkant zij, $5y^2+2z^2$ ook een vierkant zijn. Nemen wij nu aan, dat z deelbaar is door 5, dan kan men voor z schrijven $5k$, en men heeft: $5y^2+2z^2=5y^2+50k^2$. Dewijl nu deze vorm wel door 5, maar niet door 25 deelbaar is (y en z onderling ondeelbaar zijnde) kan hij ook nooit een volkomen vierkant zijn. — Soortgelijke redeneeringen kan men op alle deelers toepassen, om daaruit eigenschappen af te leiden, waaraan men de mogelijkheid van een volkomen vierkant te worden of niet, toetsen kan.

5. Vraagstuk. *Welke waarden voor x zullen $a+bx+cx^2$ een volkomen vierkant maken?*

a). Nemen wij aan, dat c een volkomen vierkant is, bijv. $=p^2$, dan stellen wij:

$$p^2x^2+bx+a=\left(px+\frac{m}{n}\right)^2=p^2x^2+2\frac{mpx}{n}+\frac{m^2}{n^2},$$

$$\text{waaruit } x=\frac{m^2-an^2}{bn^2-2pmn}.$$

Deze waarde voor x in den opgegeven vorm overbrengende, vindt men:

$$\sqrt{(p^2x^2+bx+a)}=\pm\left(p\times\frac{m^2-an^2}{bn^2-2pmn}+\frac{m}{n}\right)=$$

$$=\pm\frac{bmn-apn^2-m^2p}{bn^2-2pmn}.$$

b). Nemen wij in de tweede plaats aan, dat a een vierkant is, en stellen wij derhalve $a=p^2$, dan kunnen wij stellen:

$$cx^2+bx+p^2=\left(\frac{mx}{n}+p\right)^2=\frac{m^2}{n^2}x^2+\frac{2m}{n}px+p^2,$$

waaruit na behoorlijke herleiding volgt:

$$x=\frac{n^2b-2pmn}{m^2-cn^2}.$$

Deze waarde voor x in den oorspronkelijken vorm overbrengende, vindt men:

$$\sqrt{(cx^2+bx+p^2)}=\pm\frac{m}{n}\times\left\{\frac{n^2b-2pmn}{m^2-cn^2}+p\right\}=\pm\frac{mnb-pm^2-pcn^2}{m^2-cn^2}$$

Aanmerking. Men zal opgemerkt hebben, dat voor den wortel van den opgegeven vorm altijd zoodanige vorm gesteld is, dat òf de hoogste macht van x verdwijnt, òf de bekende term. Dewijl er in het laatste geval door x gedeeld wordt, zal $x=0$ ook eene waarde zijn, die voldoet; hetgeen ook aanstonds in het oog valt.

c). De vorm cx^2+bx+a, waarin nu noch a, noch c een volkomen vierkant behoeft te zijn, is altijd ontbindbaar in twee factoren, namelijk in $\left\{x+\frac{b-\sqrt{(b^2-4ac)}}{2c}\right\}\left\{x+\frac{b+\sqrt{(b^2-4ac)}}{2c}\right\}$.

Is nu hierin $\sqrt{(b^2-4ac)}$ rationeel, kan dus cx^2+bx+a ontbonden worden in de factoren $(px+q)(rx+s)$, dan kan de opgegeven vorm tot een volkomen vierkant herleid worden.

Wij stellen daartoe:

$$(px+q)(rx+s)=\left(\frac{m}{n}(px+q)\right)^2$$

$$\text{of } rx+s=\frac{m^2}{n^2}(px+q),$$

waaruit $x=\frac{m^2q-n^2s}{n^2r-m^2p}$.

d). Indien de vorm cx^2+bx+a herleidbaar is tot de gedaante $(px+q)^2+(rx+s)(tx+u)$, dan kan hij ook tot een volkomen vierkant herleid worden, want stellen wij

$$cx^2+bx+a=(px+q)^2+(rx+s)(tx+u)=$$
$$=\left\{(px+q)+\frac{m}{n}(rx+s)\right\}^2,$$

dan is:

$$(px+q)^2+(rx+s)(tx+u)=(px+q)^2+\frac{2m}{n}(px+q)(2rx+s)+$$
$$+\frac{m^2}{n^2}(rx+s)^2$$

$$tx+u=\frac{2m}{n}(px+q)+\frac{m^2}{n^2}(rx+s)$$

$$x=\frac{2mnq+m^2s-n^2u}{n^2t-2mnp-m^2r}.$$

6. Wij willen op de bovenstaande herleidingen eenige toepassingen maken en vragen daarom:

a). $9x^2 + 7x + 20$ *tot een volkomen vierkant te herleiden.*

Hier stelt men $9x^2+7x+20=\left(3x+\frac{m}{n}\right)^2=9x^2+\frac{6m}{n}x+\frac{m^2}{n^2}$,

$$x=\frac{m^2-20n^2}{7n^2-6mn}.$$

Stelt men hierin $m=5$, $n=1$, dan vindt men:

$$9x^2+7x+20=\frac{10000}{529}=\left(\frac{100}{23}\right)^2.$$

Stelt men $m=1$ en $n=1$, dan komt er:

$$9x^2+7x+20=3136=(56)^2.$$

b). $2x^2 + 7x + 16$ *tot een volkomen vierkant te maken.*

Hierin is $x=\frac{n^2b-2pmn}{m^2-cn^2}=\frac{7n^2-8mn}{m^2-2n^2}$.

Stellen wij nu hierin $m=n=1$, dan vinden wij $x=1$, dus $2x^2+7x+16=25=5^2$.

Nemen wij daarentegen $n=3$ en $m=1$, dan vinden wij $x=-\frac{39}{17}$; dus $2x^2+7x+16=\frac{3025}{289}=\left(\frac{55}{17}\right)^2$.

c). $6x^2 + x - 12$ *tot een volkomen vierkant te herleiden.*

Dewijl 6 en 12 geen van beiden volkomen vierkanten zijn, beproeven wij of de vorm ontbonden kan worden in twee factoren; wij vinden daarvoor $(2x+3)(3x-4)$, zoodat men heeft:

$$x=\frac{m^2q-n^2s}{n^2r-m^2p}=\frac{3m^2+4n^2}{3n^2-2m^2}.$$

Neemt men hierin $m=1$ en $n=1$, dan vindt men $x=7$ en $(2x+3)(3x-4)=6x^2+x-12=289=(17)^2$.

d). $8x^2 + 33x + 14$ *tot een volkomen vierkant te herleiden.*

Dewijl $8x^2+33x+14=(2x+3)^2+(x+5)(4x+1)$ wordt $p=2$, $q=3$, $r=1$, $s=5$, $t=4$, $u=1$, en dus

$$x=\frac{6mn+5m^2-n^2}{4n^2-4mn-m^2}.$$

Neemt men hierin $m=n=1$, dan is $x=-10$ en

$$8x^2+33x+14=484=(22)^2;$$

neemt men $m=2$ en $n=1$, dan wordt $x=-\frac{24}{8}$ en

$$8x^2+33x+14=\frac{400}{64}=\left(\frac{20}{8}\right)^2.$$

7. Vraagstuk. *Men vraagt vierkanten, wier viervoud, met 4 verminderd, wederom een vierkant oplevert.*

Stellen wij de vierkanten voor door x^2, dan moet $4x^2-4$ een vierkant zijn. Hiervoor kunnende schrijven $(2x-2)(2x+2)$, verandert de formule c). van N°. 5 in:

$$x = \frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}.$$

Neemt men hierin $m=2, n=1$, dan is $x=\frac{5}{3}$ en $x^2=\frac{25}{9}$. Voor $m=3$ en $n=2$ vindt men $x=\frac{13}{5}$ en $x^2=\frac{169}{25}$; enz.

8. Vraagstuk. *Men vraagt vierkanten, wier negenvoud, met 7 vermeerderd, wederom een vierkant oplevert.*

Stellen wij de vierkanten voor door x^2, dan moet $9x^2+7$ wederom een vierkant zijn. Stellen wij derhalve in de formule a). van N°. 5, $a=7$, $b=0$ en $c=9$, dan is:

$$x = -\frac{m^2-7n^2}{6mn}.$$

Nemen wij hierin $m=2$ en $n=1$, dan is $x=\frac{1}{3}$ en $9x^2+7=\frac{121}{16}$. Neemt men $m=n=1$, dan is x ook $=1$ en $9x^2+7=16$.

9. Vraagstuk. *Men vraagt den vorm $a+bx+cx^2+dx^3$ tot een zuiver vierkant te herleiden.*

Het zal wel geene nadere opheldering behoeven, dat zulks in vele gevallen onmogelijk zal zijn. Wij zullen ons daarom hier alleen beperken tot de behandeling van eenige gevallen, waarin zoodanige herleiding mogelijk is. Daartoe veronderstellen wij, dat a een zuiver vierkant is, bijv. $a=p^2$; dewijl nu $a+bx+cx^2+dx^3$ een zuiver vierkant moet zijn, stellen wij dezen vorm $=(p+qx)^2$ en bepalen q zoodanig, dat de beide eerste termen elkaâr vernietigen. Men heeft dus

$$p^2+bx+cx^2+dx^3 = p^2+2pqx+q^2x^2$$

Neemt men nu hierin $q=\frac{b}{2p}$, dan is

$$cx^2+dx^3 = q^2x^2 = \frac{b^2}{4p^2}x^2,$$

waaruit, behalve $x=0$, nog gevonden wordt:

$$x = \frac{b^2-4p^2c}{4p^2d}.$$

Nemen wij bijv. den vorm x^3+x^2+x+1, dan zullen wij vinden, dat hij voor $x=-\frac{1}{4}$ een volkomen vierkant is, t. w. $\frac{3}{64}$.

Aanmerking. Men ziet, dat deze oplossing zich daarin van de voorgaande onderscheidt, dat terwijl daar een oneindig aantal antwoorden, hier behalve $x=0$, slechts één enkel antwoord wordt gevonden.

10. In het vorige geval veronderstelden wij, dat de wortel uit twee termen bestond; laten wij nu aannemen, dat hij uit drie termen bestaat en dat dus

$$a+bx+cx^2+dx^3=(p+qx+rx^2)^2=$$
$$=p^2+2pqx+(q^2+2pr)x^2+2qrx^3+r^2x^4.$$

Zij nu a een volkomen vierkant en dus gelijk p^2, dan moet $b=2pq$ en $c=q^2+2pr$, dus

$$q=\frac{b}{2p} \quad \text{en} \quad r=\frac{c-q^2}{2p}.$$

Voert men deze waarden in, dan vindt men:

$$dx^3=2qrx^3+r^2x^4,$$

waaruit behalve $x=0$, ook nog gevonden wordt: $x=\frac{d-2qr}{r^2}$.

Nemen wij om een voorbeeld ter toepassing te maken den vorm $1+x+x^2+x^3$, dan is $p=b=c=d=1$; $q=\frac{1}{2}$ en $r=\frac{1}{2}$; voor x wordt alsdan gevonden $\frac{10}{9}$, terwijl de vorm $1+x+x^2+x^3=\frac{3136}{729}=(\frac{56}{27})^2$.

11. Door de beide voorgaande methoden hebben wij slechts ééne waarde voor x gevonden. Er bestaat echter een middel, om wanneer men ééne waarde voor x gevonden heeft, daaruit nog verscheidene andere af te leiden. Weet men bijv., dat de vorm $p^2+bx+cx^2+dx^3$ voor $x=q$ een volkomen vierkant wordt, dan kan men stellen $p^2+bq+cq^2+dq^3=r^2$; neemt men nu $x=q+y$, dan wordt de oorspronkelijke vorm

$$\left\{\begin{array}{l} p^2 \\ bq+by \\ cq^2+2cqy+cy^2 \\ dq^3+3dq^2y+3dqy^2+y^3 \end{array}\right.$$

d. i. $r^2+(b+2cq+3dq^2)y+(c+3dq)y^2+y^3$,

uit welken vorm, omdat de bekende term wederom een vierkant is, eene nieuwe waarde voor y, dus ook voor x gevonden

kan worden, met welke men wederom op dezelfde wijze handelt, om eene derde waarde van x te bepalen.

12. Voor bijzondere gevallen bestaat er eene kortere handelwijze.

Is $a + bx + cx^2 + dx^3$ namelijk ontbindbaar in drie factoren, waarvan er twee gelijk zijn, d. i.: is $a+bx+cx^2+dx^3 = (p + qx)^2 (r + sx)$, dan zal, omdat een vierkant door een vierkant gedeeld een vierkant tot quotiënt geeft, $r + sx$ een vierkant moeten zijn.

Stellen wij dus $r + sx = n^2$, dan is $x = \frac{n^2 - r}{s}$.

Heeft men bijv. $12x^3 + 16x^2 + 7x + 1$, dan zal deze vorm, omdat hij gelijk is aan $(2x+1)^2 (3x+1)$ een volkomen vierkant zijn, indien zulks het geval is met $3x+1$; hier is dus $x = \frac{n^2 - 1}{3}$. Neemt men nu $n=2$, dan wordt $(3x + 1) = 4$ en $12x^3 + 16x^2 + 7x + 1 = 36$.

13. Vraagstuk. *Men vraagt naar de waarden van x, die den vorm $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$ een volkomen vierkant maken.*

a) Veronderstellen wij, dat a een volkomen vierkant is $= p^2$. Nemen wij verder $p^2+bx+cx^2+dx^3+ex^4 = (p+qx+rx^2)^2$

$$= p^2 + 2pqx + q^2x^2 + 2prx^2 + 2qrx^3 + r^2x^4;$$

bepalen wij nu q en r zoodanig, dat de tweede en derde termen elkaâr vernietigen, dus

$$q = \frac{b}{2p} \quad r = \frac{c - q^2}{2p}, \text{ dan blijft de vergelijking}$$

$$dx^3 + ex^4 = 2qrx^3 + r^2x^4$$

of na deeling door x^3:

$$x = \frac{2qr - d}{e - r^2}.$$

b) Zij in de tweede plaats e een volkomen vierkant bijv. $= r^2$. Stellen wij nu $a + bx + cx^2 + dx^3 + r^2x^4 = (p + qx + rx^2)^2$

$$= p^2 + 2pqx + q^2x^2 + 2prx^2 + 2qrx^3 + r^2x^4.$$

De vijfde termen vernietigen elkander. Bepalen wij nu p en q zoodanig, dat ook de vierde en derde verdwijnen; daartoe heeft men

$q = \frac{d}{2r}$ en $p = \frac{c - q^2}{2r}$, waarna men de vergelijking bekomt:

$$a + bx = p^2 + 2pqx$$

$$x = \frac{p^2 - a}{b - 2pq}.$$

c) Zijn a en e beide volkomen vierkanten, dan kan men beide de opgegeven methodes toepassen.

Voor het overige handele men, om verschillende waarden voor x te vinden, indien er ééne bekend is, op dezelfde wijze als wij zulks in N°. 11 hebben aangewezen.

Aanmerking. De oplossing in dit N°. voorkomende, is van FERMAT en wordt medegedeeld door LEGENDRE in zijne *Essai sur la Théorie des nombres* 1803. EULER volgt geheel de oplossing van FERMAT, doch geeft nog eenige belangrijke opmerkingen, welke in het volgend N°. zullen medegedeeld worden.

14. De eerste methode leidt tot geene uitkomst, wanneer de tweede en derde termen ontbreken, d. i., indien men heeft $b = c = 0$, dewijl dan $dx^3 + ex^4 = 0$ wordt.

Ontbreken de tweede en derde termen, dan vindt men $x = 0$, hetgeen eveneens gevonden wordt, wanneer $b = c = d = 0$, d. i. wanneer de tweede, derde en vierde termen ontbreken.

Voor het geval, dat $b = d = 0$ is, kan ook de tweede methode niet toegepast worden, en men moet in zoodanige gevallen trachten eene waarde voor x (behalve 0) te vinden, om daaruit de andere waarden van x op te sporen. — Deze bewerkingen zijn intusschen zoo langwijlig, dat wij daarvan geene nadere voorbeelden zullen bijbrengen.

Nog zij hier opgemerkt, dat indien de vorm $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$ ontbonden kan worden in de factoren $(p + qx)^2 (r + sx + tx^2)$, men alleen waarden voor x behoeft te bepalen, die $r + sx + tx^2$ een vierkant maken, waardoor de bewerking zeer vereenvoudigd wordt.

15. Vraagstuk. *Men vraagt den vorm* $\sqrt{(a + bx + cx^2 + dx^3)}$ *rationeel te maken.*

Vooraf zij opgemerkt, dat indien a of d geene derde machten zijn, men geen rechtstreeksch antwoord op deze vraag kan vinden.

Stellen wij daarom $p^3 + bx + cx^2 + dx^3 = (p + qx)^3 = p^3 + 3p^2qx + 3pq^2x^2 + q^3x^3$ en nemen wij $b = 3p^2q$, d. i. $q = \frac{b}{3p^2}$, dan vindt men:

$$cx^2 + dx^3 = 3pq^2x^2 + q^3x^3$$

$$x = \frac{3pq^2 - c}{d - q^3}.$$

Hadden de twee laatste termen ontbroken, dan hadde men slechts behoeven te stellen $a + bx = p^3$

waaruit $$x = \frac{p^3 - a}{b}.$$

Had de laatste term ontbroken, dan had men kunnen nemen $p^3 + bx + cx^2 = p^3$, waaruit $x = -\frac{b}{c}$. Hieruit zou men echter geene nieuwe waarden voor x hebben kunnen afleiden.

Indien d eene volkomen derdemacht is, bijv. gelijk aan q^3, dan stelt men $(a + bx + cx^2 + q^3x^3) = (p + qx)^3 =$

$$p^3 + 3p^2qx + 3pq^2x^2 + q^3x^3.$$

Bepaalt men hierin nu p zoodanig, dat ook de derde termen elkander vernietigen, dat is: neemt men $p = \frac{c}{3q^2}$, dan vindt men:

$$x = \frac{p^3 - a}{b - 3p^2q}.$$

Indien de eerste term ontbroken had, had men zich kunnen tevreden stellen met $bx + cx^2 + q^3x^3 = q^3x^3$ te nemen; daardoor hadde men intusschen gevonden $x = -\frac{b}{c}$, welke waarde ons geene nieuwe doet vinden.

Zijn de eerste en de laatste termen derdemachten, dan kan men eene der beide methoden toepassen.

Heeft men verder eene waarde $x = p$ gevonden en wil men nog andere vinden, dan substitueert men $x = p + y$ en vindt dan een nieuwen vorm

$$p^3 + (b + 2cp + 3dp^2)y + (c + 3dp)y^2 + dy^3,$$

welke vorm wederom aanleiding zal geven tot eene oplossing volgens de eerste methode.

16. Vraagstuk. *Men vraagt getallen zoodanig, dat zij, vermeerderd met hun vierkant en met de derdemacht van 2, een volkomene derdemacht opleveren.*

Zij het getal x, dan zal men den vorm $x^2 + x + 8$ tot een volkomen derdemacht moeten herleiden. Stellen wij derhalve

$$8 + x + x^2 = (2 + px)^3 = 8 + 12px + 6p^2x^2 + p^3x^3$$

en nemen wij daarin $p = \frac{1}{12}$, dan is

$$x^2 = \tfrac{1}{24}x^2 + \tfrac{1}{1728}x^3$$

of $$x = 1656$$

en $$8 + x + x^2 = 2744000 = (140)^3.$$

Om nu eene tweede waarde van x te vinden, stellen wij $x = 1656 + y$, daardoor gaat de opgegeven vorm over in

$$2744000 + 3313y + y^2 = (140 + py)^3, \text{ enz.}$$

Aldus voortgaande, zal men zoo vele waarden voor x kunnen vinden als men verkiest.

---

§ 19. Oplossing van eenige onbepaalde vraagstukken, getrokken uit de werken van Diophantus, van Mohammed Ben Alhaçan Alkarkhî e. a.

1. In de vorige § hebben wij eenige regels verzameld, die ofschoon niet algemeen toe te passen, met weinig verandering in de meeste gevallen de gelegenheid aanbieden, om onbepaalde vraagstukken, waarin van volkomen vierkanten sprake is, op te lossen. De oudste schrijver, van wien zoodanige vraagstukken tot ons gekomen zijn, is DIOPHANTUS van Alexandrië, die waarschijnlijk leefde in de derde eeuw na CHRISTUS. Hij heeft een werk geschreven, ingedeeld in XIII boeken, waarvan er VI tot ons gekomen zijn. Commentaren op DIOPHANTUS zijn geleverd door HYPATHIA († 400) dochter van THEON den Wiskundigen, en door BACHET DE MÉZIRIAC. 1e druk 1621, 2e 1670. (SAUNDERSON's *Él. d'Alg.* Trad. par. DE JONCOURT).

Van het werk van DIOPHANTUS bestond al vroeg eene Arabische vertaling, die geleverd werd door ABOÛL WAFÂ. Het is door deze vertaling, dat DIOPHANTUS in Europa bekend geworden is: want FIBONACCI (LEONARDO DE PISA of LEONARDO BONACCI) † 1200, doorreisde met zijnen vader geheel Barbarije, stelde te huis gekomen zijn *Liber Abaci* te zamen en heeft daarin een zeer groot aantal vraagstukken opgenomen, die woordelijk voorkomen in *Alfakhrî*, het werk van ALKARKHÎ, dat omstreeks 1000 n. C. geschreven is en opgedragen werd aan ABOÛ GHÂLIB MOHAMMED IBN KHALAF, bijgenaamd FAKHR ALMOULQ, Vizier van den vorst BOUÏDE BEHÂ ALDAOULAH. Dit werk bevat, behalve de vertaling van een geheel boek van DIOPHANTUS en van gedeelten van twee andere boeken, een zestigtal onbepaalde vraagstukken, waaronder er zijn, die tot den negenden graad opklimmen. — De leer der onbepaalde vraagstukken draagt bij hem den naam van *Istikrâ*.

Aanmerkingen. 1. De editie van DIOPHANTUS van 1670 is de beste; zij is verrijkt met aanteekeningen van FERMAT. (SAUNDERSON, *Alg.*; KLÜGEL W.I.)

Men vindt eene vertaling van DIOPHANTUS in: *Les Œuvres Mathematiques de* SIMON STEVIN *de Bruges etc.* — *Le tout revue, corrigé et augmenté par* ALBERT GIRARD. *Leyde.* ELSEVIER, CIↃ. IↃ. C. XXXIV.

De eerste vier boeken zijn vertaald door STEVIN, de beide laatste door GIRARD. — Deze uitgave is bezorgd door „la vefve et les enfants orphelins de feu ALBERT GIRARD." — Eene andere bewerking van het eerste boek van DIOPHANTUS is van FRANS HUIPS, uitgegeven in 1654.

2. Van *Alfakhrí* zijn uittreksels uitgegeven door F. WOEPCKE. Het oorspronkelijke handschrift berust op de Keizerlijke bibliotheek te Parijs en is derwaarts gebracht na de Expeditie naar Ægypte 1799. (Vergelijk verder KLÜGEL, W. i. v. *Algebra;* WOEPCKE, *Extract du Fakhrí*; KLIJNSMA, *Levensberigten van vermaarde Wis-, Natuur- en Sterrekundigen*, i. v. LEONARDO DE PISA; e. a.)

3. Sommige schrijvers noemen den Griekschen wiskundige DIOPHANTES, omdat bij SUIDAS *εἰς Διοφάντην* staat;

in twee handschriften van de Keizerlijke bibliotheek te Parijs vindt men echter *εἰς Διόφαντον* en SUIDAS heeft zelf een artikel *Διόφαντος ὄνομα κύριον*. BACHET acht het woord Diophantes niet eens Grieksch te zijn. (KÄSTNER. *Gesch. der Math.* III, pag. 152.)

4. De onbepaalde vraagstukken worden slechts in zeer weinig leerboeken met de vereischte uitvoerigheid behandeld, ofschoon zij m. i. veel meer geschikt zijn om het oordeel te ontwikkelen en te scherpen, dan andere vraagstukken. „Chaque problème particulier nous fournit l'exemple d'une nouvelle manière de penser, et par cela même tous ensemble contribuent à augmenter prodigieusement nos connaissances analytiques." (SAUNDERSON. Trad. de JONCOURT.) „Daher haben wir bei den Alten keine technische Analysis oder Algebra zu suchen; ihre Analysis war eine geistige. Das feine Verfahren des DIOPHANTUS bei der Bestimmung der zu suchenden Grösse, giebt dieser Sammlung von Aufgaben ihren vorzüglichen Werth." (KLÜGEL, W. I, pag. 31.) „Nous donnerons ici un ou deux exemples de cette branche d'analyse, qui exige une grande sagacité dans le choix des moyens de solution." (LEGENDRE *Th. des N. p.* 432.)

5. De vraagstukken, in deze § voorkomende en aan de in het opschrift gemelde schrijvers ontleend, zijn intusschen niet altijd opgelost geworden, gelijk door hen is aangewezen. Somtijds heb ik de voorkeur gegeven aan eene oplossing in den geest van EULER.

2. Vraagstuk. *Men vraagt een gegeven vierkant in twee deelen te deelen zoodanig, dat elk deel een vierkant is.*

(DIOPH. II, 8. *Alfakhrí*, Fol. 72. v°. WOEPCKE, pag. 100.)

Zij het gegeven getal a^2, het eene deel x^2, het andere $a^2 - x^2$, dan moet dit laatste een vierkant zijn. Wij stellen derhalve

$$a^2 - x^2 = \left(a + \frac{m}{n}x\right)^2 = a^2 + \frac{2am}{n}x + \frac{m^2}{n^2}x^2,$$

$$\text{waaruit } x = -\frac{2amn}{n^2+m^2}.$$

Nemen wij $m = 2$, $n = 1$ en $a^2 = 49$, dan is $x = -\frac{14}{5}$. 49 kan dus verdeeld worden in $\frac{7^2 \cdot 4}{5^2}$ en $\frac{4^2 \cdot 1}{5^2}$.

Neemt men $n = m = 1$, dan vindt men 49 en 0, die niet in den eigenlijken zin aan het vraagstuk voldoen. Voor alle willekeurige waarden van m en n zal men overigens overeenkomstige waarden voor x^2 en $a^2 - x^2$ vinden.

3. Vraagstuk. *Een getal, dat uit de som van twee vierkanten bestaat, te verdeelen in de som van twee andere vierkanten.*

(Dioph. II, 10. *Alfakhrí*, Fol. 73. v°. W. p. 100.)

Laat het gegeven getal gelijk zijn aan $a^2 + b^2$, dan kan men de nieuwe vierkanten voorstellen door $(rx - a)^2$ en $(sx - b)^2$, waardoor na ontwikkeling de bekende termen verdwijnen en men door x deelen kan.

Men heeft namelijk:

$$a^2 + b^2 = (rx - a)^2 + (sx - b)^2 = r^2x^2 - 2rxa + s^2x^2 - 2sxb + a^2 + b^2$$

$$\text{of } x = \frac{2ra + 2sb}{r^2 + s^2}.$$

Zij hierin $a = 5$, $b = 6$, $r = 2$ en $s = 3$, dan vindt men:

$$61 = (25 + 36) = (\tfrac{1}{1}\tfrac{7}{3})^2 + (\tfrac{2}{1}\tfrac{0}{3})^2.$$

Stelt men $a = 1$, $b = 2$, $r = 3$ en $s = 4$, dan vindt men:

$$5 = (1 + 4) = (\tfrac{4}{2}\tfrac{1}{5})^2 + (\tfrac{3}{2}\tfrac{8}{5})^2.$$

4. Vraagstuk. *Men vraagt het verschil van twee vierkanten uit te drukken in het verschil van twee andere vierkanten?*

(Dioph. II, 11. *Alfakhrí*, Fol. 73. r°. W. 100.)

Zij $a^2 - b^2$ het verschil van twee vierkanten en stellen wij het eene vierkant $(rx + a)^2$, het andere $(sx - b)^2$, dan is

$$a^2 - b^2 = (rx + a)^2 - (sx - b)^2,$$

$$\text{of } x = \frac{2ra + 2sb}{s^2 - r^2}.$$

Nemen wij hierin $a^2 = 16$ en $b^2 = 9$, $r = 4$ en $s = 5$, dan is

$$7 = 16 - 9 = (\tfrac{2}{9}\tfrac{8}{4})^2 - (\tfrac{2}{9}\tfrac{8}{3})^2.$$

5. Vraagstuk. *Men vraagt twee volkomen vierkanten te vinden, wier verschil een willekeurig gegeven getal is.*

(Dioph. II, 11. *Alfakhrí*, Fol. 73. r°. W. 100.)

Stellen wij de gezochte vierkanten, x^2 en y^2 en hun verschil $= a$, dan is $x^2 - y^2 = a$ of $x^2 = y^2 + a$, zoodat $y^2 + a$ een volkomen vierkant moet zijn. Wij stellen derhalve:

$$y^2 + a = \left(y + \frac{m}{n}\right)^2 = y^2 + \frac{2m}{n}y + \frac{m^2}{n^2},$$

$$\text{waaruit } y = \frac{an^2 - m^2}{2mn}.$$

Stelt men hierin $a = 11$, $n = m = 1$, dan vindt men

$$y^2 = 25 \text{ en } x^2 = 36.$$

6. Vraagstuk. *Men vraagt een getal te vinden, dat bij twee willekeurige getallen opgeteld, van elk dier getallen een vierkant maakt.*

(Dioph. II. 12. *Alfakhrí*, Fol. 78. r°. W. 101.)

Laat gegeven zijn de getallen a en b, terwijl x het gezochte is, dan heeft men $x + a = y^2$ en $x + b = z^2$; waaruit door aftrekking

$$z^2 + (a - b) = y^2.$$

Stelt men nu in de waarde, die wij in N°. 5 voor y vonden, $a = a - b$ en vervangt men y door z, dan is

$$z = \frac{(a-b)\ n^2 - m^2}{2mn}.$$

Neemt men hierin $a = 38$, $b = 14$, $m = n = 1$, dan vindt men $x = \frac{1369}{4}$.

Zij $a = 8$, $b = 3$, $m = n = 1$, dan is ook $x = 1$.

7. Vraagstuk. *Indien de som van twee getallen gegeven is, vraagt men een vierkant zoodanig te bepalen, dat het, met elk dezer getallen in het bijzonder vermeerderd, sommen oplevert, die wederom vierkanten zijn.*

(Dioph. II, 15. *Alfakhrí*, Fol. 74. v°. W. 102.)

Laten de twee getallen voorgesteld worden door x en y, hunne som door a, het gevraagde vierkant door z^2, dan kunnen wij stellen:

$$x + y = a,\ x + z^2 = \left(\frac{m}{n} + z\right)^2,\ y + z^2 = \left(\frac{p}{q} + z\right)^2;$$

waaruit men vindt:

$$x = \frac{2zmn + m^2}{n^2} \text{ en } y = \frac{2zpq + p^2}{q^2};$$

derhalve:

$$\frac{2zmn + m^2}{n^2} + \frac{2zpq + p^2}{q^2} = a;$$

of na herleiding:

$$z = \frac{an^2q^2 - m^2q^2 - p^2n^2}{2mnq^2 + 2pqn^2}.$$

Stellen wij hierin bijv.: $a = 20, p = 1, q = 2, m = 3, n = 4$, dan vindt men:

$$z = \tfrac{207}{40}, \quad x = \tfrac{483}{40}, \quad y = \tfrac{217}{40}.$$

$x + z^2 = \frac{114649}{1600} = (\frac{337}{40})^2$ en $y + z^2 = \frac{106929}{1600} = (\frac{327}{40})^2$.

8. Vraagstuk. *Een te vinden getal zoodanig in twee deelen te verdeelen, dat het vierkant van het eene deel, vermeerderd met een gegeven aantal malen het andere deel, wederom een vierkant oplevert.*

(Dioph. II, 20. *Alfakhrí*, Fol. 82. v°. W. 116.)

Zij het te vinden getal x, het eene deel y en het andere $x-y$, dan is, indien men het vierkant van het eene deel met a maal het andere deel moet vermeerderen

$$y^2 + a(x-y) = t^2 \text{ en } (x-y)^2 + ay = u^2.$$

Stellen wij nu verder $t^2 = (y+pa)^2$ en $u^2 = (x + \frac{m}{n}y)^2$, dan vindt men door ontwikkeling en herleiding van de eerste vergelijking:

$$y^2 + ax - ay = y^2 + 2pay + p^2a^2;$$

bepalen wij hierin p zoodanig, dat de termen $-ay$ en $2pay$ verdwijnen, dat is: nemen wij $p = -\frac{1}{2}$, dan vinden wij eindelijk $x = \frac{1}{4}a$.

De tweede vergelijking ontwikkelende en daarin $x = \frac{1}{4}a$ substitueerende, komt er:

$$y^2 + \tfrac{1}{2}ay = \frac{ma}{2n}y + \frac{m^2}{n^2}y^2,$$

$$\text{of } y = -\frac{na}{2(m+n)}, \text{ en } y = 0.$$

Nemen wij ter toepassing $a = 4$, $m = 6$ en $n = 2$, dan is:

$$x = 1 \text{ en } y = -\tfrac{1}{2}$$

en verder: $y^2 + a(x-y) = \frac{25}{4}$ en $(x-y)^2 + ay = \frac{1}{4}$, enz.

9. Vraagstuk. *Twee getallen zoodanig te bepalen, dat het product hunner vierkanten, vermeerderd met het vierkant van een dier getallen, een vierkant oplevert.*

(Dioph. II, 28. *Alfakhrí*, Fol. 78. r°. W. 105.)

Stellen wij de getallen voor door x en y, dan moeten $x^2y^2+y^2$ en $x^2y^2+x^2$ vierkanten zijn. Zulks moet dus ook het geval zijn met x^2+1 en y^2+1, omdat een vierkant door een vierkant gedeeld wordende, het quotiënt ook een vierkant is. Stellen wij dus

$$x^2+1=\left(x+\frac{p}{q}\right)^2 \quad \text{en} \quad y^2+1=\left(y+\frac{m}{n}\right)^2,$$

dan vinden wij door eene korte herleiding:

$$x=\frac{q^2-p^2}{2pq}, \qquad y=\frac{n^2-m^2}{2mn}.$$

Nemen wij hierin ter toepassing $q=2$, $p=1$, $n=5$, $m=1$, dan is $x=\frac{3}{4}$ en $y=\frac{12}{5}$ en

$$x^2y^2+x^2=\tfrac{9}{25}+\tfrac{9}{16}=\tfrac{144+225}{400}=\left(\tfrac{21}{20}\right)^2$$
$$x^2y^2+y^2=\tfrac{9}{25}+\tfrac{144}{25}=9=3^2.$$

10. Vraagstuk. *Men vraagt drie vierkanten te vinden zoodanig, dat het eerste vierkant, vermeerderd met den wortel uit het tweede, het tweede vierkant, vermeerderd met den wortel uit het derde, het derde vierkant, vermeerderd met den wortel uit het eerste, drie andere vierkanten opleveren.*

(Dioph. II, 33. *Alfakhrí*, Fol. 80. v°. W. 107.)

Stelt men de vierkanten voor door x^2, y^2 en z^2, dan heeft men aanstonds de vergelijkingen:

$$x^2+y=t^2, \qquad y^2+z=u^2, \qquad z^2+x=v^2,$$

waarvoor men ook schrijven kan:

$$x^2+y=(x+\frac{m}{n}y)^2,\ y^2+z=(y+\frac{p}{q}z)^2,\ z^2+x=(z+\frac{r}{s}x)^2;$$

waaruit gemakkelijk gevonden wordt:

$$y=\frac{n^2-2mnx}{m^2}, \qquad z=\frac{q^2-2pqy}{p^2}, \qquad x=\frac{s^2-2rsz}{r^2}.$$

Door verbinding van de eerste en derde vergelijking vindt men nu:

$$y=\frac{n^2r^2-2mn\,s^2+4mn\,rsz}{m^2r^2},$$

en hierin de gevonden waarde van z substitueerende, komt er:

$$y=\frac{n^2r^2p^2-2mn\,s^2p^2+4mn\,rs\,q^2}{m^2r^2p^2+8mn\,rspq}.$$

Neemt men in deze formule $m=n=p=q=r=s=1$, dan vindt men x, y en $z=\frac{1}{3}$; werkelijk is $(\frac{1}{3})^2+\frac{1}{3}=\frac{4}{9}=(\frac{2}{3})^2$

Neemt men $m=1$, $n=2$, $p=1$, $q=4$, $r=1$, $s=3$, dan is:

$x=\frac{105}{19^3}$, $y=\frac{355}{19^3}$, $z=\frac{717}{19^3}$; waaruit gevonden wordt:

$x^2+y=(\frac{381}{19^3})^2$, $y^2+z=(\frac{1210}{19^3})^2$, $z^2+x=(\frac{3007}{19^3})^2$.

11. Vraagstuk. *Men vraagt drie getallen zoodanig te bepalen, dat de som dier getallen, respectievelijk vermeerderd zijnde met de vierkanten van het eerste, van het tweede en van het derde getal, wederom vierkanten oplevert.*

(Diophy. II, 35. *Alfakhrí*, Fol. 80. v°. W. 108.)

Wanneer wij deze getallen voorstellen door x, y, z, dan zal er voldaan moeten worden aan de vergelijkingen

$x+y+z+x^2=t^2$, $x+y+z+y^2=u^2$, $x+y+z+z^2=v^2$.

Omdat in het algemeen, indien $a=pq$, $a+\left(\frac{p-q}{2}\right)^2$ een volkomen vierkant is, nemen wij $x+y+z=p^2q\varphi^2$, waarin φ eene nieuwe onbekende is en p^2q een getal voorstelt, dat op drie verschillende wijzen in twee factoren ontbindbaar is, namelijk p^2 en q, p en pq, 1 en p^2q. Laat nu verder gesteld worden:

$$x=\frac{p^2-q}{2}\varphi, \quad y=\frac{pq-p}{2}\varphi \quad \text{en} \quad z=\frac{p^2q-1}{2}\varphi,$$

dan zullen daardoor de opgegeven vormen volkomen vierkanten worden.

Hieruit volgt nu onmiddellijk:

$$x+y+z=\frac{p^2+pq+p^2q-(q+p+1)}{2}\varphi=p^2q\varphi^2$$

of $$\varphi=\frac{p^2+pq+p^2q-(q+p+1)}{2p^2q} \text{ en } \varphi=0.$$

Stelt men in dezen vorm $p=2$ en $q=3$, dan vindt men

$$\varphi=\tfrac{2}{3},\ x=\tfrac{1}{3},\ y=\tfrac{4}{3} \text{ en } z=\tfrac{11}{3},$$

voor welke waarden de opgegeven vergelijkingen overgaan in vierkanten.

12. Vraagstuk. *Men vraagt naar drie getallen zoodanig, dat indien men bij het vierkant van hunne som elk getal in 't bijzonder optelt, de drie komende sommen ook vierkanten zijn.*

(Dioph. III, 2. *Alfakhrí*, Fol. 90. v°. W. 117.)

Stellen wij de getallen voor door x, y en z, dan heeft men de vergelijkingen:

$(x+y+z)^2+x=t^2$, $(x+y+z)^2+y=u^2$, $(x+y+z)^2+z=v^2$.

Nemen wij hierin $t=(x+y+z)-p$, $u=(x+y+z)-q$

en $v=(x+y+z)-r$,

dan vindt men: $2p(x+y+z)+x=p^2$ . . . . . (α)

$2q(x+y+z)+y=q^2$ . . . . . (β)

$2r(x+y+z)+z=r^2$ . . . . . (γ)

of door optelling: $(x+y+z)\,(2p+2q+2r+1)=p^2+q^2+r^2$,

d. i.: $$x+y+z=\frac{p^2+q^2+r^2}{2p+2q+2r+1}.$$

Door substitutie dezer waarde in (α), (β) en (γ) zal men de verlangde waarden vinden voor x, y en z.

Nemen wij bijv. $p=1$, $q=2$ en $r=3$, dan is:

$(x+y+z)^2+x=\frac{1}{169}$, $(x+y+z)^2+y=\frac{144}{169}$,

$(x+y+z)^2+z=\frac{6\,25}{169}$.

Aanmerking. Indien men van het vierkant van de som elk getal in 't bijzonder af moet trekken, vindt men:

$$x+y+z=\frac{p^2+q^2+r^2}{2(p+q+r)-1}$$

$x=p^2-2p(x+y+z)$, $y=q^2-2q(x+y+z)$,

$z=r^2-2r(x+y+z)$.

(Dioph. III, 2. *Alfakhrî*, Fol. 90. v°. W. 117.)

13. Vraagstuk. *Drie getallen te vinden zoodanig, dat zoowel de som van alle drie, als van de getallen twee aan twee genomen, een volkomen vierkant oplevert.*

(Dioph. III, 7. *Alfakhrî*, Fol. 91. v°. W. 118.)

Stellen wij de onbekende getallen voor door x, y, z, dan heeft men volgens de voorwaarden van het vraagstuk:

$x+y+z=t^2$, $x+y=u^2$, $y+z=v^2$, $x+z=w^2$.

Nemen wij nu nog eene vierde onbekende φ, dan kan men stellen:

$x+y+z=(\varphi+p)^2$, $x+y=\varphi^2$, $y+z=(\varphi+q)^2$, $x+z=w^2$.

Uit de eerste en tweede vergelijking volgt door aftrekking: $z=2p\varphi+p^2$, en uit de eerste en derde: $x=2\varphi p-2\varphi q+p^2-q^2$.

Telt men de beide laatste vergelijkingen op, dan is:

$$z + x = 4\varphi p - 2\varphi q + 2p^2 - q^2.$$

Maar omdat $z + x$ een vierkant moet zijn, stellen wij:

$$(4p - 2q)\varphi + 2p^2 - q^2 = n^2,$$

$$\text{dus } \varphi = \frac{n^2 + q^2 - 2p^2}{4p - 2q}.$$

Neemt men hierin $n = 5$, $q = 2$, $p = 3$, dan is:

$$x + y + z = \tfrac{12}{64}\tfrac{25}{4} = (\tfrac{35}{8})^2, \quad x + y = \tfrac{13}{64}\tfrac{1}{4} = (\tfrac{11}{8})^2,$$

$$y + z = \tfrac{73}{64}\tfrac{9}{4} = (\tfrac{27}{8})^2, \quad x + z = \tfrac{16}{64}\tfrac{0}{4}\tfrac{0}{0} = (5)^2.$$

14. Vraagstuk. *Drie getallen te vinden zoodanig, dat het product van elke twee dier getallen, vermeerderd met een standvastig getal, een vierkant oplevert.*

(Dioph. III, 12. *Alfakhrî*, Fol. 93. v°. W. 119.)

Stellen wij de gezochte getallen voor door x, y en z, dan moet er voldaan worden aan de vergelijkingen:

$$xy + a = t^2, \quad yz + a = u^2, \quad xz + a = v^2.$$

Stellen wij verder, om deze vergelijkingen op te lossen:

$$x = p^2\varphi, \quad y = \frac{q^2}{\varphi} \text{ en } \quad z = \frac{\varphi}{p^2},$$

waardoor de producten xy, yz en xz in volkomen vierkanten veranderen, dan kan men verder aannemen:

$$xy + a = p^2q^2 + a = (pq + k)^2, \text{ waaruit } pq = \frac{a - k^2}{2k}$$

$$yz + a = \frac{q^2}{p^2} + a = \left(\frac{q}{p} + l\right)^2, \text{ waaruit } \frac{q}{p} = \frac{a - l^2}{2l}$$

$$xz + a = \varphi^2 + a = \left(\varphi + \frac{r}{s}\right)^2, \text{ waaruit } \varphi = \frac{s^2a - r^2}{2rs}.$$

Neemt men nu hierin $a = 6$, $k = 1$, $l = 2$, $s = 5$ en $r = 4$, dan vindt men $x = \frac{67}{4}$, $y = \frac{25}{67}$, $z = \frac{67}{100}$, voor welke waarden de gestelde vergelijkingen behoorlijk vierkanten worden. Hetzelfde heeft natuurlijk plaats voor andere waarden.

Aanmerking. Saunderson geeft in zijne Algebra, II, p. 28, van dit vraagstuk eene zeer fraaie oplossing in geheele getal-

len. Het is misschien niet onnuttig deze oplossing hier terug te vinden, opdat men eenigszins kunne beoordeelen, welke scherpzinnige redeneeringen soms noodig zijn, om zoodanige vraagstukken alleen in geheele getallen op te lossen.

Zijn dan de drie gezochte getallen a, b, c, en e het gegeven getal, dat bij hunne producten gevoegd moet worden, om een vierkant te krijgen, dan moeten $ab + e$, $ac + e$ en $bc + e$ volkomen vierkanten zijn. Wij beginnen met twee getallen a en b te zoeken, die aan de eerste voorwaarden voldoen en stellen daartoe $ab + e = n^2$, waarin wij n zoodanige waarde geven, dat $n^2 > e$. Verder is nu $ab = n^2 - e$, waaruit volgt, dat indien men $n^2 - e$ in twee factoren kan ontbinden, de eene factor a, de andere b kan zijn. Nemen wij nu twee andere getallen r en s zoodanig, dat $r^2 > s^2 > e$ en stellen wij $n + r = a$ en $n - s = b$,

dan is $(n+r)(n-s) = n^2 - e$, $n = \frac{rs-e}{r-s}$, dus

$$a = n + r = \frac{r^2 - e}{r-s}$$

$$b = n - s = \frac{s^2 - e}{r-s}.$$

Door deze veronderstelling is $ab + e$ een volkomen vierkant geworden; er blijft ons derhalve nog over te voldoen aan de beide andere vergelijkingen. Verminderen wij derhalve $ab + e$ eens met $ac + e$ en eens met $bc + e$, dan vinden wij $a(b-c)$ voor de eene en $b(a-c)$ voor de andere rest.

Voor de halve som van de factoren der 1e rest vindt men $\frac{a+b-c}{2}$;

voor het halve verschil " " " " " " " $\frac{a-b+c}{2}$.

Voor de halve som van de " " 2e " " " $\frac{a+b-c}{2}$;

voor het halve verschil " " " " " " " $\frac{a-b-c}{2}$.

Wanneer men nu aan c eene rationeele waarde geeft en het vierkant van de halve som der factoren $\frac{a+b-c}{2}$ gelijk

kan maken aan $ab + e$, dan zal $ac + e$ gelijk zijn aan het vierkant van het halve verschil $\frac{a-b+c}{2}$, en $bc + e$ gelijk aan het vierkant van het halve verschil $\frac{a-b-c}{2}$.

Stellen wij nu:

$$\left(\frac{a+b-c}{2}\right)^2 = ab + e = n^2,$$

dan is $a + b - c = \pm 2n$ en $c = a + b \mp 2n$,

zoodat wij in dit geval twee waarden vinden voor c. Substitueeren wij nu de waarden van a en b, die wij hooger gevonden hebben, in de waarde van c, dan komt er:

$$c = r - s \quad \text{en} \quad c = \frac{(r+s)^2 - 4e}{r-s}.$$

Neemt men dus $r > s > e$ en bovendien $r - s = 1$, dan zullen alle waarden voor a, b en c geheele getallen zijn. In sommige gevallen zal men zelfs eenigszins van deze voorwaarden af mogen wijken en toch het begeerde antwoord verkrijgen. Zijn bijv. gegeven $r = 3$, $s = 2$ en $e = 3$, dan vindt men:

$ab + 3 = 9$, $ac + 3 = 9$ of $= 81$, $bc + 3 = 4$ of $= 16$.

15. Vraagstuk. *Men vraagt drie getallen zoodanig, dat het product van twee van die getallen, vermeerderd met het derde getal, steeds een vierkant oplevert.*

(Dioph. III, 14. *Alfakhrí*, Fol. 93. v°. W. 120.)

Stelt men de getallen voor door x, y en z, dan moeten $xy + z$, $yz + x$ en $xz + y$ volkomen vierkanten zijn.

Om hiertoe te geraken, stellen wij:

$$(xy + z) = (\varphi + p)^2 \quad \text{en} \quad z = p^2,$$

dan is: $$xy = \varphi(\varphi + 2p).$$

Dewijl hier twee producten aan elkander gelijk zijn, nemen wij verder $x = \varphi$ en $y = \varphi + 2p$;

deze waarden in den tweeden en derden vorm overbrengende, vindt men:

$$yz + x = \varphi p^2 + \varphi + 2p^3 = \psi^2,$$
$$xz + y = \varphi p^2 + \varphi + 2p = \omega^2;$$

dus door aftrekking:

$$\psi^2 - \omega^2 = 2p(p^2 - 1);$$

wij moeten dus twee vierkanten zoeken, wier verschil gelijk is aan $2p(p^2-1)$. Daartoe stelle men:

$$\psi^2 - 2p(p^2 - 1) = \omega^2 = (\psi - q)^2;$$

waaruit na herleiding gevonden wordt:

$$\psi = \frac{q^2 + 2p^3 - 2p}{2q}.$$

Stelt men hierin bijv. $q = 3$ en $p = 2$, dan worden $\psi = \frac{7}{2}$, $\omega^2 = \frac{1}{4}$, $\varphi = \frac{\psi^2 - 2p^3}{p^2+1} = -\frac{3}{4}$,

$xy + z = \frac{25}{16}$, $yz + x = \frac{49}{4}$ en $xz + y = \frac{1}{4}$.

16. Vraagstuk. *Men vraagt drie getallen te bepalen zoodanig, dat het product van twee dezer getallen, vermeerderd met hunne som, telkens een vierkant oplevert.*

(Dioph. III, 17. *Alfakhrí*, Fol. 95. r°. W. 121.)

Noemen wij de gezochte getallen x, y en z, dan zal men, omdat $\{p(p+1)+1\}^2 = p^2(p+1)^2 + p^2 + (p+1)^2$, $x = p^2$, $y = (p+1)^2$ kunnen stellen, daardoor wordt $xy + x + y$ een volkomen vierkant, terwijl $yz + y + z$ en $zx + z + x$ overgaan in:

$$z(p+1)^2 + z + (p+1)^2 = \psi^2,$$
$$zp^2 + z + p^2 = \omega^2;$$

waaruit door aftrekking volgt:

$$(z+1)(2p+1) = (\psi - \omega)(\psi + \omega),$$

waarom wij kunnen stellen:

$$\psi - \omega = z + 1 \quad \text{en} \quad \psi + \omega = 2p + 1;$$

waaruit gevonden wordt:

$$\psi = p + 1 + \frac{z}{2}.$$

Deze waarde voor ψ substitueerende, vinden wij eindelijk:

$$z = 4(p^2 + p + 1).$$

Nemen wij hierin $p = 1$, dan is

$x = 1$, $y = 4$, $z = 12$

$xy + x + y = 9$, $yz + y + z = 64$, $zx + z + x = 25$.

De veronderstelling in dit vraagstuk is oorzaak, dat wij eene oplossing vinden in positieve geheele getallen, zoolang wij p positief, geheel nemen.

17. Vraagstuk. *Twee getallen te vinden zoodanig, dat hun product, vermeerderd met één dier getallen of met beide, een vierkant oplevert.*

(Dioph. III, 20. *Alfakhrí.* Fol. 96. v°. W. 122.)

Stellen wij de getallen voor door x en y, dan moeten $xy + x$, $xy + y$ en $xy + x + y$ volkomen vierkanten zijn. Door $z = p^2y - 1$ te nemen, wordt $xy + y$ een vierkant; brengen wij deze waarde van x in de beide andere vormen over en stellen wij dan verder:

$p^2y^2 - y + p^2y - 1 = \psi^2$ en $p^2y^2 + p^2y - 1 = \omega^2$,

dan heeft men door aftrekking $\omega^2 - \psi^2 = y$;

waaruit wij afleiden:

$(\omega + \psi)(\omega - \psi) = 2py \times \frac{1}{2p}$, $\omega + \psi = 2py$, $\omega - \psi = \frac{1}{2p}$,

$\omega = py + \frac{1}{4p}$, $\psi = py - \frac{1}{4p}$,

$p^2y^2 + p^2y - 1 = (py + \frac{1}{4p})^2 = \omega^2$

$$y = \frac{16p^2 + 1}{16p^4 - 8p^2}.$$

Nemen wij hierin $p = 1$, dan vinden wij $y = \frac{17}{8}$ $x = \frac{9}{8}$, welke waarden aan de voorwaarden des vraagstuks voldoen zullen.

18. Vraagstuk. *Men vraagt vier getallen zoodanig, dat wanneer men al de producten twee aan twee dier getallen met een zelfde vierkant vermeerdert, de uitkomsten wederom vierkanten zijn.* (Dioph. IV, 19—21.)

Zij het bij te voegen vierkant p^2; stellen wij dan de gevraagde getallen voor door x, y, z en u, dan moeten

$$\left.\begin{matrix} xy + p^2 \\ xz + p^2 \\ xu + p^2 \end{matrix}\right\}(1) \qquad \begin{matrix} yz + p^2 \\ yu + p^2 \end{matrix} \qquad zu + p^2$$

volkomen vierkanten zijn.

Om het eerste drietal vormen tot volkomen vierkanten te maken, stellen wij slechts:

$$y = a^2x + 2ap,$$
$$z = b^2x + 2bp,$$
$$u = c^2x + 2cp,$$

dan is $yz + p^2 = a^2b^2x^2 + 2ab px(a+b) + (4ab+1)p^2$,
en $zu + p^2 = b^2c^2x^2 + 2bcpx(b+c) + (4bc+1)p^2$.

Stelt men hierin $a + b = \alpha$, $4ab + 1 = \alpha^2$, $b + c = \beta$ en $4bc + 1 = \beta^2$, dan worden $yz + p^2$ en $zu + p^2$ volkomen vierkanten. Wij hebben derhalve:

$$(a+b)^2 = \alpha^2 = 4ab + 1,$$
$$(b+c)^2 = \beta^2 = 4bc + 1;$$

waaruit na behoorlijke herleiding gevonden wordt:

$$b = a - 1,$$
$$c = a - 2.$$

Nemen wij derhalve voor a, b en c drie op elkander volgende getallen, dan zullen alle vormen, uitgezonderd $yu + p$, voor alle waarden van x volkomen vierkanten zijn. Wij gaan nu x bepalen zoodanig, dat ook

$$yu + p^2 = a^2c^2x^2 + 2acpx(a+c) + (4ac+1)p^2$$

een volkomen vierkant worde; daartoe stellen wij

$$a^2c^2x^2 + 2acpx(a+c) + (4ac+1)p^2 = (acx + q)^2,$$

en vinden dan $$x = \frac{q^2 - (4ac+1)p^2}{2ac(op + cp - q)}.$$

Nemen wij hierin nu $q = 11$, $p = 3$, $a = 3$, $b = 2$, $c = 1$, dan is: $x = \frac{2}{5}$, $y = 24$, $z = 4\frac{1}{5}$, $u = 2\frac{1}{5}$. Deze waarden in de gestelde vormen gesubstitueerd, geven volgens den eisch, vierkanten.

19. Vraagstuk. *Twee getallen te vinden zoodanig, dat de som hunner derde machten een vierkant wordt.*

(*Alfakhrî*, Fol. 98. v°. W. 124.)

Stellen wij de getallen voor door x en y, het vierkant door z^2, dan is $$x^3 + y^3 = z^2.$$

Nemen wij verder $y = px$ en $z = qx$, dan heeft men:

$$x^3 + p^3x^3 = q^2x^2,$$

derhalve $$x = \frac{q^2}{1 + p^3}.$$

Neemt men $q = 6$, $p = 2$, dan vindt men $x = 4$, $y = 8$, $z = 24$ en $x^2 + y^2 = z^2 = 576 = (24)^2$.

20. Vraagstuk. *Men vraagt twee getallen te vinden zoodanig, dat het product hunner derde machten een volkomen vierkant zij.* (*Alfakhrí*, Fol. 99. r°. W. 125.)

Wederom de getallen door x, y en z voorstellende, is

$$x^3 y^3 = z^2.$$

Stellen we hierin $y^3 = p^2 x^3$ en $z = q^2 x^3$, dan is:

$$p^2 x^6 = z^2, \text{ dus } z = q^2 x^3 = p x^3,$$

of eindelijk

$$x = \frac{q^2}{p};$$

waarin, omdat wij $y^3 = p^2 x^3$ genomen hebben, p^2 tevens eene derde macht moet zijn, om voor y een rationeel getal te vinden. Nemen wij dus $p = 8$ en $q = 4$, dan is $x = 2$; $y^3 = 512$ en $z = 64$.

Verder is $x^2 . y^3 = 8 . 8^3 = z^2 = (64)^2 = 8^4$.

21. Vraagstuk. *Men vraagt twee getallen te vinden zoodanig, dat de som hunner vierkanten eene derde macht zij.* (*Alfakhrí*, Fol. 98. v°. W. 124.)

Deze getallen voorstellende door x, y, z, heeft men:

$$x^2 + y^2 = z^3.$$

Hierin $y = px$ en $z = qx$ nemende, vindt men onmiddellijk:

$$x = \frac{1 + p^2}{q^3}.$$

Stelt men hierin nu $p = 3$, $q = 5$, dan vindt men $x = \frac{2}{25}$, $y = \frac{6}{25}$ en $z = \frac{1}{5}$; verder is:

$$x^2 + y^2 = \frac{4}{625} + \frac{36}{625} = \frac{40}{625} = \frac{8}{125} = \left(\frac{2}{5}\right)^3 = z^3.$$

22. Vraagstuk. *Men vraagt twee getallen te vinden zoodanig, dat het product hunner vierkanten eene derde macht oplevert.* (*Alfakhrí*, Fol. 99. v°. W. 125.)

Stelt men de getallen wederom voor door x, y, z, dan is:

$$x^2 y^2 = z^3;$$

zij hierin $y = px$ en $z = qx$, dan vindt men onmiddellijk:

$$x = \frac{q^3}{p^2}.$$

Neemt men nu $q = 4$ en $p = 8$, dan is $x = 1$, $y = 8$ en $z = 4$.

23. Vraagstuk. *Men vraagt in geheele getallen waarden van x, y en z, die voldoen aan de vergelijking*

$$x^6 + 5y^2 = z^2.$$

(*Alfakhrí*, Fol. 104. v°. W. 132.)

Stellen wij $y = nx^2$, dan heeft men

$$x^6 + 5n^2x^4 = z^2.$$

Zij nu verder $z = mx^2$, maar m zoodanig gekozen, dat $m^2 - 5n^2$ een volkomen vierkant worde, dan is:

$$x^6 + 5n^2x^4 = m^2x^4$$
$$x^2 = m^2 - 5n^2$$
$$x = \sqrt{(m^2 - 5n^2)}.$$

Om nu te weten, hoe wij m en n moeten bepalen, stellen wij verder:

$$m^2 - 5n^2 = x^2 = (m - \psi)^2 = m^2 - 2m\psi + \psi^2$$
$$m = \frac{\psi^2 + 5n^2}{2\psi}.$$

Stellen wij hierin $\psi = 5$ en $n = 3$, dan vinden wij $m = 7$, $x = 2$, $y = 12$ en $z = 28$.

24. *Men vraagt twee geheele positieve getallen te vinden zoodanig, dat de vierde macht van het eerste, vermeerderd met de negende macht van het tweede, een volkomen vierkant oplevert.*

(*Alfakhrí*, Fol. 104. v°. W. 132.)

Stellen wij de getallen voor door x, y en z, dan moeten wij geheele getallen vinden, die voldoen aan de vergelijking:

$$x^4 + y^9 = z^2.$$

Stellen wij daartoe $x = ay^2$ en $z = by^4$, dan is:

$$a^4y^8 + y^9 = b^2y^8,$$
$$y = b^2 - a^4;$$

opdat y positief zij, behoeft men dus b en a slechts positief en $b > a^2$ te nemen. Zij $b = 5$, $a = 2$, dan is $y = 9$, $x = 162$ en $z = 32805$; verder is dan:

$$x^4 + y^9 = 688747536 + 387420489 = 1076168025 = (32805)^2.$$

25. Vraagstuk. *Men vraagt twee geheele positieve getallen*

zoodanig te bepalen, dat de negende macht van het eerste, verminderd met de vierde macht van het tweede, een zuiver vierkant oplevert. (*Alfakhrî*, Fol. 104. v°. W. 133.)

Stellen wij de getallen wederom voor door x, y en z, dan heeft men de vergelijking

$$x^9 - y^4 = z^2.$$

Stellen wij, om dit vraagstuk op te lossen

$y = ax^2$ en $z = bx^4$, dan gaat de vergelijking over in

$$x = b^2 + a^4.$$

Nemen wij hierin $a = 1$, $b = 1$, dan wordt $x = 2$, $y = 4$ en $z = 16$.

26. Vraagstuk. *Men vraagt drie geheele positieve getallen te vinden, die voldoen aan de vergelijking:*

$$x^9 + 5x^3y^3 = z^2.$$

(*Alfakhrî*, Fol. 105, v°. W. 133.)

Stellen wij $y = nx^3$ en $z = px^5$, dan vinden wij:

$$x = \frac{5n^3 + 1}{p^2}.$$

Bepalen wij hierin n en p zoodanig, dat $\frac{5n^3 + 1}{p^2}$ een geheel positief getal is; nemen wij bijv. $n = 4$ en $p = 3$, dan vinden wij: $x = 9$, $y = 2916$ en $z = 177147$.

Inderdaad is:

$$x^9 + 5x^3y^3 = 387420489 + 30993639120 = \\ = 31381059609 = (177147)^2.$$

Aanmerking. Deze oplossingen in geheele getallen komen niet voor in *Alfakhrî*. Men vindt daar slechts oplossingen in gebrokens.

27. Vraagstuk. *Men vraagt twee getallen te vinden zoodanig, dat de derde macht van het eerste getal, vermeerderd of verminderd wordende met de vierde macht van het tweede, de som en het verschil beide vierkanten opleveren.*

(*Alfakhrî*, Fol. 108. v°. W. 137.)

Volgens de gegevens van het vraagstuk heeft men:

$$x^3 + y^4 = z^2 \quad \text{en} \quad x^3 - y^4 = z'^2.$$

Stelt men nu hierin:

$x = a\varphi$, $y = a^2\varphi$, $z = b\varphi^2$ en $z' = c\varphi^2$,

dan vindt men de vergelijkingen:

$a^3\varphi^3 + a^3\varphi^4 = b^2\varphi^4$ $a^3\varphi^3 - a^3\varphi^4 = c^2\varphi^4$.

Hieruit volgt door aftrekking:

$2a^3 = b^2 - c^2$ of $c^2 + 2a^3 = b^2$.

Stellen wij $b = (c + \psi)$, dan vinden wij hieruit:

$$c = \frac{2a^3 - \psi^2}{2\psi}.$$

Nemen wij hierin $a = 1$, $\psi = \frac{1}{2}$, dan is $c = \frac{7}{4}$, $b = \frac{9}{4}$, $\varphi = \frac{16}{65}$,

$x = \frac{16}{65}$, $y = \frac{16}{65}$, $z = \frac{576}{4225}$, $z' = \frac{448}{4225}$,

welke getallen door proefneming aan de gestelde voorwaarden zullen blijken te voldoen.

28. Vraagstuk. *Daar zijn twee getallen, waarvan het eene driemaal zoo groot is, als het andere; zoo men het kleinste getal tot de derde macht verhelt en daarvan het vierkant des tweeden getals aftrekt, dan is de rest eene volkomen derde macht. Vraage naar die getallen.*

(Ludolf v. Colen, *Konstighe Vraghen*, N°. 26. Voorkomende in zijn boek *van den Circkel*, 2e dr. 1615. Fol. 96, v°.)

Stellen wij de getallen voor door x en $3x$, dan moet $x^3 - 9x^2$ een volkomen kubiekgetal zijn; nemen wij het gelijk aan $(\varphi x)^3$, dan is $x^3 - 9x^2 = \varphi^3 x^3$

$$x = \frac{9}{1 - \varphi^3}.$$

Zij hierin $\varphi = \frac{1}{2}$, dan is $x = 10\frac{2}{7}$, $3x = 30\frac{6}{7}$, enz.

29. Vraagstuk. *Men vraagt twee getallen, wier verschil een vierkant is, indien men weet, dat elk in 't bijzonder met de eenheid vermeerderd, een volkomen kubiekgetal oplevert.*

(L. v. Colen, id. id. N°. 29.)

Dewijl de getallen, met 1 vermeerderd, volkomen derde machten zijn, kan men ze voorstellen door $p^3x^3 - 1$ en $q^3x^3 - 1$, terwijl hun verschil, $p^3x^3 - q^3x^3$, gelijk genomen kan worden aan r^2x^2;

derhalve $p^3x^3 - q^3x^3 = r^2x^2$

$$x = \frac{r^2}{p^3 - q^3}.$$

Neemt men hierin $r = 7$, $p = 2$ en $q = 1$, dan is $x = 7$. De getallen zijn derhalve 2743 en 342, enz.

Aanmerking. v. COLEN geeft tot antwoord $544\frac{6}{7}\frac{13}{18}$ en $141\frac{3}{7}\frac{05}{18}$.

30. Vraagstuk. *Vindt twee getallen zoodanig, dat als men tot de derde macht van het grootste het kleinste getal vergaart, er evenveel komt, alsof men bij de derde macht van 't kleinste het grootste optelt.*

(L. v. COLEN, id. id. N°. 32. Fol. 96, v°.)

Stelt men de gevraagde getallen voor door x en y, dan is:

$$x^3 + y = y^3 + x \quad \text{of} \quad x^3 - y^3 = x - y$$

of $x^2 + xy + y^2 = 1$

of $x^2 + xy + \frac{1}{4}y^2 = 1 - \frac{3}{4}y^2$.

Het eerste lid een volkomen vierkant zijnde, moet zulks ook het geval zijn met $1 - \frac{3}{4}y^2$; stellen wij derhalve:

$$1 - \tfrac{3}{4}y^2 = (1 - py)^2 = 1 - 2py + p^2y^2$$

$$2p = (\tfrac{3}{4} + p^2)y,$$

waaruit $$y = \frac{2p}{p^2 + \frac{3}{4}}.$$

Neemt men hierin $p = \frac{5}{2}$, dan vindt men een der door v. C. opgegeven antwoorden: $y = \frac{5}{7}$, $x = \frac{3}{7}$.

31. Vraagstuk. *Men vraagt drie getallen zoodanig, dat het eerste twee minder, het derde drie meer zij, dan het tweede en dat hun gedurig product, met 100 vermeerderd, eene volkomen derde macht zij.* (L. v. COLEN, id. id. Fol. 98, v°.)

Volgens de voorwaarden van het vraagstuk heeft men:

$x(x + 2)(x + 5) + 100$ moet een volkomen kubiekgetal zijn.

Stelt men den wortel daarvan voor door $x + a$, dan is:

$$x^3 + 7x^2 + 10x + 100 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3.$$

Neemt men nu $7x^2 = 3ax^2$, waardoor $a = \frac{7}{3}$ wordt, dan is:

$$10x + 100 = 3a^2x + a^3$$

$$x = \frac{100 - a^3}{3a^2 - 10}; \text{ en dewijl } a = \tfrac{7}{3} \text{ is:}$$

$$x = 13\tfrac{11}{17}.$$

Deze wijze doet ons slechts één antwoord vinden. Brengen wij echter hier het geleerde van § 18, N°. 11 in practijk, dan kunnen wij zoo vele antwoorden vinden als ons goeddunkt.

32. Vraagstuk. *Vindt drie getallen zoodanig, dat men, indien men van de derde macht hunner som ieder getal in 't bijzonder aftrekt, drie volkomen derde machten overhoudt.*

(Dioph. V. 19. L. v. Colen, id. id. 57.

Adrianus Twilt. *Toets-steen van de Algebra Speciosa.*)

Wij stellen de drie gevraagde getallen voor door φ, ψ en ω, hunne som door ax en de resten, die men overhoudt door a^3x^3 achtereenvolgens met φ, ψ en ω te verminderen, door b^3x^3, c^3x^3 en d^3x^3, dan is:

$$\varphi + \psi + \omega = a^3x^3 - b^3x^3 + a^3x^3 - c^3x^3 + a^3x^3 - d^3x^3 = \\ = (3a^3 - b^3 - c^3 - d^3)\,x^3 = ax\,;$$

derhalve: $$x^2 = \frac{a}{3a^3 - b^3 - c^3 - d^3}.$$

$\frac{a}{3a^3 - b^3 - c^3 - d^3}$ moet een volkomen vierkant zijn; derhalve moet ook $a(3a^3 - b^3 - c^3 - d^3)$ een volkomen vierkant zijn; stellen wij den wortel van dit vierkant voor door

$2a^2 - 3ae$, dan is:

$$3a^4 - ab^3 - ac^3 - ad^3 = 4a^4 - 12a^3e + 9a^2e^2,$$

of na deeling door a en rangschikking:

$$-a^3 + 12a^2e - 9ae^2 - b^3 - c^3 = d^3.$$

Het eerste lid moet dus een volkomen derdemacht zijn. Stellen wij haren wortel voor door $-a + 4e$, dan is

$$39ae^2 = b^3 + c^3 + 64e^3$$

$$a = \frac{b^3 + c^3 + 64e^3}{39e^2}.$$

Om dus aan het vraagstuk door positieve getallen te voldoen, hebbe men slechts te zorgen, dat $a < 4e$ is.

Neemt men $b = 10$, $c = 11$ en $e = 3$, dan is $a = \frac{451}{559}$, $d = \frac{11}{559}$, $x = \frac{39}{559}$. Hierdoor vindt men:

$$\left.\begin{aligned} a^3x^3 - b^3x^3 &= \tfrac{3341485\,1}{167\,1\,8\,4\,1\,5\,1} \\ a^3x^3 - c^3x^3 &= \tfrac{1\,2\,7\,8\,0\,2\,6\,2}{167\,1\,8\,4\,1\,5\,1} \\ a^3x^3 - d^3x^3 &= \tfrac{9\,1\,7\,2\,8\,9\,3\,8}{167\,2\,9\,4\,1\,5\,1} \end{aligned}\right\} = \tfrac{451}{559}.$$

Verheft men deze som tot de derde macht, dan heeft men

$\frac{1177281151}{1771561561}$ en daarvan de gevonden getallen elk in 't bijzonder aftrekkende, vindt men tot uitkomst:

$$(\tfrac{330}{551})^3,\ (\tfrac{1229}{551})^3 \text{ en } (\tfrac{17}{551})^3.$$

Aanmerking. Deze korte en fraaie oplossing is van LAURENS PRAALDER, *Mathematicus tot Utrecht*, en komt voor in het bijvoegsel tot het mengelwerk van STRABBE'S *Oeffenschool der Mathematische Wetenschappen.* Nog kan men hierbij opmerken, dat de wijze van oplossing algemeen is; dat men namelijk door eene soortgelijke handelwijze, vier, vijf en meer getallen kan vinden, die aan dezelfde voorwaarden voldoen. Het is opmerkelijk, dat SAUNDERSON, die verschillende vraagstukken van DIOPHANTUS oplost, van dit vraagstuk niet spreekt.

33. Vraagstuk. *Men vraagt drie getallen zoodanig, dat indien men de derde macht hunner som bij ieder getal in 't bijzonder optelt, de uitkomsten wederom rationeele kuben zijn.*

(LUDOLF VAN COLEN, 58.)

Stelt men de som der getallen ax, dan is de derde macht hunner som $= a^3x^3$. Verder kan men de getallen stellen: $b^3x^3 - a^3x^3$, $c^3x^3 - a^3x^3$, $d^3x^3 - a^3x^3$, waaruit dan volgt:

$$(b^3 + c^3 + d^3 - 3a^3)\ x^3 = ax,$$

$$x^2 = \frac{a}{b^3 + c^3 + d^3 - 3a^3}.$$

Deze breuk moet een volkomen vierkant zijn; a kan zoodanig genomen worden en het komt er dus maar op aan, dat de noemer ook een vierkant worde. Stellen wij derhalve: $b = f - c$ en

$$(f - c)^3 + c^3 + d^3 - 3a^3 = (cg + h)^2,$$

dan is: $f^3 - 3f^2c + 3fc^2 + d^3 - 3a^3 = c^2g^2 + 2cgh + h^2$.

Neemt men hierin nog $3fc^2 = c^2g^2$, dan is $f = \frac{g^2}{3}$

en men vindt:

$$c = \frac{f^3 + d^3 - 3a^3 - h^2}{3f^2 + 2gh}.$$

Neemt men hierin $a = 1$ en $g = 3$, dan is ook $f = 3$. Verder zij $h = 2$ en $d = 8$, dan is $c = \frac{17}{39}$, $b = \frac{78}{39}$ en $x = \frac{507}{1847}$.

Hierdoor vindt men verder voor de gevraagde getallen:

$$\frac{62334473257}{1307600999423},\quad \frac{97775283}{1307600999423},\quad \frac{33884199918}{1307600999423}.$$

Aanmerking. Indien men in dit vraagstuk ware te werk gegaan zoo als in het vorige, zou men eene soortgelijke oplossing gevonden hebben.

Omdat $x^2 = \frac{a}{b^3 + c^3 + d^3 - 3a^3}$, moet ook $a(b^3 + c^3 + d^3 - 3a^3)$ een volkomen vierkant zijn; zij de wortel daarvan $2a^2 + 3ad$, dan vinden wij na behoorlijke herleiding

$$b^3 = 7a^3 + 12a^2d + 9ad^2 - d^3 - c^3.$$

Het eerste lid dezer vergelijking een kubiekgetal zijnde, moet zulks ook het geval zijn met het tweede lid; wij stellen derhalve:

$$7a^3 + 12a^2d + 9ad^2 - d^3 - c^3 = (-d + 3a)^3,$$

waaruit $$d = \frac{20a^3 + c^3}{39a^2}.$$

Deze oplossing toepassende, zal men vier, vijf en meer getallen kunnen vinden, die aan de gestelde voorwaarden voldoen.

34. Ter toepassing van het geleerde dienen nog de volgende

VRAAGSTUKKEN.

1. Men vraagt de onbekenden op te lossen uit de volgende vergelijkingen:
$x + y = z + 20$, $y + z = x + 30$, $z + x = y + 40$.

2. $x + y - t + z = 20$, $y + z + t = x + 30$,
$z + t + x = y + 40$, $t + x + y = z + 50$.

3. $y + \frac{x}{3} = z + \frac{y}{4} = x + \frac{z}{5}$.

4. Men vraagt twee vierkanten, wier som gelijk is aan tien.

5. Men vraagt twee vierkanten, wier verschil gelijk is aan vijf.

6. Een getal te vinden zoodanig, dat eene vermeerdering met 3, zoowel als met 5 eenheden, een vierkant voortbrengt.

7. Men vraagt naar de waarden der onbekenden in de vergelijkingen:

$$x + y + z + v = 20, x + \frac{x}{2} = y + \frac{y}{3} = z + \frac{z}{4} = v + \frac{v}{6}$$

8. Men vraagt drie getallen te vinden zoodanig, dat hunne som, zoowel als de som van twee dier getallen, verminderd met het derde, een zuiver vierkant oplevert.

9. Van welke drie vierkanten is het verschil van het eerste en tweede, tweemaal zoo groot als het verschil van het tweede en derde?

10. Welke waarden voor x, y, z voldoen aan de vergelijkingen:

$$x+y+z=30 \text{ en } x-\left(\frac{x}{3}+2\right)\left(\frac{z}{5}+4\right)=$$

$$=y-\left(\frac{y}{4}+3\right)+\left(\frac{x}{3}+2\right)=z-\left(\frac{z}{5}+4\right)+\left(\frac{y}{4}+3\right)?$$

11. Men vraagt drie getallen zoodanig, dat zoowel hunne som, als de som van twee dier getallen, telkens met 3 vermeerderd, een volkomen vierkant oplevert.

12. Zoek drie getallen zoodanig, dat zoo men de derde macht hunner som van ieder der getallen in 't bijzonder aftrekt, de verschillen derde machten zijn.

13. Zoek drie getallen zoodanig, dat hun gedurig product, met elk van die getallen vermeerderd, volkomen vierkanten oplevert.

14. Men vraagt drie getallen zoodanig, dat elk van die getallen in 't bijzonder verminderd met hun gedurig product, een volkomen vierkant tot rest late.

15. Men vraagt eene rekenkundige reeks van 3 termen zoodanig, dat als men van elken term $4\frac{1}{2}$ aftrekt, de resten volkomen vierkanten zijn.

16. Een volkomen vierkant in vier deelen te verdeelen, zoodanig, dat elk van die deelen met 1 vermeerderd, een volkomene derde macht oplevert.

17. Vier getallen te vinden, wier producten twee aan twee, elk in 't bijzonder met een bepaald getal vermeerderd, zes volkomen vierkanten opleveren.

18. Vier getallen te vinden, wier producten twee aan twee, elk in 't bijzonder van een bepaald getal afgetrokken, zes volkomen vierkanten opleveren.

19. Verdeel een volkomen vierkant in vier deelen zoodanig, dat indien men van het eerste deel de andere deelen elk in

't bijzonder aftrekt, de resten wederom volkomen vierkanten zijn.

20. Een rechthoekigen driehoek te vinden, wiens zijden rationeel zijn en eene rekenkundige reeks vormen zoodanig, dat wanneer men de som der zijden van het product der zijden twee aan twee aftrekt, de resten volkomen vierkanten zijn.

21. Twee getallen te vinden zoodanig, dat de derde macht van het eene, verminderd met het vierkant van het andere, wederom een vierkant oplevert.

22. Twee getallen te vinden zoodanig, dat de vierde macht van het eene, vermeerderd met tien malen de derde macht van het andere, een volkomen vierkant oplevert.

23. Twee getallen te vinden zoodanig, dat de negende macht van het eene, vermeerderd met vijf maal het product van de derde macht van het eerste en de tweede macht van het tweede, een volkomen vierkant oplevert.

24. Men vraagt een getal, welks derde macht, met vijf malen en ook met tien malen zijne tweede macht vermeerderd wordende, steeds een volkomen vierkant oplevert.

25. Men vraagt twee getallen zoodanig, dat de vierde macht van het eene, vermeerderd of verminderd met de derde macht van het tweede, de som en het verschil beiden volkomen vierkanten zijn.

AFDEELING III.

DE LEER DER FUNCTIËN.

§ 20. Over de functiën en hare karakters.

1. Grootheden, die gedurende den loop van eenige beschouwing niet van waarde veranderen, noemt men *standvastig*. Grootheden, die gedurende den loop van eenige beschouwing voortdurend van waarde veranderen, zijn *veranderlijk*. Men verdeelt de veranderlijke grootheden in *oorspronkelijk* en *afhankelijk* veranderlijke.

Oorspronkelijk of *onafhankelijk veranderlijk* is die grootheid, welke slechts verandert, omdat men haar willekeurig verschillende waarden toekent; terwijl de veranderingen in de *afhankelijk veranderlijke* het gevolg zijn van willekeurige waarden, die men aan onafhankelijk veranderlijken heeft toegekend.

De afhankelijk veranderlijke grootheid noemt men eene *functie* der grootheden, waarvan zij afhangt; de onafhankelijken noemt men de *elementen* of *argumenten* der functie.

Heeft men bijv. $y = Ax^2 + Bx + C$ en geeft men aan x achtereenvolgens verschillende waarden, die geheel willekeurig zijn, dan zullen ook de daarmede overeenkomstige waarden van y veranderen. Nu is y de afhankelijk veranderlijke, de functie van x; x is de onafhankelijke, de oorspronkelijk veranderlijke, het element, het argument der functie. Eene zoodanige functie, waarin de betrekkingen van afhankelijkheid tusschen de getallenwaarde eener functie en hare elementen door eene of meer vergelijkingen worden uitgedrukt, noemt men eene *analytische functie*.

Om aan te wijzen, dat y eene functie van x is, schrijft men (vergelijk § 5, 2):

$y = f(x)$, $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$, $y = F(x)$, $y = \Phi(x)$, $y = \mathrm{X}(x)$, enz.

Is y eene functie van x en z, dan schrijft men $y = f(x, z)$, enz. Hangt y af van meer dan twee argumenten, dan blijft de schrijfwijze dezelfde, bijv. $y = \varphi(u, v, x, z)$; 't geen zeggen wil, dat y afhangt van de veranderingen, die men brengen kan in u, v, x, z, enz. Nog valt hierbij op te merken, dat, indien $y = F(x)$ gegeven is, $F_1(x)$, $F_2(x)$, enz. functiën zijn van x, die op de eene of andere wijze uit $F(x)$ zijn afgeleid.

2. De functiën worden verdeeld in onderscheidene soorten:

Eene functie is *algebraïsch*, wanneer men door de hoofdbewerkingen der algemeene rekenkunde de waarde der functie uit hare elementen berekenen kan. Zijn deze hoofdbewerkingen [optelling, aftrekking, vermenigvuldiging, deeling, machtsverheffing en worteltrekking] daartoe niet voldoende, moet men bijv. van getallen overgaan tot logarithmen, van bogen tot goniometrische lijnen, dan is de functie *transcendent*.

Functiën, waarin de veranderlijke grootheid met irrationeele exponenten is aangedaan, worden door sommigen *interscendente* functiën genoemd.

Wanneer de veranderlijke grootheid geene andere dan geheele exponenten heeft, dan is de functie *rationeel;* zij is *irrationeel*, wanneer de exponent van het veranderlijke element of van eene zijner functiën gebroken is.

Verder onderscheidt men nog:

Exponentiale functiën, waarin het veranderlijk element in den exponent voorkomt, bijv.:

$$y = a^x, \qquad z = Ax^x + Bxy.$$

Logarithmische functiën:

$$y = \log(a + x), \qquad z = \log(ax + by).$$

Goniometrische functiën:

$$z = a \sin(x + y) + b(\cos x + \cos y).$$

Alterneerende functiën [*fonctions alternées.* Vergel. CAUCHY, *Cours d'Analyse algébrique;* BALTZER, *Ueber die Determinanten*

zijn functiën van verschillende veranderlijken, waarvan men twee willekeurige met elkander verwisselende, de functie hare absolute waarde laat behouden, doch van teeken doet veranderen, bijv.:

$$s = (x - y), \quad z = (x^2y - y^2x), \quad z = (\sin x - \sin y),$$
$$u = (x - y)\ (y - z)\ (x - z).$$

Geheele functiën, wanneer geene exponenten der veranderlijke grootheden negatief zijn; in het tegengestelde geval zijn zij *gebroken*.

Eenvormige functiën, die voor elke willekeurige waarde der veranderlijke elementen slechts ééne overeenkomstige waarde verkrijgen.

$$u = F(x, y) = ax + by.$$

Tweevormige functiën, die voor elke willekeurige waarde der argumenten twee overeenkomstige waarden verkrijgen:

$$y^2 = F(x) = Ax^2 + Bx + C.$$

Drievormige functiën, enz.

Eene functie van x is *even*, wanneer alle exponenten van x even zijn,

$$y = f(x) = Ax^4 + Bx^2 + C;$$

zijn alle exponenten van x oneven, dan is $f(x)$ zulks ook.

Eene functie van twee of meer veranderlijken is *gelijkslachtig*, wanneer de som der exponenten van de veranderlijken in alle termen even groot is, bijv.:

$$\varphi(x, y) = ax^2y + bx^3 + cxy^2 + dy^3.$$

Eene functie is *uitgedrukt*, wanneer rechtstreeks aangewezen wordt, hoe men hare waarde uit de waarden der elementen kan berekenen; zij is *ingewikkeld*, indien zulks slechts door onopgeloste vergelijkingen wordt aangewezen.

3. Wanneer y eene functie is van het onafhankelijk veranderlijke element x, dan noemt men haar eene *onafgebroken* functie (*fonction continue*) tusschen twee grenzen $x = a$ en $x = b$, wanneer zij voor alle mogelijke tusschenliggende waarden van $x > a$ en $x < b$ (ingeval $b > a$) reëele eindige waarden van y oplevert. Doet zij zulks niet, dan is zij *afgebroken* (*discontinue*).

Heeft men bijv. de functie

$$y = f(x) = \frac{c}{x - a},$$

dan zal deze continue blijven voor alle waarden van $x < a$ en voor alle waarden van $x > a$, doch voor $x = a$ zal men vinden $y = \frac{c}{0} = \infty$ en de functie zal dus tusschen de grenzen $x = a + \delta$ en $x = a - \delta$, δ een oneindig klein getal voorstellende, discontinue zijn.

Dewijl de onafhankelijk veranderlijke aan niets gebonden is, kan men haar voortdurend doen toe- of afnemen; de afhankelijke zal daardoor eene voortdurende verandering ondergaan, die men wel niet kan aangeven, maar die men terug kan brengen tot drie gevallen. Heeft men bijv.

$$y = f(x) = x^2,\ y = F(x) = \sin x,\ y = \varphi(x) = \frac{x}{a + x},$$

dan zal, wanneer x toeneemt, de eerste functie onophoudelijk toenemen en het gebied doorloopen van alle positieve getallen; de tweede functie, altijd tusschen $+1$ en -1 gelegen, kan die waarden nooit overschrijden; de derde eene bepaalde grens meer en meer naderen, naarmate men x grooter neemt; want schrijft men

$$\varphi(x) = \frac{x}{x + a} = 1 - \frac{a}{a + x},$$

dan zal, wanneer x toeneemt, het gebroken $\frac{a}{a + x}$ hoe langer hoe minder van 0 verschillen; $\varphi(x)$ nadert dus meer en meer de grens 1, zonder die ooit volkomen te kunnen bereiken. Men is gewoon dit te schrijven:

$$x = \infty,\ \lim \varphi(x) = \lim \frac{x}{a + x} = 1,$$

d. i. naarmate x grooter genomen wordt, zal de breuk $\frac{x}{a + x}$ meer tot de eenheid naderen; neemt men x zoo groot, als maar immer mogelijk is, dan zal de waarde der breuk $\frac{x}{a + x}$ minder

van 1 verschillen, dan het kleinste getal, dat men zich kan voorstellen.

Aanmerking. Zij, die NEWTON volgen in zijne *fluctie* rekening [en hun aantal is uiterst gering] spreken van *vloeiende* functiën, welk woord dezelfde beteekenis heeft als continue.

4. Stelling. *Wanneer in eene continue functie van één veranderlijk element, de onafhankelijk veranderlijke opklimt met oneindig kleine waarden van de eerste orde,* [Vergel. § 10, 1] *dan zal in het algemeen de functie ook met oneindig kleine waarden van dezelfde orde toe- of afnemen.*

Bewijs. Wanneer in $f(x)$ het argument x met eene oneindig kleine waarde der 1e orde aangroeit en wij deze aangroeiing door δ voorstellen, dan hebben wij aan te toonen, dat de grens, waartoe $\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}$ nadert, eene eindige grootheid is; dat men dus heeft: $\lim. \frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta} = p.$

Nemen wij aan, dat zulks het geval niet is en dat men hebbe:

$\lim. \frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta} = 0$ of $\lim. \frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta} = \infty \ldots (\alpha)$

Zij verder $b > a$ en veronderstellen wij, dat de functie van x tusschen de grenzen a en b continue, $n = \infty$ en $\frac{b-a}{n} = \delta$ is, dan heeft men in de beide veronderstellingen van (α):

$$\begin{aligned} f(a+\delta)-f(a) &= \delta p_1, \\ f(a+2\delta)-f(a+\delta) &= \delta p_2, \\ f(a+3\delta)-f(a+2\delta) &= \delta p_3, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ f(a+n\delta)-f(a+(n-1)\delta) &= \delta p_n; \end{aligned}$$

of na optelling:

$$f(a+n\delta)-f(a) = \delta(p_1+p_2+p_3+\ldots\ldots p_n).$$

Volgens de eerste veronderstelling van (α) naderen $p_1, p_2, p_3 \ldots p_n$ meer en meer tot 0; zij onder al die waarden θ de grootste, dan is

$$f(a+n\delta)-f(a) < n\delta \times \theta;$$

of omdat $a + n\delta = b$ en $n\delta = b - a$

$$f(b) - f(a) < (b - a)\theta.$$

Maar $b - a$ is een eindig getal, θ is eene oneindig kleine, het product $(b - a)\ \theta$ is dus ook oneindig klein (§ 10, 3); derhalve:

$$\lim \{f(b) - f(a)\} = 0.$$

De veronderstelling $\frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} = 0$ geeft geen verschil tusschen twee willekeurige waarden der functie; de functie wordt dus standvastig en houdt op functie te zijn.

Volgens de tweede veronderstelling naderen $p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$ meer en meer tot ∞; zij onder al die oneindig grooten θ_1 de kleinste, dan is

$$f(a + n\delta) - f(a) > n\delta \times \theta_1.$$

Maar $n\delta$ is een eindig getal, $n\delta \times \theta_1$ is dus ∞, derhalve

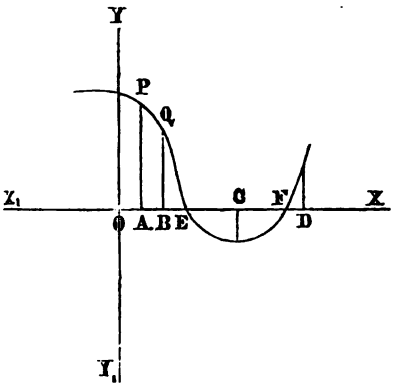
$$\lim \{f(b) - f(a)\} = \infty.$$

De veronderstelling $\frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} = \infty$ geeft ons dus, tegen de hypothese aan, te kennen, dat de functie discontinue is. Er blijft ons dus niets over, dan aan te nemen, dat $p_1, p_2, p_3 \ldots p_n$ eindige getallen zijn en dat de aangroeiingen van x en $f(x)$ oneindig kleinen zijn van denzelfden rang.

5. Om ons een helder denkbeeld van de functiën te verschaffen, zullen wij het reeds aangevoerde opheldéren door eene meetkundige beschouwing.

Wanneer gegeven is $y = F(x)$ en men in een plat vlak twee willekeurige rechten trekt, die elkander onder een zekeren hoek, (wij nemen bij voorkeur een rechten hoek) in het punt O snijden, daarna OA gelijk neemt aan eene willekeurige eenheid en AP, welke evenwijdig getrokken is aan OY, gelijk maakt aan de waarde, welke y heeft in de veronderstelling, dat $x = 1$, dan zal AP eene functie zijn van OA. Neemt men daarna OB gelijk aan 2, dan zal de overeenkomstige waarde van y het punt Q bepalen. Is nu $F(x)$ continue, dan zullen de uiteinden van

de lijnen $y = F(OA)$, $y_1 = F(OA + \delta)$,
$y_2 = F(OA + 2\delta) \ldots\ldots y_n = F(OB)$



punten moeten zijn, die op een oneindig kleinen afstand van elkander gelegen zijn, en dus kunnen worden aangemerkt, als de op elkaâr volgende punten eener kromme lijn; of met andere woorden: wanneer gegeven is de continue functie $y = F(x)$ en men dan twee elkaâr [rechthoekig] snijdende lijnen YY_1 en XX_1 trekt, daarna op de lijn XX_1 voor eene willekeurige eenheid uit O lijnen uitzet, die willekeurige waarden voorstellen van x, doch waarvan de positieve rechts, de negatieve links van O uitgezet worden; vervolgens door die punten A, B, C, D... lijnen trekt evenwijdig aan YY_1, dan zal eene kromme lijn de meetkundige plaats zijn van de uiteinden der lijnen, welke de overeenkomstige waarden van y, d. i. van de functie voorstellen en deze waarden zullen boven of beneden de lijn (*as*) XX_1 uitgezet moeten worden, naarmate y positief of negatief is.

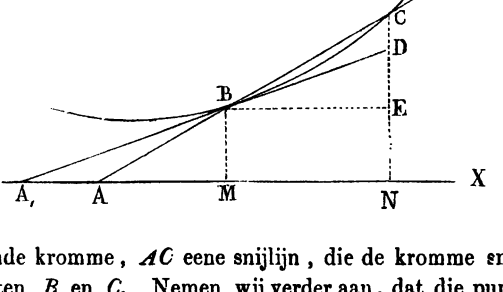
Zij verder aangenomen, dat $y = F(x)$ bovenstaande kromme voorstelt, dan wordt voor $x = OE$, $y = F(OE) = 0$; daaruit blijkt, dat deze waarde van x voldoet aan de vergelijking:

$$y = F(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots . A_n = 0,$$

derhalve is OE een wortel dier vergelijking. Om dezelfde reden zal OF zulks zijn. — In de veronderstelling, dat $y = F(x)$ continue is, zien wij tevens uit de figuur, dat wanneer y voor twee verschillende waarden van x van den positieven in den negatieven toestand overgaat, tusschen die beide waarden minstens één wortel der vergelijking moet gelegen zijn.

Men kan ook zeer gemakkelijk door middel eener figuur bewij-

zen, dat de overeenkomstige aangroeiingen van het argument en van de functie voor oneindig kleine aangroeiingen van het eerste, van de zelfde soort zijn. Zij $y = \varphi(x)$ de vergelijking der



nevensgaande kromme, AC eene snijlijn, die de kromme snijdt in de punten B en C. Nemen wij verder aan, dat die punten zeer dicht bij elkander liggen, zoodat men kan stellen:

$$BM = \varphi(x_1) \quad \text{en} \quad CN = \varphi(x_1 + \delta).$$

Terwijl dus x aangegroeid is van 0 tot $OM = x_1$, heeft y de waarde BM verkregen; groeit nu x verder aan van x_1 tot $x_1 + \delta$, dan verandert de waarde van y in CN, zoodat, de aangroeiing van de functie, overeenstemmende met de aangroeiing van x_1 tot $x_1 + \delta$, voorstellende door ε, $MN = \delta$ en $EC = \varepsilon$ is. Stelt men *hoek* $CBE = \alpha$, dan is ook *hoek* $BAM = \alpha$ en indien men de punten C en B meer en meer tot elkander doet naderen, zoodat de snijlijn eindelijk twee op elkander volgende punten der kromme vereenigt en dus eene raaklijn wordt, zal de *hoek* BAM wel veranderen, maar steeds eene eindige waarde behouden, zoodat hij eindelijk zal overgaan in hoek $BA_1M = \beta$.

Nu is in *drieh.* CBE: $\quad CE = BE \operatorname{tang} CBE$

$$\text{of} \quad \varepsilon = \delta \operatorname{tang} \alpha \qquad \text{of} \qquad \frac{\varepsilon}{\delta} = \operatorname{tang} \alpha.$$

Laten wij nu AC om het punt B op de beschreven wijs draaien, of met andere woorden: nemen wij de grenzen, waartoe ε en δ naderen kunnen, dan vinden wij

$$\lim \frac{\varepsilon}{\delta} = \operatorname{tang} \beta;$$

d. i. tusschen ε en δ, hoe klein ook genomen, bestaat altijd

eene eindige verhouding: zij zijn dus oneindig kleinen van denzelfden rang (§ 10, 1).

Is in bovenstaand betoog β oneindig klein, d. i. loopt A_1D evenwijdig met OX, dan is s eene oneindig kleine ten opzichte van δ; is $\beta = 90°$, dan is δ eene oneindig kleine ten opzichte van s. In deze gevallen is de stelling dus niet bewezen. Zij kunnen zich echter slechts voor bijzondere waarden van x voordoen; want loopen alle raaklijnen eener kromme evenwijdig met XX_1 of met YY_1, dan is die kromme zelve eene rechte, wier vergelijking uitgedrukt wordt door $y = p$ of $x = q$, vergelijkingen, waarin noch y noch x functiën zijn.

Uit de eerste figuur blijkt nog ten duidelijkste, dat men evenzeer als men x als argument heeft aangenomen, zulks ook met y kan doen; voor $y = F(x)$ kan men dus ook schrijven $x = f(y)$. In eene functie van x en y, d. i. in $\varphi(x,y)$ kan men één der beide elementen als onafhankelijk beschouwen.

Aanmerking. Met een en ander kan men vergelijken: *Archief der Wiskunde, Oostburg*, A. J. Bronswijk, Vijfde en volgende afl. 1867; Badon Ghyben, *Beg. der diff. en integr. rek.*; id. *Hoogere meetkunde*; Schlömilch, *Handbuch der Diff. und Int. Rechn.* — Bertrand. *Calcul diff.* en anderen.

6. In mijne *Theorie der Alg. rek.* § 4, is gezegd, wat men te verstaan heeft door eene karakteristieke bepaling; nauw verwant daarmede is eene *karakteriseerende* eigenschap, zijnde eene zoodanige eigenschap, die slechts aan één voorwerp, aan één begrip, aan ééne relatie toekomt en haar van alle andere daarmede niet gelijksoortige voorwerpen, begrippen en relatiën onderscheidt. Zoo verstaat men door het *karakter* eener functie, die relatie, welke alleen aan de bedoelde functie en daarmede gelijksoortige toekomt en haar bovendien van alle andere functiën onderscheidt. Wij willen achtereenvolgens de karakters beschouwen van de functiën:

$$f(x) = ax, \quad f(x) = x^a, \quad f(x) = a^x \quad \text{en} \quad f(x) = \log x;$$

later zullen wij ook het karakter van andere functiën leeren kennen.

7. *Men vraagt het karakter der functie* $f(x) = ax$.

Dewijl $f(x)$ voor alle waarden van x gelijk is aan ax, moet ook $f(y) = ay$ en $f(x+y) = a(x+y)$. Daaruit volgt:

$$f(x) + f(y) = a(x+y) = f(x+y).$$

Derhalve heeft $f(x) = ax$ de eigenschap, dat

$$f(x) + f(y) = f(x+y).$$

Om nu aan te toonen, dat deze relatie werkelijk een karakter van de opgegeven functie is, blijft ons over aan te toonen, dat deze relatie ons werkelijk de $f(x) = ax$ doet terug vinden.

Indien gegeven is:

$$f(x) + f(y) = f(x+y),$$

dan is ook, indien men $x = x_1 + x_2$ neemt en $y = x_3 + x_4$

$$f(x_1+x_2) + f(x_3+x_4) = f(x_1+x_2+x_3+x_4);$$

maar $\quad f(x_1+x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

en $\quad f(x_3+x_4) = f(x_3) + f(x_4)$

zijnde, zal men daarvoor ook kunnen schrijven:

$$f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) = f(x_1+x_2+x_3+x_4).$$

Dewijl wij zoodanige handelwijze zoo dikwijls kunnen herhalen, als ons goeddunkt, en x_1, x_2, x_3, x_4 willekeurig zijn, kunnen wij ze aan elkander gelijk stellen, zoodat men hun aantal door m voorstellende, heeft:

$$m \times f(x_1) = f(mx_1),$$

waarin m wederom een veranderlijk getal is, doch alleen geheele positieve waarden voor kan stellen.

Onder gelijke voorwaarden zal men ook hebben:

$$n \times f(x_1) = f(nx_1),$$

en dus door deeling

$$\frac{m}{n} = \frac{f(mx_1)}{f(nx_1)},$$

waarin $\frac{m}{n}$ alle mogelijke positieve geheele en gebroken getallen voorstelt; stellen wij dus $\frac{m}{n} = z$, waardoor $m = nz$ wordt, dan gaat de laatste vergelijking over in:

$$z = \frac{f(nx_1 z)}{f(nx_1)},$$

of $$z f(nx_1) = f(nx_1 z);$$

waarin z, n en x_1 veranderlijke grootheden voorstellen: voor x_1 mogen geheel willekeurige waarden, voor n kunnen alleen positieve geheele getallen en voor z mogen alle waarden genomen worden, die voldoen aan de vergelijking:

$$z = \frac{m}{n}, \text{ mits ook } m \text{ positief geheel zij.}$$

Nemen wij nu nx_1 achtereenvolgens $= a, b, c, d$, dan gaat de laatste relatie over in:

$$z f(a) = f(az), \; z f(b) = f(bz), \; z f(c) = f(cz), \text{ enz.,}$$

waarin a, b, c enz. standvastig zijn. Stellen wij dus nog $f(a) = a_1$, $f(b) = b_1$, $f(c) = c_1$ enz., en verder $az = y_1$, dan is $z = \frac{y_1}{a}$, $f(y_1) = \frac{y_1}{a} f(a)$;

en omdat $\frac{1}{a} f(a)$ eene standvastige is:

$$f(y_1) = \alpha y_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I)$$

Deze vergelijking toont aan, dat de bovengevonden eigenschap der functie een karakter is, in 't geval y_1 positief is. Intusschen kan y_1 ook negatief zijn, want stelt men in de relatie

$$f(x) + f(y) = f(x + y)$$

$x = y_1$ en $y = -y_1$, dan is $f(y_1) + f(-y_1) = f(0)$,

$$\text{dus } f(-y_1) = f(0) - f(y_1).$$

Maar volgens (I) is $f(0) = 0$, derhalve $f(-y_1) = -f(y_1) = -\alpha y_1$.

8. *Welk is het karakter der functie $f(x) = x^a$?*

Omdat $f(x) = x^a$, moet ook $f(y) = y^a$ en $f(xy) = (xy)^a$.

Nu is $f(x) \times f(y) = x^a \times y^a = (xy)^a = f(xy)$,

zoodat het eene eigenschap der opgegeven functie is, dat men heeft: $$f(x) \times f(y) = f(xy).$$

Stellen wij hier in $x = x_1 \cdot x_2$, $y = x_3 \cdot x_4$,

dan is $f(x_1 \cdot x_2) \times f(x_3 \cdot x_4) = f(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4)$;

of omdat $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) \times f(x_2)$, enz.

$$f(x_1) \times f(x_2) \times f(x_3) \times f(x_4) = f(x_1 x_2 x_3 x_4).$$

Het aantal dezer factoren voorstellende door m en de factoren allen aan elkander gelijk nemende, is:

$$\left\{f(x_1)\right\}^m = f(x_1{}^m),$$

waarin m een geheel positief getal, doch overigens willekeurig is.

Eveneens is:

$$\left\{f(x_1)\right\}^n = f(x_1{}^n).$$

Uit beide vergelijkingen volgt:

$$\left\{f(x_1{}^m)\right\}^{\frac{1}{m}} = f\left\{(x_1{}^n)\right\}^{\frac{1}{n}} \quad \text{of} \quad \left\{f(x_1{}^m)\right\}^{\frac{n}{m}} = f(x_1{}^n).$$

Zij hierin $\frac{n}{m} = z$, dan stelt z elk willekeurig positief geheel of gebroken getal voor en de laatste vergelijking gaat over in:

$$\left\{f(x_1{}^m)\right\}^z = f(x_1{}^{mz}).$$

Hierin nu zijn drie veranderlijken; nemen wij nu voor twee daarvan eene willekeurige maar standvastige waarde, d. i. stellen wij bijv. $x_1{}^m = a$, dan gaat de vergelijking over in:

$$\left\{f(a)\right\}^z = f(a^z).$$

Stelt men nu verder $a^z = \varphi$ of $z = \frac{{}^e\log \varphi}{{}^e\log a}$, dan is:

$$f(a^z) = f(\varphi) = \left\{\left\{f(a)\right\}^{\frac{1}{{}^e\log a}}\right\}^{{}^e\log \varphi}.$$

Maar hierin is $\left\{f(a)\right\}^{\frac{1}{{}^e\log a}}$ eene constante, stellen wij die gelijk aan e^α, dan is $f(a^z) = f(\varphi) = e^{\alpha \log \varphi} = \varphi^\alpha$; . . (II)

waaruit blijkt, dat de gevonden eigenschap voor alle waarden van φ een karakter der opgegeven functie is.

Aanmerking. Het stellen van $x_1{}^m = a$ vermindert de algemeenheid van het bewijs volstrekt niet, want $x_1{}^m$ is willekeurig veranderlijk en men ziet duidelijk uit den loop van 't bewijs, dat alle waarden, die men daarvoor neemt, tot een zelfde resultaat leiden. Men had namelijk even goed kunnen stellen $x_1{}^m = b$, $x_1{}^m = c$, $x_1{}^m =$ enz. Eigenlijk wordt de these bewezen voor ééne constante waarde der functie; dewijl echter deze constante willekeurig is, is het bewijs algemeen. Soortgelijke aanmerking geldt ook bij N°. 7.

9. *Welk is het karakter der functie a^x?*

Dewijl gegeven is $f(x) = a^x$, is ook $f(y) = a^y$ en

$$f(x+y) = a^{x+y}.$$

Nu is verder:

$$f(x) \times f(y) = a^x \times a^y = a^{x+y} = f(x+y).$$

Om te bewijzen, dat de eigenschap $f(x) \times f(y) = f(x+y)$ een karakter is der exponentiale functie, stellen wij wederom

$$x = x_1 + x_2 \text{ en } y = x_3 + x_4;$$

daardoor vinden wij

$$f(x_1) \times f(x_2) \times f(x_3) \times f(x_4) = f(x_1 + x_2 + x_3 + x_4),$$

of, indien m en n willekeurige geheele positieve getallen voorstellen en $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 =$ enz. genomen wordt:

$$\{f(x_1)\}^m = f(mx_1), \quad \{f(x_1)\}^n = f(nx_1),$$

en daaruit:

$$\{f(nx_1)\}^{\frac{1}{n}} = f\{(mx_1)\}^{\frac{1}{m}} \text{ of } f\{(nx_1)\}^{\frac{m}{n}} = f(mx_1).$$

Door nu $\frac{m}{n} = z$ te stellen, waaraan voldaan wordt door positieve, geheele en gebroken waarden van z, is $m = nz$ en

$$\{f(nx_1)\}^z = f(nx_1 z),$$

waarin wederom drie veranderlijken voorkomen. Nemen wij voor nx_1 eene standvastige waarde, bijv. a, dan gaat de laatste vergelijking over in $\{f(a)\}^z = f(az)$.

Stellen wij hierin $az = y_1$, dan is $z = \frac{y_1}{a}$;

derhalve $\{f(a)\}^{\frac{y_1}{a}} = f(y_1)$, of

$$\left[\{f(a)\}^{\frac{1}{a}}\right]^{y_1} = f(y_1);$$

en omdat $\{f(a)\}^{\frac{1}{a}}$ standvastig is:

$$f(y_1) = \alpha^{y_1} \quad \ldots\ldots \quad \text{(III)}$$

Hierin nu is y_1 volgens de veronderstellingen altijd positief; om nu de juistheid van het karakter te bewijzen, ingeval y_1 negatief is, stellen wij $x = y_1$, $y = -y_1$, dan is:

$$f(y_1) \times f(-y_1) = f(0).$$

Maar volgens (III) is $f(0) = 1$;

derhalve is $f(-y_1) = \frac{1}{f(y_1)} = \frac{1}{\alpha^{y_1}} = \alpha^{-y_1}$.

10. *Welk is het karakter van de functie* $f(x) = \alpha \log x$.

Omdat $f(x) = \alpha \log x$, is ook $f(y) = \alpha \log y$ en $f(xy) = \alpha \log x + \alpha \log y$.

Derhalve is $f(x) + f(y) = \alpha \log x + \alpha \log y = f(xy)$.

Om te bewijzen, dat deze eigenschap der logarithmische functie inderdaad haar karakter is, stelt men hierin $x = x_1 . x_2$ en $y = x_3 . x_4$, dan vindt men $f(x_1 x_2) + f(x_3 x_4) = f(x_1 x_2 x_3 x_4)$ en daaruit:

$$f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) = f(x_1 x_2 x_3 x_4).$$

Stellen nu m en n geheele positieve getallen voor, dan is:

$$m f(x_1) = f(x_1^m) \text{ en } n f(x_1) = f(x_1^n)$$

$$\text{en } \frac{1}{n}\left\{ f(x_1^n) \right\} = \frac{1}{m}\left\{ f(x_1^m) \right\} \quad \text{of} \quad f(x_1^n) = \frac{n}{m} f(x_1^m).$$

Zij wederom $\frac{n}{m} = z$ en dus ook $n = mz$, dan is:

$$f(x_1^{mz}) = z f(x_1^m).$$

Hierin nu komen wederom drie veranderlijken; nemen wij voor x_1^m eene willekeurige constante waarde, bijv. a, dan is

$$f(a^z) = z f(a).$$

Zij verder $a^z = \varphi$, waaruit $z = \frac{\log \varphi}{\log a}$, dan heeft men:

$$f(\varphi) = \frac{\log \varphi}{\log a} \times f(a) = \frac{f(a)}{\log a} \times \log . \varphi = \alpha \log \varphi,$$

waardoor het karakter der logarithmische functie buiten twijfel is gesteld.

Aanmerking. De hiervoren behandelde karakters zijn ontleend aan CAUCHY's *Cours d'analyse.* Zij worden naar aanleiding van genoemd werk behandeld in SMAASEN's *Gronden der Hoogere Algebra.*

11. Nu wij de soorten en den aard der functiën hebben leeren kennen, is het bijna overbodig op te merken, dat het oplossen eener vergelijking

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots . A_{n-1} x + A_n = 0$$

eigenlijk niets anders beteekent, dan de waarden te bepalen van x, voor welke $f(x)$ gelijk 0 wordt.

Uit N°. 5 volgt onmiddellijk, dat deze functie tusschen twee grenzen a en b continue zal zijn, indien men voor alle waarden van x tusschen die grenzen heeft: $\lim \{f(x+\delta)-f(x)\} = 0$.

Aanmerking. Eene nog nauwkeurigere bepaling der continuiteit heeft plaats door middel der vergelijking

$$lim \{f(x+\delta)-f(x-\varepsilon)\} = 0,$$

waarin δ en ε twee oneindig kleinen voorstellen.

Men zie de verhandeling van LEJEUNE-DIRICHLET in CRELLE's *Journal*, IV, p. 157.

---

§ 21. Over het vermeerderen en verminderen van de wortels eener vergelijking. — Afgeleide functiën.

1. Even als bij de reeds behandelde vergelijkingen blijven wij ook hier aannemen, dat de functiën van x geheele en rationeele coëfficiënten hebben, dat zij dus zijn van de algemeene gedaante:

$$f(x) = Ax^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots A_{n-1}x + A_n.$$

Wanneer er nu sprake zal zijn van het opsporen der wortels van de vergelijking

$$f(x) = Ax^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots A_{n-1}x + A_n = 0,$$

dan kunnen wij op grond van het vroeger geleerde aannemen, dat $f(x)$ herleidbaar is tot de gedaante:

$$y^n + a_1y^{n-1} + a_2y^{n-2} + \ldots a_{n-1}y + a_n,$$

waarin a, a_1, a_2 .... a_n geheele rationeele getallen zijn.

2. Om de wortels eener vergelijking $f(x) = 0$ met een bepaald getal p te verminderen of te vermeerderen, behoeft men slechts eene nieuwe vergelijking $f(y) = 0$ samen te stellen zoodanig, dat $y = x \mp p$ of $x = y \pm p$. Schrijft men dus in de opgegeven vergelijking overal $y \pm p$ voor x, dan zullen de wortels der te vinden vergelijking p eenheden $\frac{\text{kleiner}}{\text{grooter}}$ zijn, dan die der opgegevene. Door deze substitutie werkelijk op de vergelijking

$$f(x) = x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots A_{n-1}x + A_n = 0$$

toe te passen, vindt men voor $x = y + p$:

$$
\begin{aligned}
f(y+p) = {} & y^n + \frac{n}{1} y^{n-1}p + \frac{n(n-1)}{1.\ 2} y^{n-2}p^2 + \ldots\ldots\ldots \frac{n(n-1)}{1.\ 2} y^2 p^{n-2} + \frac{n}{1} y\, p^{n-1} + p^n \\
& + A_1 y^{n-1} + A_1 \frac{n-1}{1} y^{n-2}p + \ldots\ldots A_1 \frac{(n-2)(n-2)}{1.\ 2} y^2 p^{n-3} + A_1 \frac{n-1}{1} y\, p^{n-2} + A_1 p^{n-1} \\
& + A_2 y^{n-2} + \ldots\ldots A_2 \frac{(n-2)(n-3)}{1.\ 2} y^2 p^{n-4} + A_2 \frac{n-2}{1} y p^{n-3} + A_2 p^{n-2} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + A_{n-2} y^2 + 2A_{n-2} yp + A_{n-2} p^2 \\
& + A_{n-1} y + A_{n-1} p \\
& + A_n
\end{aligned}
$$

Vereenigt men de termen, die in de verticale rijen staan en rangschikt men volgens de opklimmende machten van y, dan is:

$$
\left.
\begin{aligned}
f(y+p) = {} & p^n + A_1 p^{n-1} + A_2 p^{n-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A_{n-2} p^2 + A_{n-1} p + A_n \\
& + \left\{ n p^{n-1} + (n-1) A_1 p^{n-2} + (n-2) A_2 p^{n-3} + \ldots\ldots 2 A_{n-2} p + A_{n-1} \right\} y \\
& + \frac{1}{1.2} \left\{ n(n-1) p^{n-2} + (n-1)(n-2) A_1 p^{n-3} + \ldots\ldots + 2 A_{n-2} \right\} y^2 \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \frac{1}{1.2.3.\ldots.n-1} \left\{ n(n-1)\ldots.3.2.1\, p + (n-1)(n-2)\ldots.3.2.1\, A_1 \right\} y^{n-1} \\
& + y^n.
\end{aligned}
\right\} = 0.
$$

De coëfficiënten van y nagaande, ziet men daarin een zeer opmerkelijk verband: de 0de macht van y of de bekende term wordt onmiddellijk uit $f(x)$ afgeleid, door hierin p te schrijven in de plaats van x.

Vermenigvuldigt men den coëfficiënt van de machten van p met den exponent dier letter en verlaagt men dien exponent met ééne eenheid, dan vindt men den coëfficiënt van y.

Vermenigvuldigt men wederom den coëfficiënt van de machten van p met den exponent dier letter en verlaagt men daarna dien exponent met ééne eenheid, dan vindt men den coëfficiënt van $\frac{y^2}{1.2}$.

Zoo voortgaande, vindt men achtereenvolgens de coëfficiënten

van $\frac{y^3}{1.2.3}$, $\frac{y^4}{1.2.3.4}$, $\frac{y^5}{1.2\,3.4.5}$ . . . . . $\frac{y^{n-1}}{1.2.3.....(n-1)}$.

Wij zien dus, hoe de achtereenvolgende coëfficiënten van y afgeleid worden uit $f(x)$; stellen wij derhalve:

$$f(p) = p^n + A_1 p^{n-1} + A_2 p^{n-2} + \ldots\ldots A_{n-1} p + A_n$$

$$f_1(p) = np^{n-1} + (n-1)A_1 p^{n-2} + (n-2)A_2 p^{n-3} + \ldots\ldots A_{n-1}$$

$$f_2(p) = n(n-1)p^{n-2} + (n-1)(n-2)A_1 p^{n-3} + \ldots\ldots 2\,A_{n-2}$$

. . . . . .

$$f_{n-1}(p) = n(n-1)(n-2)\ldots 3\,2.1p + (n-1)(n-2)\ldots 3.2.1\,A_1$$

dan heeft men eindelijk

$$f(x) = f(y+p) = y^n + \frac{f_{n-1}(p)}{1.2\ldots n-1}y^{n-1} + \frac{f_{n-2}(p)}{1.2\ldots(n-2)}y^{n-2} + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{f_2(p)}{1.2}y^2 + \frac{f_1(p)}{1}y + f(p) = 0.$$

Door hierin voor p slechts $-p$ te schrijven, vindt men ook $f(x) = f(y-p)$.

Hierin nu noemt men $f_1(p)$, $f_2(p)$, $f_3(p)$ .... $f_{n-1}(p)$ de *afgeleide functiën* van $f(p)$ en wel de *eerste, tweede, derde*.... $(n-1)^{\text{ste}}$ afgeleide functie, wij zullen ons altijd van deze schrijfwijze bedienen, om de afgeleide functiën aan te wijzen. Is bijv.

$$\varphi\ (x) = x^3 + 7x^2 + 9x + 5$$

dan is ook:

$$\varphi_1(x) = 3x^2 + 14x + 9$$
$$\varphi_2(x) = 6x + 14$$
$$\varphi_3(x) = 6.$$

Het is duidelijk, dat de n^{de} afgeleide functie eener algebraïsche functie van den n^{den} graad, steeds eene constante is *).

---

*) Een ander zeer fraai bewijs van deze eigenschap berust daarop, dat men begint met eene bepaling van afgeleide functiën te geven. Wij stellen dus: *door eene functie en hare afgeleide functiën verstaan wij achtereenvolgens:*

$$f(x) = a + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots\ldots a_nx^n$$
$$f_1(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots\ldots na_nx^{n-1}$$
$$f_2(x) = 2a_2 + 2.3a_3x + \ldots\ldots n(n-1)\,a_nx^{n-2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_{n-1}(x) = 2.3\ldots\ldots(n-2)(n-1)a_{n-1} + 2.3\ldots\ldots na_nx$$
$$f_n(x) = 2.3.4\ldots\ldots(n-1).n.a_n.$$

Deze functiën van x, doorgaande voor alle waarden van x, gaan ook door voor $x=0$, daardoor vinden wij:

$$f(0) = a,\ f_1(0) = a_1,\ f_2(0) = 2a_2,\ f_3(0) = 2.3.a_3,$$
$$f_{n-1}(0) = 2.3.4\ldots\ldots(n-2)(n-1)\,a_{n-1},$$
$$f_n(0) = 2.3.4\ldots\ldots(n-1)\,n\,a^n;$$

derhalve:

$$f(x) = f(0) + \frac{f_1(0)}{1}x + \frac{f_2(0)}{1.2}x^2 + \frac{f_3(0)}{1.2.3}x^3 + \ldots \frac{f_{n-1}(0)}{1.2\ldots(n-1)}x^{n-1} + \frac{f_n(0)}{1.2\ldots n}x^n$$

3. De Engelsche wiskundige W. G. HORNER, van *Bath*, heeft eene methode gevonden, om de verschillende functiën van p achter elkander op eene zeer gemakkelijke wijze af te leiden.

Zij bijv. gegeven:

$$f(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots\ldots A_{n-2} x^2 + A_{n-1} x + A_n$$

en laat deze functie voor $x = y + p$ overgaan in:

Stelt men hierin $x = y + p$ en ontwikkelt men de machten van $(y+p)$, dan is:

$$\begin{aligned} f(x) = f(p+y) = f(0) &+ \frac{f_1(0)}{1} p + \frac{f_2(0)}{1.2} p^2 + \ldots\ldots\ldots \frac{f_n(0)}{1.2\ldots n} p^n \\ &+ \frac{y}{1}\left\{ f_1(0) + \frac{f_2(0)}{1} p + \ldots\ldots\ldots \frac{f_n(0)}{1\ldots(n-1)} p^{n-1} \right\} \\ &+ \frac{y^2}{1.2}\left\{ + f_2(0) + \ldots\ldots\ldots \frac{f_n(0)}{1\ldots(n-2)} p^{n-2} \right\} \\ &+ \frac{y^{n-1}}{1\ldots n-1}\left\{ f_{n-1}(0) + \frac{f_n(0)}{1} p \right\} \\ &+ \frac{y^n}{1\ldots n} f_n(0). \end{aligned}$$

Hierbij behoort men op te merken, dat de verticale rijen achtereenvolgens de ontwikkelingen zijn van $p+y$, $(p+y)^2$, $(p+y)^3$ enz. Op grond van het voorgaande kan men nu voor de laatste ontwikkeling onmiddellijk schrijven, indien men de horizontale rijen vereenigt:

$$\begin{aligned} f(x) = f(p+y) = f(p) &+ \frac{f_1(p)}{1} y + \frac{f_2(p)}{1.2} y^2 + \ldots\ldots \\ &+ \frac{f_{n-1}(p)}{1.2\ldots n-1} y^{n-1} + \frac{f_n(0)}{1\ldots n} y^n, \end{aligned}$$

waardoor wij dezelfde eigenschap bewezen hebben als in den tekst. Met opzet is hier x^n met een coëfficiënt genomen, om de algemeenheid van het bewijs nog beter te doen uitkomen.

$$f(x) = f(y+p) = y^n + \frac{f_{n-1}(p)}{1.2(n-1)}y^{n-1} + \frac{f_{n-2}(p)}{1.2(n-2)}y^{n-2} + \ldots\ldots \frac{f_2(p)}{1.2}y^2 + \frac{f_1(p)}{1}y + f(p).$$

Deelt men nu $x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots\ldots A_n$ door $x - p$ en zij de rest R, dan is:

$$f(x) = \left\{\begin{matrix} x^{n-1} + A'_1 x^{n-2} + A'_2 x^{n-3} + \ldots\ldots \\ + A'_{n-2}x + A_{n-1} \end{matrix}\right\}(x-p) + R = y\left\{ y^{n-1} + \frac{f_{n-1}(p)}{1.2.(n-1}\, y^{n-2} + \frac{f_{n-2}(p)}{1.2\ldots(n-2)}y^{n-3} + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{f_2(p)}{1.2}y + \frac{f_1(p)}{1}\right\} + f(p).$$

Deze vergelijking gaat door voor alle waarden van x, dus ook voor $x = p$; maar dan is $x - p = 0$ en $y = x - p$ ook gelijk aan 0, derhalve

$$R = f(p).$$

De beide leden der vergelijking met $R = f(p)$ verminderende en daarna door $y = x - p$ deelende, is:

$$x^{n-1} + A'_1 x^{n-2} + A'_2 x^{n-3} + \ldots\ldots + A'_{n-2}x + A_{n-1} = y^{n-1} + \frac{f_{n-1}(p)}{1.2\ldots(n-1)}y^{n-2} + \frac{f_{n-2}(p)}{1.2\ldots(n-2)}y^{n-3} +$$
$$+ \ldots\ldots \frac{f_2(p)}{1.2}y + f_1(p).$$

Het eerste lid dezer vergelijking deelende door $x - p$ en de rest $= R_1$ stellende, is:

$$\left\{ x_n^{-2} + A''_1 x^{n-3} + A'' x^{n-4} + \ldots\ldots + A''_{n-3}x + A''_{n-2} \right\}(x-p) + R_1 = y\left\{ y^{n-2} + \frac{f_{n-1}(p)}{1.2\ldots(n-1)}y^{n-3} + \right.$$
$$\left. + \frac{f_{n-2}(p)}{1.2\ldots(n-2)}y^{n-4} + \ldots\ldots \frac{f_2(p)}{1.2}\right\} y + f_1(p);$$

deze vergelijking doorgaande voor alle waarden van x, doet zulks ook voor $x = p$, derhalve wordt $y = x - p = 0$ en

$$R_1 = f_1(p).$$

De beide leden der laatste vergelijking verminderen wij met $R_1 = f_1(p)$, deelen door $x - p = y$ en vinden dan:

$$x^{n-2} + A''_1 x^{n-3} + A''_2 x^{n-4} + \ldots\ldots + A''_{n-3} x + A''_{n-2} = y^{n-2} + \frac{f_{n-1}(p)}{1.2\ldots(n-1)} y^{n-3} + \frac{f_{n-2}(p)}{1.2\ldots(n-2)} y^{n-4} + \frac{f_2(p)}{1.2}.$$

Stellen wij, dat het eerste lid, door $x - p$ gedeeld wordende, R_2 tot rest laat, dan is:

$$\left.\begin{matrix} x^{n-3} + A'''_1 x^{n-4} + A'''_2 x^{n-5} + \ldots\ldots \\ + A'''_{n-4} x + A'''_{n-3} \end{matrix}\right\} (x-p) + R_2 = y\left\{ y^{n-3} + \frac{f_{n-1}(p)}{1.2\ldots(n-1)} y^{n-4} + \frac{f_{n-2}(p)}{1.2\ldots(n-2)} y^{n-5} + \ldots\ldots \right.$$
$$\left. + \frac{f_3(p)}{1.2.3} \right\} + \frac{f_2(p)}{1.2}.$$

Deze vergelijking, doorgaande voor alle waarden van x, gaat ook door voor $x = p$; daardoor wordt $y = x - p = 0$, derhalve:

$$R_2 = \frac{f_2(p)}{1.2} \text{ enz.}$$

Men ziet hieruit gemakkelijk, hoe men door

$$f(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots\ldots A_{n-1} x + A_n,$$

door $x - p$ te deelen, het quotiënt wederom door den zelfden deeler, enz. resten vindt, die gelijk zijn aan $f(p)$, $f_1(p)$, $\frac{f_2(p)}{1.2}$, enz.

Aanmerkingen. 1. Eene zeer verkorte wijze van deelen, eveneens van HORNER afkomstig, vindt men in mijne *Theorie der Algem. Rekenk.*, I, pag. 99. Hen, die daarmede niet bekend zijn, moet ik daarheên verwijzen. Men vindt dezelfde wijze van deelen ook opgegeven in LOBATTO's *Lessen over de Hoogere Algebra.* 2e dr. pag. 23.

2. Wij hebben de methode van HORNER bewezen voor een polynomium, dat bij de hoogste macht van x de eenheid tot coëfficiënt had. Niets verandert intusschen aan het bewijs, indien wij de hoogste macht van x een willekeurig getal A tot coëfficiënt geven.

4. Wij willen ter toepassing van het geleerde een paar vormen uitwerken. Laat bijv. gegeven zijn de vergelijking

$$f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 67x - 60 = 0,$$

waarvan de wortels zijn 4, 5 en $1\frac{1}{2}$ en laat gevraagd worden deze zoo te herleiden, dat de wortels met eene eenheid verminderd worden; dan wordt $p = 1$ en men heeft dus den vorm

$$2x^3 - 21x^2 + 67x - 60$$

achtereenvolgens te deelen door $x - 1$. Om dit te doen, schrijft men de coëfficiënten slechts op, de ontbrekende termen aanvullende door nullen.

$p = 1$

$$\begin{array}{r|l} 2 - 21 + 67 - 60 & \\ \quad 2 - 19 + 48 & \\ \hline 2 - 19 + 48 & -12 = R = f(p) = f(1). \\ \quad 2 + 17 & \\ \hline 2 - 17 & +31 = R_1 = f_1(p) = f_1(1) \\ \quad 2 & \\ \hline 2 & -15 = R_2 = \frac{f_2(p)}{1.2} = \frac{f_2(1)}{1.2}. \end{array}$$

De nieuwe vergelijking zal dus zijn:

$$f(y) = y^3 - 15y^2 + 31y - 12 = 0.$$

En werkelijk zal men vinden, dat daaraan voldaan wordt door

$$y = 4, = 3, = \tfrac{1}{2}.$$

Het is niet oneigenaardig, om, ten einde de juistheid der bewerking te beproeven, eens terug te werken en te vragen, om de wortels der vergelijking

$$2y^3 - 15y^2 + 31y - 12 = 0$$

met eene eenheid te vermeerderen. De bewerking is als volgt:

$$\begin{array}{rrrrl} & 2 & -15 & +31 & -12 \\ x = -1 & & -2 & +17 & -48 \\ \hline & 2 & -17 & +48 & \mid -60 = \mathrm{R} = f(-1) \\ & & -2 & +19 & \\ \hline & 2 & -19 & \mid +67 = \mathrm{R}_1 = f_1(-1) & \\ & & -2 & & \\ \hline & 2 & \mid -21 & = \mathrm{R}_2 = \dfrac{f_2(-1)}{1.2}. & \end{array}$$

Zoodat de vergelijking overgaat in:

$$2x^3 - 21x^2 + 67x - 60 = 0,$$

zijnde de oorspronkelijke vergelijking.

Wanneer de vergelijking imaginaire wortels heeft, dan is het natuurlijk, dat alleen het reëele gedeelte a van den wortel $a \pm b\sqrt{-1}$ met het aangewezen getal verminderd of vermeerderd wordt.

Wanneer men $f(x) = 0$ deelt door $a - p$ en er kwam eene rest $\mathrm{R} = 0$, dan zou daaruit blijken, dat p een wortel was van de vergelijking $f(x) = 0$. [Verg. § 5 N°. 10].

5. Vraagstuk. *Men vraagt de wortels van de vergelijking*

$$f(x) = x^5 - 3x^4 - 81x + 243 = 0$$

te verminderen met 4. [*De wortels der opgegeven vergelijking zijn* 3, 3, — 3, $3\sqrt{-1}$, $-3\sqrt{-1}$.]

Dewijl men voor de opgegeven vergelijking ook kan schrijven:

$$x^5 - 3x^4 + 0 \,.\, x^3 + 0 \,.\, x^2 - 81x + 243,$$

komt de bewerking als volgt:

$$\begin{array}{rrrrrr} 1- & 3+ & 0 & +\ 0- & 81+243 \\ & 4+ & 4 & +16+ & 64-\ 68 \\ \hline +\ 1+ & 4 & +16- & 17 & |+175 = f(4) \\ & 4+ & 20 & +96+ & 448 \\ \hline +\ 5+ & 24 & +112+ & | & 431 = f_1(4) \\ & 4+ & 36 & +240 & \\ \hline +9+ & 60 & |+352 = & \frac{f_2(4)}{1.2} & \\ & 4+ & 52 & & \\ \hline +13 & |+112 = & \frac{f_3(4)}{1.2.3} & & \\ & 4 & & & \\ \hline |+17 = & \frac{f_4(4)}{1.2.3.4}. & & & \end{array}$$

De nieuwe vergelijking is dus:

$$y^5 + 17y^4 + 112y^3 + 352y^2 + 431y + 175 = 0,$$

waarvan de wortels zijn:

$$-7, -1, -1, -4 + 3\sqrt{-1}, -4 - 3\sqrt{-1}.$$

Aanmerking. Het valt gemakkelijk in het oog, dat bo venstaande bewerking nog eenige bekorting toelaat, doo de rijen der getallen weg te laten, die het product van en den coëfficiënt des voorgaanden terms vertegenwoordigen. Heeft men bijv. de wortels der vergelijking

$$2x^4 + 7x^3 - 3x^2 - 5x + 9 = 0$$

te vermeerderen met 5, dan komt de verkorte bewerking aldus:

$$\begin{array}{rrrrrr} & 2+ & 7- & 3- & 5 & +9 \\ p = -5 & & -3+ & 12- & 65 & |+334 \\ & & -13+ & 77 & |-450 & \\ & & -23 & |+192 & & \\ & & |-33 & & & \end{array}$$

zoodat de vergelijking overgaat in:

$$2y^4 - 33y^3 + 192y^2 - 450y + 334 = 0.$$

Een paar andere verkortingen, door andere schrijvers medegedeeld, acht ik van zoo weinig belang, dat ik ze slechts stilzwijgend voorbijga.

[illegible] toepassing van deze methode bestaat in het verdrijven des tweeden terms uit het behoorlijk gerangschikte eerste lid eener vergelijking. Nemen wij bijv. de algemeene 4de-machtsvergelijking

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0,$$

en verminderen wij hare wortels met p, dan vindt men

$$\begin{array}{lllll}
1 + A + B & & + C & & + D \\
\underline{p} & \underline{Ap + p^2} & \underline{Bp + Ap^2 + p^3} & \underline{Cp + Bp^2 + Ap^3 + p^4} \\
A + p, & B + Ap + p^2, & C + Bp + Ap^2 + p^3 & D + Cp + Bp^2 + Ap^3 + p^4 \\
\underline{p} & \underline{Ap + 2p^2} & \underline{Bp + 2Ap^2 + 3p^3} & \\
A + 2p & B + 2Ap + 3p^2 & C + 2Bp + 3Ap^2 + 4p^3 & \\
\underline{p}, & \underline{Ap + 3p^2} & & \\
A + 3p & B + 3Ap + 6p^2 & & \\
\underline{p} & & & \\
A + 4p & & &
\end{array}$$

Wil men nu, dat uit de nieuwe vergelijking de tweede term verdreven worde, dan stelt men

$$A + 4p = 0 \text{ of } p = -\frac{A}{4}.$$

Door eene soortgelijke redeneering zal men voor eene $n$demachtsvergelijking in het algemeen vinden:

$$p = -\frac{A}{n},$$

waarin A den coëfficiënt van den tweeden term voorstelt, mits de eerste term de eenheid tot coëfficiënt hebbe.

Wil men den derden term verdrijven, dan stelle men:

$$B + 3Ap + 6p^2 = 0.$$

De waarden voor p, die aan deze vergelijking voldoen, len den derden term uit de nieuwe vergelijking verdrijv mits men ook hier wederom in aanmerking neme, dat de ee term de eenheid tot coëfficiënt moet hebben.

Onder dezelfde voorwaarden zal men den vierden term v drijven, indien men stelt

$$C + 2Bp + 3Ap^2 + 4p^3 = 0,$$

en eene der drie waarden van p in de nieuwe vergelijking ov brengt, enz.

Zoo voortgaande, kan men elken term uit eene gegeven v gelijking verdrijven, indien men waarden voor p kan vinde die voldoen aan de achtereenvolgende vergelijkingen:

$$f_{n-1}(p) = 0,\ f_{n-2}(p) = 0.....$$
$$f_2(p) = 0,\ f_1(p) = 0,\ f(p) = 0.$$

Hierbij zal men intusschen vaak stuiten op de zwarigheid dat men hoogere machtsvergelijkingen niet altijd kan oplo sen. Bovendien is de toepassing dezer eigenschap voor de ver drijving van den 3den en volgenden term van weinig prac tisch nut.

Ter toepassing worde gevraagd den tweeden term te verdrij ven uit de vergelijking:

$$x^5 + 10x^4 + 3x + 7 = 0.$$

Daartoe stellen wij $p = -\frac{10}{5} = -2$ en hebben dan d volgende bewerking:

1	+ 10	+ 0	+ 0	+ 3	+ 7	
	+ 8	− 16	+ 32	− 61	+ 129	
	+ 6	− 28	+ 88	− 237		
	+ 4	− 36	+ 160			
	+ 2	− 40				
	0					

De afgeleide vergelijking wordt derhalve:

$$y^5 - 40y^3 + 160y^2 - 237y + 129 = 0.$$

7. Den voorlaatsten term eener vergelijking kan men doo toepassing dezer methode eveneens gemakkelijk verdrijven. Laa bijv. gevraagd worden den voorlaatsten term te verdrijven uit de vergelijking van het vorige N°.

Om zulks te doen; stellen wij $x = \frac{1}{y}$ (zie §5, N°. 22) en vinden dan

of $$y^5 + \tfrac{3}{7}y^4 + \tfrac{10}{7}y + \tfrac{1}{7} = 0,$$

d. i.: na vermenigvuldiging met de reeks 1, 7, 49, 343 enz.

$$z^5 + 3z^4 + 3430z + 2401 = 0.$$

Stellen wij hierin $p = -\frac{3}{5}$, dan zal men door de volgende bewerking eene vergelijking in u krijgen, waarin de tweede term ontbreekt:

	$1 + 3$	$+ 0$	$+ 0$	$+ 3420$	$+ 2401$
$p = -\frac{3}{5}$	$- \frac{3}{5}$	$- \frac{36}{25}$	$+ \frac{108}{125}$	$- \frac{2214}{625}$	$- \frac{6430278}{3125}$
	$+ \frac{12}{5}$	$- \frac{36}{25}$	$+ \frac{108}{125}$	$+ \frac{2143426}{625}$	$+ \frac{10728247}{3125}$
	$- 3$	$- 63$	$+ 189$	$- 891$	
	$+ 9$	$- 63$	$+ 297$	$+ \frac{2142535}{625}$	
	$- 3$	$- 18$	$+ 243$		
	$+ 6$	$- 81$	$+ \frac{5140}{125}$		
	$- 3$	$- 9$			
	$+ 3$	$- \frac{90}{25}$			
	$- 3$				

De vergelijking in u is derhalve:

$$u^5 - \tfrac{90}{25}u^3 + \tfrac{5140}{125}u^2 + \tfrac{2142535}{625}u + \tfrac{10728247}{3125} = 0;$$

na vermenigvuldiging met de reeks 1, 5, 25, enz.

$$\varphi^5 - 90\varphi^3 + 540\varphi^2 + 2142535\varphi + 1072847 = 0.$$

Stellen wij nu eindelijk $\varphi = \frac{1}{\omega}$, dan gaat deze laatste vergelijking over in

$$1072847\omega^5 + 2142535\omega^4 + 540\omega^3 - 90\omega^2 + 1 = 0,$$

welke laatste vergelijking nu de voorlaatste term verdreven is.

Het valt van zelf in 't oog, dat wij de bewerking verkort zouden hebben, indien wij niet telkens de getallencoëfficiënten tot geheele getallen hadden herleid. Voor eene volgende bewerking blijft zoodanige handelwijze aan te bevelen.

Het zal intusschen niet moeilijk zijn het verband op te sporen tusschen de wortels der opgegeven vergelijking $f(x) = 0$ en die der vergelijking $f(\omega) = 0$; daartoe heeft men namelijk de volgende relaties:

$$\varphi = \frac{1}{\omega},\ u = \tfrac{1}{5}\varphi,\ z = u - \tfrac{1}{5},\ y = \frac{z}{7},\ x = \frac{1}{y}.$$

8. Stelling. *Indien gegeven is* $\varphi(x) = \mathrm{P}f(x)$, *dan is ook* $\varphi_1(x) = \mathrm{P}f_1(x)$.

Bewijs. Zij $f(x) = \mathrm{A}x^n + \mathrm{A}_1 x^{n-1} + \ldots \mathrm{A}_{n-1}x + \mathrm{A}_n$,

dan is $\varphi(x) = \mathrm{AP}x^n + \mathrm{A}_1\mathrm{P}x^{n-1} + \ldots \mathrm{A}_{n-1}\mathrm{P}x + \mathrm{A}_n\mathrm{P}$;

dus: $\varphi_1(x) = n\mathrm{AP}x^{n-1} + (n-1)\,\mathrm{A}_1\mathrm{P}x^{n-2} + \ldots \mathrm{A}_{n-1}\mathrm{P} =$

$= \mathrm{P}(n\mathrm{A}x^{n-1} + (n-1)\,\mathrm{A}_1 x^{n-2} + \ldots . \mathrm{A}_{n-1}) = \mathrm{P}f_1(x)$.

9. Stelling. *Indien gegeven is* $f(x) + \varphi(x) = \psi(x)$, *dan is ook* $f_1(x) + \varphi_1(x) = \psi_1(x)$.

Bewijs. Zij $f(x) = ax^n + a_1x^{n-1} + \ldots . a_{n-1}x + a_n$,

en $\varphi(x) = \alpha x^\nu + \alpha_1 x^{\nu-1} + \ldots . \alpha_{\nu-1}x + \alpha_\nu$;

dan is $\psi(x) = ax^n + a_1x^{n-1} + \ldots . (a_k + \alpha_k)x^k +$

$+ \ldots . (a_{n-1} + \alpha_{\nu-1})x + a_n + \alpha_\nu$

en $\psi_1(x) = nax^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \ldots k(a_k + \alpha_k)x^{k-1} +$

$+ \ldots . a_{n-1} + \alpha_{\nu-1}$

altijd in de veronderstelling, dat $n > \nu$.

Hieruit volgt nu onmiddellijk:

$$\psi_1(x) = nax^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \ldots . 2na_{n-2}x + a_{n-1}$$
$$+ \nu\alpha x^{\nu-1} + (\nu-1)\alpha_1 x^{\nu-2} + \ldots . 2\nu\alpha_{\nu-2}x + \alpha_{\nu-1}$$
$$= f_1(x) + \varphi_1(x).$$

10. Stelling. *Indien men veronderstelt, dat* $\psi(x) = f(x) - \varphi(x)$, *dan is ook* $\psi_1(x) = f_1(x) - \varphi_1(x)$.

Bewijs. Indien $\psi(x) = f(x) - \varphi(x)$, dan is ook $\psi(x) = f(x) + (-1)\times\varphi(x)$; en volgens N°. 8 en 9 is dan ook

$$\psi_1(x) = f_1(x) + (-1)\varphi_1(x) = f_1(x) - \varphi_1(x).$$

11. Stelling. *Indien men aanneemt, dat* $\varphi(x) = x^m f(x)$, *dan is ook* $\varphi_1(x) = mx^{m-1} f(x) + x^m f_1(x)$.

Bewijs. Zij $f(x) = ax^n + a_1 x^{n-1} + \ldots . a_{n-1} x + a_n$,

dan is $\varphi(x) = ax^{m+n} + a_1 x^{m+n-1} + a_2 x^{m+n-2} + \ldots \ldots$
$+ a_{n-1} x^{m+1} + a_n x^m$;

dus $\varphi_1(x) = (m+n)ax^{m+n-1} + (m+n-1)a_1 x^{m+n-2} +$
$+ \ldots . (m+1)a_{n-1} x^m + ma_n x^{m-1}$
$= mx^{m-1}(ax^n + a_1 x^{n-1} + \ldots . a_{n-1} x + a_n) +$
$+ x^m (nax^{n-1} + (n-1)a_1 x^{n-2} + \ldots \ldots a_{n-1})$
$= mx^{m-1} f(x) + x^m f_1(x)$.

Hieruit volgt nog onmiddellijk, dat voor

$$\varphi(x) = Px^m f(x),$$

men ook hebben zal:

$$\varphi_1 x = P_m x^{m-1} f(x) + Px^m f_1(x).$$

12. Stelling. *Indien gegeven is, dat* $\psi(x)$ *gelijk is aan het product der functiën* $f(x)$ *en* $\varphi(x)$, *dan is ook*

$$\psi_1(x) = f(x)\, \varphi_1(x) + \varphi(x) f_1(x).$$

Bewijs. Zij gegeven:

$f(x) = ax^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots . a_{n-1} x + a_n$,

dan is

$\varphi(x) = ax^n \varphi(x) + a_1 x^{n-1} \varphi(x) + a_2 x^{n-2} \varphi(x) + \ldots a_{n-1} x \varphi(x) + a_n \varphi(x)$;

en volgens de voorgaande n°'s:

$$\begin{aligned}
\psi_1(x) &= nax^{n-1}\, \varphi(x) + ax^n \varphi_1(x) \\
&+ (n-1)a_1 x^{n-2} \varphi(x) + a_1 x^{n-1} \varphi_1(x) \\
&+ (n-2)a_2 x^{n-3} \varphi(x) + a_2 x^{n-2} \varphi_1(x) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ a_{n-1}\, \varphi(x) + a_{n-1} x\, \varphi_1(x) \\
&+ a_n\, \varphi_1(x).
\end{aligned}$$

Neemt men nu de som van de verticale rijen van het tweede lid dezer vergelijking, dan vindt men:

$$\psi_1(x) = \left\{nax^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + (n-2)a_2x^{n-3} + \ldots a_{n-1}\right\}\varphi(x)$$
$$+ \left\{ax^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots\ldots a_{n-1}x + a_n\right\}\varphi_1(x)$$
$$= f_1(x)\,\varphi(x) + f(x)\,\varphi_1(x).$$

Stelt men in de laatste uitkomst $f(x) = \chi(x) \times \omega(x)$, dan heeft men, omdat

$$\psi(x) = \varphi(x) \times \chi(x) \times \omega(x)$$
$$\text{en } f_1(x) = \chi(x)\,\omega_1(x) + \omega(x)\,\chi_1(x),$$

ook

$$\psi_1(x) = \chi(x)\,\omega(x)\,\varphi_1(x) + \varphi(x)\,\chi(x)\,\omega_1(x) + \varphi(x)\,\omega(x)\,\chi_1(x);$$

door $\varphi(x)$ gelijk te nemen aan $\Phi(x)\,\Psi(x)$, zal men eveneens vinden:

$$\psi_1(x) = \chi(x)\,\omega(x)\,\Phi(x)\,\Psi_1(x) + \chi(x)\,\omega(x)\,\Psi(x)\,\Phi_1(x) +$$
$$+ \chi(x)\,\Psi(x)\,\Phi(x)\,\omega_1(x) + \omega(x)\,\Psi(x)\,\Phi(x)\,\chi_1(x),$$

enz. enz.

Door hierin $\chi(x) = \omega(x) = \Psi(x) = \Phi(x)$ te stellen, vinden wij $\psi(x) = \left\{\chi(x)\right\}^4$

en $$\psi_1(x) = 4\left\{\chi(x)\right\}^3\,\chi_1(x);$$

waaruit gemakkelijk wordt afgeleid, dat men in 't algemeen heeft, indien

$$\psi(x) = \left\{\varphi(x)\right\}^n,$$

ook $$\psi_1(x) = n\left\{\varphi(x)\right\}^{n-1}\varphi_1(x).$$

Neemt men hierin nog $n = \frac{1}{m}$, dan heeft men:

$$\psi(x) = \left\{\varphi(x)\right\}^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{\left\{\varphi(x)\right\}};$$

want dan is $\varphi(x) = \left\{\psi(x)\right\}^m$ en $\varphi_1(x) = m\left\{\psi(x)\right\}^{m-1}\psi_1(x)$

en dus: $$\psi_1(x) = \frac{1}{m}\left\{\varphi(x)\right\}^{\frac{1}{m}-1}\varphi_1(x),$$

of na behoorlijke herleiding:

$$\psi_1(x) = \frac{1}{m\sqrt[m]{\left\{\varphi(x)\right\}^{m-1}}}\,\varphi_1(x).$$

Deze stellingen kunnen ook gemakkelijk bewezen worden door het binomium van NEWTON.

13. Stelling. *Indien gegeven is, dat* $\psi(x)$ *gelijk is aan het quotiënt van* $f(x)$ *en* $\varphi(x)$, *dan zal men ook hebben:*

$$\psi_1(x) = \frac{\varphi(x).f_1(x) - f(x).\varphi_1(x)}{\{\varphi(x)\}^2}.$$

Bewijs. Want volgens de veronderstelling heeft men:

$$\psi(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)} \quad \text{of} \quad f(x) = \psi(x).\varphi(x),$$

d.i. $f_1(x) = \psi(x)\,\varphi_1(x) + \varphi(x).\psi_1(x)$,

dus $f_1(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)} \times \varphi_1(x) + \varphi(x).\psi_1(x)$,

of $\{\varphi(x)\}^2 \times \psi_1(x) = f_1(x) \times \varphi(x) - f(x) \times \varphi_1(x)$;

d.i. eindelijk $\psi_1(x) = \frac{\varphi(x).f_1(x) - f(x).\varphi_1(x)}{\{\varphi(x)\}^2}$.

14. Stelling. *Indien gegeven is:*

$y = f(x) = Ax^n + A_1x^{n+1} + A_2x^{n+2} + \ldots A_kx^{n+k}$,

dan kan men aan x *altijd zoodanige waarde geven, dat het teeken der functie, d. i. van* y, *hetzelfde is als dat van* Ax^n *of als dat van* A_kx^{n+k}.

Bewijs. 1°. Dat het teeken van y hetzelfde kan zijn, als dat van Ax^n.

Wanneer wij de absolute waarden van A, A_1, A_2 enz. voorstellen door a, a_1 enz., ξ eene zekere waarde is van x en a_g de grootste der coëfficiënten a, a_1, enz., dan is voor het geval, dat k niet 0 is, $\xi < 1$, wanneer men neemt

$$\xi < \frac{a}{ka_g}.$$

Maar dewijl $\frac{a}{ka_1}$, $\frac{a}{ka_2}$, $\frac{a}{ka_3} \ldots\ldots \frac{a}{ka_k}$,

allen grooter zijn dan $\frac{a}{ka_g}$, is zoo veel te meer

$$\xi < \frac{a}{ka_1}, \quad \xi < \frac{a}{ka_2}, \quad \xi < \frac{a}{ka_3} \ldots\ldots \xi < \frac{a}{ka_k};$$

dus ook:

$$a_1\xi < \frac{a}{k}, \quad a_2\xi < \frac{a}{k}, \quad a_3\xi < \frac{a}{k} \ldots\ldots a_k\xi < \frac{a}{k};$$

en omdat $\xi < 1$ is:

$$a_1\xi < \frac{a}{k},\ a_2\xi^2 < \frac{a}{k},\ a_3\xi^3 < \frac{a}{k} \ldots\ldots a_k\xi^k < \frac{a}{k};$$

waaruit door optelling volgt:

$$a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + a_4\xi^4 + \ldots\ldots a_{k-1}\xi^{k-1} + a_k\xi^k < a$$

Vermenigvuldigen wij beide leden dezer ongelijkheid met ξ^n, dan is:

$$a_1\xi^{n+1} + a_2\xi^{n+2} + a_3\xi^{n+3} + \ldots a_{k-1}\xi^{k+n-1} + a_k\xi^{n+k} < a\xi^n$$

waaruit ons dus blijkt, dat voor x eene waarde ξ genomen kan worden zoodanig, dat

$$Ax^n > A_1x^{n+1} + A_2x^{n+2} + \ldots\ldots + A_kx^{n+k};$$

zoodat het teeken van de geheele functie alleen afhangt van den term Ax^n.

2° Dat het teeken van y hetzelfde kan zijn, als dat van A_kx^{n+k}.

Voor $y = f(x) = Ax^n + A_1x^{n+1} + A_2x^{n+2} + \ldots\ldots$

$$A_{k-1}x^{n+k-1} + A_kx^{n+k}$$

kan men ook schrijven:

$$x^{n+k}\left(A_k + \frac{A_{k-1}}{x} + \ldots\ldots \frac{A_2}{x^{k-2}} + \frac{A_1}{x^{k-1}} + \frac{A}{x^k}\right).$$

Nu kan men hierin aan $\frac{1}{x}$ zoodanige kleine waarde geven, dat het teeken van

$$\varphi(x) = A_k + \frac{A_{k-1}}{x} + \ldots\ldots \frac{A_2}{x^{k-2}} + \frac{A_1}{x^{k-1}} + \frac{A}{x^k}$$

slechts afhangt van den eersten term A_k. Daardoor krijgt x zelf eene groote waarde en zal het teeken van de geheele functie $f(x)$ afhangen van den term A_kx^{n+k}.

15. Indien men eenige geheele rationeele algebraïsche functiën heeft:

$$y_1 = f(x) = ax^n + a_1x^{n+1} + a_2x^{n+2} + \ldots\ldots a_kx^{n+k}$$

$$y_2 = f'(x) = \alpha x^m + \alpha_1x^{m+1} + \alpha_2x^{m+2} + \ldots\ldots \alpha_lx^{m+l}$$

$$y_3 = f''(x) = Ax^\mu + A_1x^{\mu+1} + A_2x^{\mu+2} + \ldots A_\rho x^{\mu+\rho},$$

dan volgt uit N°. 14, dat men aan x altijd zoodanige waarde kan geven, dat de teekens van y_1, y_2, y_3 slechts afhangen van de eerste termen

$$ax^n,\ ax^m,\ Ax^\mu,\ \ldots\ldots$$

Wordt nu in 't vervolg eene functie gelijk gesteld aan haren eersten term, dan wil dit zeggen, dat aan x zoodanige waarde gegeven is, dat het teeken der functie overeen moet komen met het teeken van den eersten term. Duidelijkshalve en om alle verwarring te voorkomen, zullen wij dat voorstellen door

$$f[x] = ax^n \ldots.;\ f'[x] = ax^m \ldots..;\ f''[x] = Ax^\mu \ldots..$$

Gelijke schrijfwijze zullen wij ook bezigen, wanneer de geheele functie in teeken moet overeenkomen met haren laatsten term.

16. In N°. 2 dezer § vonden wij:

$$(y+p) = y^n + \frac{f_{n-1}(p)}{1.2\,3\,..n-1}y^{n-1} + \frac{f_{n-2}(p)}{1\,2\,3\,..n-2}y^{n-2} + \ldots..$$

$$\frac{f_2(p)}{1.2}y^2 + \frac{f_1(p)}{1}y + f(p),$$

welke doorgaat voor alle mogelijke waarden van y en van p. Neem ik dus $p = x$ en $y = \delta$, dan gaat de functie over in:

$$f(x+\delta) = f(x) + \frac{\delta}{1}f_1(x) + \frac{\delta^2}{1.2}f_2(x) + \ldots..$$

$$\frac{\delta^{n-1}}{1.2\ldots.n-1}f_{n-1}(x) + \delta^n.$$

Geeft men hierin aan x eene bepaalde waarde a en stelt δ een oneindig kleine voor, dan zal het teeken van de functie

$$f(a) + \frac{\delta}{1}f_1(a) + \frac{\delta^2}{1\,2}f_2(a) + \ldots.. a^n$$

slechts afhangen van den eersten term, zoodat men op grond van het vorige N°. ook kan schrijven

$$f[a+\delta] = f(a) + \delta f_1(a) \ldots..$$

Uit welke vergelijking wij de volgende merkwaardige relatiën afleiden.

A. Wanneer $f_1(a)$ positief is, zal $f(x)$, in de nabijheid van $x = a$, met x te gelijk toe- of afnemen.

B. Is $f_1(a)$ daarentegen negatief en $f(x)$ gelijk aan $f(a)$, dan zal $f(x)$ afnemen, indien x toeneemt en omgekeerd.

C. Blijft $f_1(x)$ tusschen de grenzen $x = a$ en $x = b$, waarin $b > a$, steeds positief, dan zal $f(x)$ steeds aangroeien, wanneer x aangroeit van a tot b.

D. Is $f_1(x)$ tusschen dezelfde grenzen steeds negatief, dan zal eene voortdurende aangroeiing van x een voortdurend afnemen van $f(x)$ ten gevolge hebben.

E. Verandert het teeken van $f_1(x)$ tusschen de grenzen $x = a$ en $x = b$, dan zal $f(x)$ tusschen die grenzen nu eens toe-, dan eens afnemen.

17. Stelling. *Wanneer de vergelijking $f(x) = 0$, k gelijke wortels a heeft, dan heeft de vergelijking $f_1(x) = 0$, $k - 1$ gelijke wortels a, de vergelijking $f_2(x) = 0$, $k - 2$ gelijke wortels a, enz.*

Bewijs. Dewijl $f(x) = 0$, k gelijke wortels a heeft, kan men schrijven

$$f(x) = (x - a)^k \varphi(x),$$

en op grond van N°. 12:

$$f_1(x) = (x - a)^k \varphi_1(x) + k(x - a)^{k-1} \varphi(x)$$
$$= (x - a)^{k-1} \left\{(x - a)\varphi_1(x) + k\,\varphi(x)\right\}.$$

Hieruit ziet men onmiddellijk, dat $f_1(x) = 0$ minstens $k - 1$ gelijke wortels a heeft. Hadde de vergelijking k wortels a, dan zou

$$(x - a)\,\varphi_1(x) + k\,\varphi(x)$$

door $x - a$ moeten gedeeld kunnen worden zonder overschot te laten (§ 5), 't geen onmogelijk is, omdat noch $k = 0$, noch $\varphi(x)$ deelbaar is door $x - a$.

Dewijl nu $f_2(x)$ op eene zelfde wijze van $f_1(x)$ afhangt, als $f_1(x)$ van $f(x)$, zal, indien $f_1(x) = 0$, $k - 1$ gelijke wortels a heeft, $f_2(x) = 0$ slechts $k - 2$ dergelijke wortels hebben.

Heeft dus eene $f(x) = 0$ drie gelijke wortels a, dan heeft $f_1(x) = 0$ twee, $f_2(x) = 0$ één dier wortels tot wortel; e. o. indien $f_2(x)$ tegelijk met $f_1(x)$ en $f(x)$ voor $x = a$ verdwijnt, dan heeft $f(x)$ minstens drie gelijke wortels $x = a$; wordt $f_2(x)$ voor $x = a$ geen 0, dan heeft $f(x)$ juist drie gelijke wortels. Wil men dus beproeven of een gevonden wortel a soms meermalen

voorkomt, dan hebbe men de wortels x slechts met a te verminderen. Komt a twee malen voor als wortel der vergelijking $f(x)=0$, dan wordt $f_1(x)=0$, komt a drie malen voor, dan wordt ook $f_2(x)=0$, komt a vier malen voor, dan wordt ook $f_3(x)=0$, enz.

Zij ter toepassing gegeven

$$f(x) = 2x^4 - 9x^3 + 6x^2 + 20x - 24 = 0$$

en wete men, dat daarvan $x = 2$ een wortel is. Vermindert men nu de wortels der vergelijking met 2, dan vindt men:

$p = 2$

	$2 - 9 + 6 + 20 - 24$	
	$-5 - 4 + 12$	$\lfloor 0$
	$-1 - 6$	$\lfloor 0$
	$+3$	$\lfloor 0$
	$+7.$	

De functie van $(x-2)=y$ is derhalve $2y^4 + 7y^3 = 0$.

Dewijl $f_2(2)=0$ is, heeft de opgegeven vergelijking, blijkens het voorgaande, drie gelijke wortels 2. Men kan zulks ook uit de afgeleide functie van y zien, want de vergelijking

$$2y^4 + 7y^3 = y^3(2y+7) = 0$$

heeft drie gelijke wortels $y = 0$; maar $y = x - 2$, derhalve heeft de oorspronkelijke vergelijking $f(x)=0$ drie gelijke wortels $x=2$.

Aanmerking. HUDDE d'Amsterdam a découvert les propriétés des racines égales. FOURRIER, *Anal. des équat. déterminées*, pag. 9. Regulam hanc primus tradidit HUDDENIUS in epistola II ad SCHOTENIUM. NEWTON's *Arithm. univ.* cum comm. CASTILLIONEI. P. II, pag. 133. CARTESII *Geometria* 1683, pag. 507.

18. Stelling. *Stellen α en γ de kleinste en de grootste waarden voor, die de functie*

$$\frac{f_1(x)}{nx^{n-1}}$$

kan verkrijgen, wanneer zij tusschen de grenzen 0 *en a continue verandert; laat verder $f(x)$ voor $x=0$ nul worden, dan is*

$$\frac{f(a)}{a^n} \text{ eene } {}^{\mu}(\alpha, \gamma).$$

Bewijs. Laat δ wederom eene positieve oneindig kleine voorstellen, dan is, wanneer wij $\alpha - \delta = \alpha'$ en $\gamma + \delta = \gamma'$ stellen, voor iedere waarde van x tusschen 0 en a

$$\frac{f_1(x)}{nx^{n-1}} > \alpha' \quad \text{en} \quad \frac{f_1(x)}{nx^{n-1}} < \gamma',$$

of $$\frac{f_1(x)}{nx^{n-1}} - \alpha' > 0 \quad \text{en} \quad \frac{f_1(x)}{nx^{n-1}} - \gamma' < 0;$$

zoodat deze beide vormen binnen de bepaalde grenzen niet van tecken veranderen. Derhalve is van de grootheden

$$nx^{n-1}\left(\frac{f_1(x)}{nx^{n-1}} - \alpha'\right) \quad \text{en} \quad nx^{n-1}\left(\frac{f_1(x)}{nx^{n-1}} - \gamma'\right)$$

de eene steeds positief en de andere steeds negatief.

Beide vormen zijn echter respectievelijk de eerste afgeleide functiën van

$$f(x) - \alpha' x^n \quad \text{en} \quad f(x) - \gamma' x^n,$$

waarvan nu de eene volgens N°. 16 steeds zal toenemen, de ander steeds zal afnemen, indien x toeneemt. Dewijl echter $f(x)$, voor $x = 0$, ook nul wordt, is het duidelijk, dat ééne der beide vormen

$$f(a) - \alpha' a^n \quad \text{en} \quad f(a) - \gamma' a^n$$

grooter en ééne kleiner dan nul moet zijn.

Nu is $\frac{f(a)}{a^n} - \alpha' - \left(\frac{f(a)}{a^n} - \gamma'\right) = \gamma' - \alpha'$ en dus, omdat volgens de veronderstelling $\gamma' > \alpha'$, positief. Hieruit volgt onmiddellijk:

$$\frac{f(a)}{a^n} - \alpha' > 0 \quad \text{en} \quad \frac{f(a)}{a^n} - \gamma' < 0,$$

of $$\frac{f(a)}{a^n} > \alpha' \quad \text{en} \quad \frac{f(a)}{a^n} < \gamma';$$

dewijl nu δ in $\alpha' = \alpha - \delta$ en $\gamma' = \gamma + \delta$ zoo nabij aan nul gebracht kan worden, als men zelf verkiest, is

$$\frac{f(a)}{a^n} > \alpha \quad \text{en} \quad \frac{f(a)}{a^n} < \gamma;$$

derhalve is $\frac{f(a)}{a^n}$ eene $\mu(\alpha, \gamma)$.

Dewijl nu $\frac{f(a)}{a^n}$ eene gemiddelde waarde is tusschen de kleinste en grootste waarden van $\frac{f_1(x)}{nx^{n-1}}$ en deze functie continue verandert, moet er eene waarde van $\frac{f_1(x)}{nx^{n-1}}$ overeenkomen met $\frac{f(a)}{a^n}$; stelt men, dat zulks plaats heeft voor $x = \varrho a$, waarin ϱ een positief getal is kleiner dan 1, dan kan men schrijven:

$$\frac{f(a)}{a^n} = \frac{f_1(\varrho a)}{n(\varrho a)^{n-1}}, \text{ of algemeen: } \frac{f(x)}{x^n} = \frac{f_1(\varrho x)}{n(\varrho x)^{n-1}}.$$

Wanneer men nu door ϱ, ϱ_1, ϱ_2, ... getallen voorstelt, die allen < 1, dan heeft men, wanneer $f(x)$ en $f_1(x)$ voor $x = 0$ verdwijnen:

$$\frac{f(x)}{x^n} = \frac{f_1(\varrho x)}{n(\varrho x)^{n-1}}, \quad \frac{f_1(\varrho x)}{n(\varrho x)^{n-1}} = \frac{f_2(\varrho\varrho_1 x)}{n(n-1)(\varrho\varrho_1 x)^{n-2}},$$

$$\frac{f(x)}{x^n} = \frac{f_2(\varrho\varrho_1 x)}{n(n-1)(\varrho\varrho_1 x)^{n-2}}.$$

Wanneer $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, voor $x = 0$ verdwijnen, vindt men op dergelijke wijze:

$$\frac{f(x)}{x^n} = \frac{f_3(\varrho\varrho_1\varrho_2 x)}{n(n-1)(n-2)(\varrho\varrho_1\varrho_2 x)^{n-3}}.$$

Wanneer $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ voor $x = 0$ verdwijnen, vindt men:

$$\frac{f(x)}{x^n} = \frac{f_4(\varrho\varrho_1\varrho_2\varrho_3 x)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(\varrho\varrho_1\varrho_2\varrho_3 x)^{n-4}};$$

enz.

Zoodat men in het algemeen heeft, indien de n achtereenvolgende functiën gelijk nul worden:

$$\frac{f(x)}{x^n} = \frac{f_n(\theta x)}{n(n-1)...3.2.1},$$

waarin θ als zijnde het product van getallen < 1 zooveel te meer een getal < 1 is.

19. Alvorens tot verdere ontwikkelingen over te gaan, worde nog opgemerkt, dat $f_1(x + \delta)$, hetzij als functie van $x + \delta$

beschouwd, hetzij alleen als functie van δ, geheel dezelfde blijft. — Want zij $f(x) = a_n + a_{n-1}x + \ldots . a_1 x^{n-1} + x^n$, en stellen wij $x = x + \delta$, dan wordt:

$$f(x+\delta) = a_n + a_{n-1}(x+\delta) + \ldots . a_1 (x+\delta)^{n-1} + (x+\delta)^n.$$

Stellen wij nu hierin $x + \delta = z$, dan is

$$f_1(z) = a_{n-1} + 2a_{n-2}z + \ldots \ldots (n-1)a_1 z^{n-2} + nz^{n-1}.$$

Beschouwen wij $f(x+\delta)$ als eene functie van (δ), dan is

$$\varphi_1(\delta) = a_{n-1} + 2a_{n-2}(x+\delta) + \ldots (n-1)a_1(x+\delta)^{n-2} + n(x+\delta)^{n-1}$$

Wil men dus $\varphi_1(\delta)$ hebben, dan ontwikkelt men $f_1(x)$ en schrijft daarin $x + \delta$ in de plaats van x.

20. Stellen wij nu, dat $f(x+\delta) - f(x)$ eene functie zij van δ, dan is:

$$F(\delta) = f(x+\delta) - f(x).$$

Nemen wij hierin $\delta = 0$, dan gaat zij aanstonds over in

$$F(0) = 0;$$

derhalve is voor $n = 1$:

$$\frac{F(\delta)}{\delta} = F_1(\theta\delta). \quad \text{[Zie N°. 18]} \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

In $$F(\delta) = f(x+\delta) - f(x)$$

is $f(x)$ constant; omdat daarin geene veranderlijke aanwezig is, is

$$F_1(\delta) = f_1(x+\delta), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

wordende hierin $f_1(x+\delta)$ gevonden door in $f_1(x)$ $x + \delta$ te schrijven in de plaats van x. — Uit de vergelijking (β) volgt nu onmiddellijk:

$$F_1(\theta\delta) = f_1(x + \theta\delta);$$

derhalve ook:

$$\frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} = \frac{F(\delta)}{\delta} = f_1(x + \theta\delta),$$

of $$f(x+\delta) = f(x) + \delta f_1(x + \theta\delta). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

Stellen wij verder:

$$f(x+\delta) - f(x) - \frac{\delta}{1} f_1(x) = F(\delta),$$

dan is $$F_1(\delta) = f_1(x+\delta) - f_1(x).$$

Voor $\delta = 0$ verdwijnen $F(\delta)$ en $F_1(\delta)$, derhalve is voor $n = 2$ (N°. 18)

$$\frac{F(\delta)}{\delta^2} = \frac{F_2(\theta\delta)}{1.2}.$$

Maar wij hebben ook: $F_2(\delta) = f_2(x + \delta)$, bijgevolg:

$$F_2(\theta\delta) = f_2(x + \theta\delta)$$

of

$$\frac{f(x+\delta) - f(x) - \frac{\delta}{1} f_1(x)}{\delta^1} = \frac{F(\delta)}{\delta^2} = \frac{F_2(\theta\delta)}{1.2} = \frac{f_2(x+\theta\delta)}{1.2}$$

derhalve:

$$f(x+\delta) = f(x) + \frac{\delta}{1} f_1(x) + \frac{\delta^2}{1.2} f_2(x+\theta\delta) \ldots \quad (B)$$

Gaat men op deze wijze voort, dan zal men in het algemeen vinden:

$$f(x+\delta) = f(x) + \frac{\delta}{1} f_1(x) + \frac{\delta^2}{1.2} f_2(x) + \ldots \frac{\delta^n}{1.2 \ldots n} f_n(x+\theta\delta) \ldots (\Omega)$$

waarin θ altijd een getal voorstelt, dat kleiner is dan de eenheid.

Aanmerking. Deze formule, voor de hoogere deelen der wiskunde van zooveel gewicht, is de naar den uitvinder aldus genoemde *reeks van* TAYLOR. In de differentiaal-rekening wordt zij algemeener bewezen. Het fraaiste bewijs daarvoor is geleverd door CAUCHY in zijne *Leçons sur le calcul diff.* 1833. Voor het overige kunnen zij, die het groote nut dezer reeks willen leeren kennen, haar uitvoerig behandeld vinden in elk werk over de differentiaal-rekening. Ik heb haar hier een plaatsje ingeruimd, omdat ik ze gebruiken wilde, om latere theorema's te bewijzen; en ook, omdat zij een opmerkelijk verband aanwijst tusschen eene functie en hare afgeleide functiën.

VRAAGSTUKKEN.

1. De wortels van de vergelijking

$$5x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x - 5 = 0$$

te verminderen met 2.

2. De wortels van de vergelijking
$$3x^5 - 2x^2 + 5 = 0$$
met 1 te verminderen.

3. Men vraagt de vergelijking, wier wortels 3 kleiner zijn dan de wortels der vergelijking
$$x^4 - 3x^3 - 15x^2 + 39x - 12 = 0$$
en eene andere, wier wortels 4 eenheden grooter zijn te vinden.

4. Men vraagt de vergelijking, wier wortels $\frac{1}{2}$ kleiner zijn dan die der vergelijking
$$2x^4 - 6x^3 + 4x^2 - 2x + 1 \text{ te vinden.}$$

5. Verdrijf den tweeden term uit de vergelijking:
$$x^3 + A_1x^2 + A_2x + A_3 = 0.$$

6. Verdrijf den tweeden term uit de vergelijking
$$x^3 + 6x^2 - 18x + 10 = 0.$$

7. Aan welke voorwaarden moet voldaan worden, opdat uit de vergelijking
$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$
de derde term gelijk 0 worde?

8. In de figuur van § 20, 5 zijn OE en OF wortels van de vergelijking $y = F(x) = 0$. Hoe vermeerdert men deze wortels met eene bepaalde lengte?

ANTWOORDEN.

1. $5y^4 + 28y^3 + 51y^2 + 32y - 1 = 0.$

2. $3y^5 + 15y^4 + 30y^3 + 28y^2 + 11y + 6 = 0.$

3. $y^4 + 9y^3 + 12y^2 - 14y = 0$
$z^4 - 7z^3 + 66z - 72 = 0.$
Op grond van het geleerde in § 5, 9 heeft de opgegeven vergelijking een wortel $= 3$.

4. $2y^4 - 2y^3 - 2y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{8} = 0.$

5. $y^3 - \left(\frac{A_1^2}{3} - A_2\right)y + \frac{2A_1^3}{27} - \frac{A_1A_2}{3} + A_3 = 0.$

6. $y^3 - 30y + 62 = 0.$

7. $y + m$ substitueerende voor x, heeft men $6n^2 + 3am + b = 0$
of $m = \frac{-a \pm \sqrt{[(3a^2 - 8b) : 3]}}{4}.$

8. Door van 0 naar X_1 de bepaalde lengte af te zetten en de as $Y'Y'$, door dit punt te brengen. Dit punt O_1 noemende, ziet men ten duidelijkste, dat de wortels O_1E en O_1F, O_1O grooter zijn dan de opgegevene.

---

§ 22. Theorie der teekens, waardoor de termen eener vergelijking $f(x)=0$ verbonden zijn.

1. In dit hoofdstuk stellen wij, gelijk wij zulks ook in vorige §§ gedaan hebben,

$f(x) = x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots A_{n-1}x + A_n = 0$;

de afgeleide functiën blijven wij voorstellen door $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x) \ldots f_n(x)$; geven wij dus aan x eene bepaalde waarde a, dan ontstaan daardoor de functiën: $f(a)$, $f_1(a)$, $f_2(a) \ldots f_n(a)$. Mochten er voor $x = a$ sommige der afgeleide functiën verdwijnen, dan vervangen wij die door nullen.

2. Stelling. *Het eerste teeken van alle afgeleide functiën is positief.*

Bewijs. Aan den eersten term der opgegeven vergelijking $f(x) = 0$ kan men altijd het teeken + geven. Door de afgeleide functiën te berekenen, vindt men in het algemeen voor de laatste afgeleide functie

$$f_n(x) = n(n-1)(n-2) \ldots 3.2.1.$$

Dewijl nu de coëfficiënten van de eerste termen der afgeleide functiën uit een, of uit het product van twee of meer dezer factoren bestaan en elk dezer factoren uit den aard der zake positief is, zal het teeken van den eersten term van iedere afgeleide functie zulks ook zijn.

3. Stelling. *Wanneer men in $F(x)=0$ en hare afgeleide functiën $x = +\infty$ substitueert, dan zijn alle afgeleide functiën met hetzelfde teeken aangedaan; substitueert men daarentegen daarin $-\infty$, dan zullen de afgeleide functiën beurtelings positief en negatief zijn. De rij der teekens van $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x) \ldots$ voor $x = +\infty$ heeft n variatiën minder dan de rij der teekens voor $x = -\infty$.*

Bewijs. Wij hebben vroeger gezien, dat men in eene functie voor x zoodanige waarde kan substitueeren, dat het teeken der geheele functie afhangt van het teeken van dien term, waarin de hoogste macht van x voorkomt. Stelt men nu in alle afgeleide functiën $x = +\infty$, dan worden alle eerste termen, dus ook de functiën positief en men heeft geene enkele variatie. Stelt men $x = -\infty$, dan worden alle functiën van oneven graad negatief, van even graad positief en bij eene volledige vergelijking, waarvan hier blijkens N°. 1 sprake is, heeft men dus n variatiën. Hierdoor is de stelling bewezen.

4. Het komt er nu slechts op aan na te gaan, welke veranderingen $f(x) = 0$ ondergaat, wanneer voor x achtereenvolgens alle waarden van $x = -\infty$ tot $x = +\infty$ gesubstitueerd worden. Dewijl wij alleen spreken van continue functiën, kan er geene verandering plaats grijpen in de teekens, tenzij één of meer dan één afgeleide functie eens 0 wordt; continue functiën toch kunnen niet van den positieven in den negatieven toestand geraken, zonder door 0 te gaan.

5. Stelling. *Indien δ een oneindig klein getal is en $f_k(x)$ voor $x = a$ niet gelijk 0 wordt, dan hebben $f_k(a-\delta)$, $f_k(a)$ en $f_k(a+\delta)$ hetzelfde teeken.*

Volgens § 21 N°. 20 hebben wij:

$$f_k(a \pm \delta) = f_k(a) \pm \frac{\delta}{1} f_{k+1}(a) + \ldots + \frac{(\pm\delta)^{n-k}}{1 \ldots (n-k)} f_{n-k}(a + \theta\delta).$$

Dewijl wij nu δ zoo klein kunnen nemen, dat het teeken der geheele functie afhangt van $f_k(a)$ en deze niet gelijk 0 wordt, heeft $f_k(a \pm \delta)$ hetzelfde teeken als $f_k(a)$.

6. Stelling. *Wanneer eenige afgeleide functiën ten getale van ζ voor $x = a$, gelijk aan 0 zijn en ingesloten worden door twee functiën, die niet gelijk aan 0 zijn, dan heeft:*

indien ζ een even getal is, $f\{x-(a+\delta)\}$ altijd ζ variatiën minder dan $f\{x-(a-\delta)\}$;

indien ζ een oneven getal is, $f\{x-(a+\delta)\}$ of $\zeta+1$ of $\zeta-1$ variatiën minder dan $f\{x-(a-\delta)\}$, naar gelang de functiën,

waartusschen eenige afgeleide functiën gelijk aan 0 *zijn, gelijke of ongelijke teekens hebben.*

In 't algemeen is onder de gestelde voorwaarden het verschil in variatiën een even getal, dat intusschen in sommige gevallen ook 0 *is.*

Bewijs. Nemen wij aan, dat voor $x = a$

$$f_k(a),\ f_{k-1}(a) \ldots\ldots f_{k-e}(a)$$

gelijk aan 0 worden, dan heeft men:

$$f_k(a \pm \delta) = f_k(a) \pm \frac{\delta}{1} f_{k+1}(a) + \ldots;$$

$$f_{k-1}(a \pm \delta) = f_{k-1}(a) \pm \frac{\delta}{1} f_k(z) + \frac{\delta^2}{1.2} f_{k+1}(a) + \ldots;$$

$$f_{k-2}(a \pm \delta) = f_{k-2}(a) \pm \frac{\delta}{1} f_{k-1}(a) + \frac{\delta^2}{1.2} f_k(a) \pm \frac{\delta^3}{1.2.3} f_{k+1}(a);$$

. . . . . .

maar omdat $f_k(a) = f_{k-1}(a) = \ldots f_{k-e}(a) = 0$, is ook, vergelijk § 21, 15:

$$f_k[a \pm \delta] = \pm \frac{\delta}{1} f_{k+1}(a),$$

$$f_{k-1}[a \pm \delta] = + \frac{\delta^2}{1.2} f_{k+1}(a),$$

$$f_{k-2}[a \pm \delta] = \pm \frac{\delta^3}{1.2.3} f_{k+1}(a),$$

. . . . . .

$$f_{k-e}[a \pm \delta] = (-1)^{e+1} \frac{\delta^{e+1}}{1 \ldots (e+1)} f_{k+1}(a).$$

Hieruit ziet men derhalve, dat de afgeleide functiën $(a - \delta)$ de volgende teekens hebben:

$$\mp \pm \mp \pm \mp \ldots (-1)^{e+1} \text{ of } (-1)^e;$$

terwijl de afgeleide functiën $(a + \delta)$ steeds

$$\pm \pm \pm \pm \pm \ldots\ldots$$

tot teeken hebben. Om dus de teekens van $f\{x-(a-\delta)\}$ en $f\{x-(a+\delta)\}$ te bepalen, schrijve men eerst de teekens op van $f(x-a)$; onder en boven elken term, die niet gelijk 0 is, schrijft men hetzelfde teeken. Boven elken term daarentegen, die in de rij (a) 0 is, schrijft men het tegengestelde teeken van het juist voorgaande in de reeks $(a-\delta)$; onder elken term, die in

de reeks (a) nul wordt, schrijft men hetzelfde teeken, dat onmiddellijk voorafgaat.

Zijn bijv. de teekens van $f(x-a)$,

$$+\,-\,+\,0\,0\,0\,-\,-\,-\,+\,+\,0\,0\,+\,-\,+\,-\,; \quad . \quad (a)$$

dan heeft men:

$x-(a-\delta)$: + − + − + − − − − + + − + + − + − ... $(a-\delta)$
$x-a$: + − + 0 0 0 − − − + + 0 0 + − + − .. (a)
$x-(a+\delta)$: + − + + + + − − − + + + + + − + − .. $(a+\delta)$

Deze handelwijze, door FOURRIER den *regel van het dubbele teeken* geheeten, zal ons verder bij 't bewijs onzer stelling behulpzaam zijn.

Nemen wij namelijk een groep termen uit de reeks (a), die 0 worden, dan kunnen deze ingesloten worden door termen met gelijke of door termen met ongelijke teekens. Stellen wij, dat er $e+1$ termen tusschen gelijke teekens ontbreken, dan hebben wij de rijen:

$$x-(a-\delta): \quad \pm\mp\pm\mp\ldots\ldots\left\{\begin{matrix}(-)^{e+1}\\(-)^{e}\end{matrix}\right\}\pm,$$

$$x-a \quad : \quad \pm\,0\,0\,0\ldots\ldots \quad 0 \quad \pm,$$

$$x-(a+\delta) \quad \pm\pm\pm\pm\ldots\ldots \quad \pm \quad \pm;$$

waarin $e+1$ zoowel even als oneven kan zijn.

---

*) Een zeer eenvoudig bewijs van FOURRIER's theorema kan men leveren door de methode van HORNER. Nemen wij de reeks der teekens $f(x-a)$ ± 0 0 0 0 ∓ 0 0 0 0 0 ±; vermeerderen wij hier den wortel met δ, dan is $p=-\delta$ en de bewerking komt:

$$\begin{array}{c} \pm\,0\,0\,0\,0\,0\mp 0\,0\,0\,0\,0\pm \\ \quad \mp\pm\mp\pm\mp\pm\pm\mp\pm\mp\pm\mp \\ \hline \pm\mp\pm\mp\pm\mp\mp\pm\pm\mp\pm\pm; \end{array}$$

Dat het teeken van den laatsten term ± moet zijn, valt dadelijk in het oog, wanneer men bedenkt, dat δ een oneindig kleine grootheid is en dus het product van een eindig getal met die oneindig kleine, of met één harer machten volstrekt niet meer van invloed kan zijn op den eindigen laatsten term van $f(x-a)$. — Door $p=+\delta$ te nemen, zal men nu ook de teekens van $f\{x-(a+\delta)\}$ bepalen, enz.

Is het aantal termen, die gelijk 0 worden, even, dan heeft men:

$$\begin{array}{ll} x-(a-\delta): & \pm\mp\pm\mp\ldots\ldots\pm\pm, \\ x-a \quad : & \pm\,0\,0\,0\ldots\ldots\,0\,\pm, \\ x-(a+\delta): & \pm\pm\pm\pm\ldots\ldots\pm\pm; \end{array}$$

en in de laatste reeks vindt men $e+1$ variatiën minder dan in de eerste.

Is het aantal der verdwijnende termen oneven, dan komen de teekens:

$$\begin{array}{ll} x-(a-\delta): & \pm\mp\pm\mp\pm\ldots\ldots\mp\pm \\ x-a \quad : & \pm\,0\,0\,0\,0\ldots\ldots\,0\,\pm \\ x-(a+\delta): & \pm\pm\pm\pm\pm\qquad\qquad\pm\pm \end{array}$$

en indien er $e+1$ termen $=0$ worden, ziet men, dat er in de eerste rij $e+2$ variatiën meer zijn, dan in de laatste.

Hierdoor is de stelling reeds bewezen, wanneer de verdwijnende termen gelegen zijn tusschen blijvende termen met gelijke teekens. Het bewijs van het overige gedeelte laten wij aan den Lezer. Indien bij onze redeneering tot hiertoe goed gevolgd heeft, zal het hem niet moeilijk vallen, het tweede en derde gedeelte der stelling te betoogen.

Aanmerking. Deze stelling en al hetgeen er verder over de methode van FOURRIER gezegd zal worden, is ontleend aan de *Analyse des équations déterminées* par M. FOURRIER. Paris FIRMIN DIDOT, 1830. Pag. 102 sqq.

7. Stelling. *Wanneer* $f(a), f_1(a), f_2(a)\ldots f_e(a)$ *te gelijk* 0 *worden, dan heeft* $f\{x-(a-\delta)\}$, $e+1$ *variatiën meer, dan* $f\{x-(a+\delta)\}$.

Bewijs. Wanneer e oneven is, dan heeft men de volgende rij van teekens.

$$\begin{array}{ll} a-\delta & \pm\mp\pm\mp\pm\ldots\ldots\mp\pm. \\ a & \pm\,0\,0\,0\,0\ldots\ldots\,0\,0, \\ a+\delta & \pm\pm\pm\pm\pm\ldots\ldots\pm\pm; \end{array}$$

wanneer e even is:

$$\begin{array}{ll} a-\delta & \pm\mp\pm\mp\pm\ldots\ldots\pm\mp. \\ a & \pm\,0\,0\,0\,0\qquad\qquad\,0\,0, \\ a+\delta & \pm\pm\pm\pm\pm\qquad\qquad\pm\pm. \end{array}$$

Men ziet dus, dat er in beide gevallen $e+1$ variatiën tusschen de functiën $f(x-(a-\delta))$ en $f(x-(a+\delta))$ verloren gaan.

Ingevolge § 21, 17 toont $f(a)=0$, dat a een wortel is van de vergelijking $f(x)=0$; is $f_1(a)$ ook $=0$, dan zijn er in $f(x)=0$ twee gelijke wortels $x=a$; is $f_e(a)$ zoowel als de vorige functiën $=0$, dan zijn er in $f(x)=0$, e gelijke wortels a. Men ziet dus hieruit, dat voor elken reëelen wortel a ééne variatie minder voorkomt in de rij $(a+\delta)$, dan in de rij $(a-\delta)$.

8. Wanneer a en b twee willekeurige reëele grootheden zijn, zijnde $b>a$, en eene functie van x tusschen de grenzen a en b, die ook respectievelijk $-\infty$, 0 en $+\infty$ kunnen zijn, continue blijft, dan besluiten wij, op grond van het voorgaande, tot de volgende waarheden:

a) De eerste term van elke rij teekens der afgeleide functiën is $+$.

b) Het aantal variatiën der reeks $(-\infty)$ is $=n$.

c) Het aantal permanentiën der rij $(+\infty)$ is $=n$.

d) De reeks $(-\infty)$ heeft dus zoovele variatiën meer, dan de reeks (∞), als de vergelijking $f(x)=0$ wortels heeft.

e) Wanneer x van $-\infty$ aangroeit tot $+\infty$, dan kan het aantal variatiën niet toenemen, maar vermindert langzamerhand van n tot 0.

f) De rij der teekens van $f(x-b)$ kan hoogstens n variatiën meer hebben, dan de rij der teekens van $f(x-a)$. Trekt men de getallen, die het aantal variatiën in de reeksen $f(x-a)$ en $f(x-b)$ aanwijzen, van elkander af, dan kan het verschil nooit negatief, maar wel 0 zijn.

g) Voor elken reëelen wortel, die tusschen de grenzen a en b ligt, verdwijnt ééne variatie. Liggen er dus m reëele wortels tusschen de grenzen a en b, dan zal $f(x-b)$ ook m variatiën minder hebben, dan $f(x-a)$, hetzij dan dat deze wortels onderling gelijk of ongelijk zijn.

Aanmerking. Deze stelling is bekend onder den naam van *Theorema van* BUDAN en komt uitvoerig bewezen voor in LOBATTO's *Lessen over de Hoogere Algebra; Archief der Wiskunde* 1867 enz. Hier is het een direct uitvloeisel van onze meer algemeene stelling. Zijn, om

het nog op te helderen, p en q twee reëele wortels tusschen a en b en $p < q$; heeft nu $f(x-(p-\delta))$, k variatiën, dan heeft $f(x-(p+\delta))$ er $k-1$; bij 't aangroeien van x kan het aantal variatiën niet toenemen, dus $f(x-(q-\delta))$ kan er hoogstens $k-1$ hebben; maar bij den overgang van $x-(q-\delta)$ op $x-(q+\delta)$ gaat er ééne variatie verloren, ... enz.

h) Hebben $f(x-a)$ en $f(x-b)$ evenveel variatiën, dan ligt er tusschen de grenzen a en b geen reëele wortel der vergelijking $f(x)=0$. Heeft $f(x-b)$, m variatiën minder, dan $f(x-a)$, dan kan $f(x)=0$, m reëele wortels tusschen b en a hebben, maar zulks is niet noodzakelijk; het afnemen toch van het aantal variatiën kan het gevolg zijn van het verdwijnen van sommige functiën $f_k(a)$, $f_{k+1}(a)$ ..., zonder dat de laatste functie 0 wordt.

i) Wanneer $f(x)=0$ tusschen a en b voor geene enkele waarde van x nul wordt, dan kan er ook geen reëele wortel der vergelijking $f(x)=0$ tusschen deze grenzen gelegen zijn. Het verschil der variatiën van de reeks (a) en (b) is dan echter òf 0, òf een even getal. — Is het verschil dier variatiën een oneven getal, dan besluit men, op grond van het zooëven betoogde, dat er zeker één reëele wortel tusschen a en b moet gelegen zijn.

k) Is het verschil tusschen het aantal variatiën van $f(x-a)$ en $f(x-b)$ even, dan kunnen tusschen die grenzen slechts een even aantal reëele wortels liggen van de vergelijking $f(x)=0$. Is dat verschil oneven, dan kan er ook slechts een oneven aantal wortels van de vergelijking $f(x)=0$ tusschen die grenzen gelegen zijn.

l) Wanneer voor $x=a$ eenige termen van $f(x-a)$ gelijk aan 0 worden, zonder dat de laatste term 0 wordt, dan wijst dit op eenige paren imaginaire wortels in de vergelijking $f(x-a)$; dus, omdat a reëel is, op een zelfde aantal imaginaire wortels in de vergelijking $f(x)=0$. (Men vergelijke hiermede § 5, N° 20.)

m) Wanneer $f(x-b)$, m variatiën minder heeft, dan $f(x-a)$ en men weet, dat er tusschen a en b slechts p reëele wor-

tels gelegen zijn, dan kan men besluiten, dat er tusschen de grenzen a en b, m—p imaginaire wortels moeten gelegen zijn. Ingevolge § 5, N°. 19 moet m—p altijd een even getal zijn.

Al deze stellingen vloeien onmiddellijk voort uit N°. 6 en N°. 7. Daarvan een afzonderlijk bewijs te geven, laten wij over aan den Lezer.

9. Stelling. *Wanneer de teekens van $f(x-l)$ en $f(x-a)$ in dezelfde volgorde juist dezelfde zijn, en $a < c < b$, dan zullen ook de teekens van $f(x-c)$, in dezelfde volgorde genomen, dezelfde zijn, als van $f(x-l)$ en $f(x-a)$.*

Bewijs. Nemen wij aan, dat $f_{n-k}(a)$ een ander teeken heeft, dan $f_{n-k}(c)$, dan zou de vergelijking $f_{n-k}(x) = 0$, een wortel hebben tusschen a en c, dus ook tusschen a en b. Maar tusschen a en b kunnen geene wortels gelegen zijn, (zie N°. 8, h), derhalve kunnen $f_{n-k}(a)$ en $f_{n-k}(c)$ geene verschillende teekens hebben, enz.

10. Stelling. *Is het aantal variatiën van $f(x-a)$ en $f(x-b)$ gelijk, zonder dat die variatiën in dezelfde volgorde voorkomen, dan zal het aantal variatiën der functie $f(x-c)$, indien $a < c < b$, weder gelijk zijn aan dat van $f(x-a)$ of $f(x-b)$.*

Bewijs. Is het aantal variatiën van $f(x-a)$ gelijk aan v_a, van $f(x-c)$ gelijk aan v_c, van $f(x-b)$ daarentegen gelijk aan v_b, dan is volgens de veronderstelling $v_a = v_b$, maar volgens N°. 8, e kan $v_a > v_c$ en $v_c > v_b$, 't geen eene ongerijmdheid is, enz.

11. Stelling. *Wanneer de laatste term van het eerste lid eener vergelijking het teeken + voor zich heeft, dan is het aantal variatiën dier vergelijking een even aantal; is het laatste teeken —, dan is het aantal variatiën oneven.*

Bewijs. Om zulks te bewijzen behoeft men zich slechts eene rij van teekens voor te stellen, waarin gelijke op elkaâr volgende teekens, als zijnde niet van invloed op de variatiën, weggelaten zijn, bijv.

$$+ - + - + \ldots\ldots - + +$$
$$+ - + - + \ldots\ldots - + -.$$

Ook het omgekeerde dezer stelling is waar.

12. Wanneer men de variatiën in de rij $f(x—a)$ telt en vermindert met de variatiën van de rij $f(x—b)$, dan zal men, volgens het vroeger geleerde, altijd positieve verschillen hebben. Zijn de teekens van

$$f(x—b) \quad + — + — — — + — + — +$$
$$0\ 0\ 1\ 2\ 1\ 0\ 1\ 2\ 3\ 3\ 3$$
$$\text{en } f(x—a) \quad + — — — + — — — — — + — ,$$

dan wijzen de tusschenstaande cijfers het verschil in variatiën aan tusschen een term, tusschen twee, drie, vier, enz. termen der beide functiën. Deze cijfers kan men *indices der teekens* noemen; de rij der cijfers heet dan *indexreeks* tusschen de grenzen a en b.

Stelt men in het vervolg deze indices in 't algemeen voor door

$$0, \iota_1, \iota_2, \iota_3, \iota_4 \ldots\ldots \iota_k, \iota_{k+1} \ldots\ldots \iota_n ,$$

dan ziet men dadelijk uit het ontstaan derzelve, dat in het algemeen

$$\iota_{k-1} = \iota_k, \text{ of } \iota_{k-1} = \iota_k - 1, \text{ of } \iota_{k-1} = \iota_k + 1 ;$$

d. i.: *een index kan met zijn onmiddellijk voorgaanden of onmiddellijk volgenden nooit meer dan één eenheid verschillen.*

Nog volgt uit deze bepaling in verband met de stelling van N°. 11 :

a) *Wanneer twee rijen teekens met een zelfde teeken eindigen en uit een gelijk aantal termen bestaan, dan is de laatste index een* even *getal.*

b) *Eindigen twee rijen teekens, die uit een gelijk aantal termen bestaan, met ongelijke teekens, dan is de laatste index een* oneven *getal.*

Ook het omgekeerde dezer beide stellingen is waar.

---

§ 23. Theorie der limieten. Convergeerende reeksen.

1. Wij hebben reeds op verscheidene plaatsen van grenzen gesproken. In deze § nu zullen de grenzen meer opzettelijk be-

handeld, en zal er tevens uitvoerig gesproken worden over de convergentie der reeksen, om vervolgens te komen op de grenzen, waar binnen men de wortels eener vergelijking $f(x) = 0$ moet opsporen. Om al aanstonds een voorbeeld te nemen, waaruit ons de ware aard der limieten bekend worden, willen wij oplossen het volgende

Vraagstuk. *Welke is de waarde van* $\left(1 + \frac{1}{z}\right)^z$, *wanneer z toeneemt tot in het oneindige?*

Wij beginnen met aan te nemen, dat z een geheel positief getal x is, dan heeft men volgens het binomium van NEWTON (*Theorie der Algem. Rek.* I, pag. 146 en II, 180).

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 1 + \frac{x}{1}\cdot\frac{1}{x} + \frac{x(x-1)}{1.2}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}\left(\frac{1}{x}\right)^3 +$$

$$+ \frac{x(x-1)(x-2)\ldots\ldots(x-k)}{1.\ 2.\quad 3\ldots\ldots\ldots(k+1)}\left(\frac{1}{x}\right)^{k+1} \ldots\ldots =$$

$$= 1 + \frac{1}{1} + \frac{1-\frac{1}{x}}{1.2} + \frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)}{1.\quad 2.\quad 3} + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{k}{x}\right)}{1.\ 2.\quad 3\ldots\ldots\ldots(k+1)} + \ldots\ldots \Big\}\ldots(\alpha)$$

Nemen wij verder $z = x + 1$, dan is op gelijke wijze:

$$\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x+1} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1-\frac{1}{x+1}}{1.\ 2} + \frac{\left(1-\frac{1}{x+1}\right)\left(1-\frac{2}{x+1}\right)}{1.\quad 2.\quad 3} + \ldots$$

$$+ \frac{\left(1-\frac{1}{x+1}\right)\left(1-\frac{2}{x+1}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{k}{x+1}\right)}{1.\ 2\quad 3\ldots\ldots\ldots(k+1)} + \ldots$$

Beschouwen wij nu den $(k+2)^{\text{den}}$ term van de beide ontwikkelingen, dan zal, omdat

$$1 - \frac{1}{x} < 1 - \frac{1}{x+1}, \quad 1 - \frac{2}{x} < 1 - \frac{2}{x+1}, \text{ enz.},$$

(x een positief geheel getal zijnde) en bovendien de reeks (β) één term meer bevat, dan de reeks (α):

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x+1} < \left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{x+2} \text{ enz.}$$

Neemt men nu $x=1$, dan vindt men $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 2$;

voor toenemende waarden van x zal $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ steeds toenemen; wij moeten dus trachten de grens te bepalen, welke deze ontwikkeling nimmer overschrijden zal. — Hoe groot men x ook neme, toch blijven

$$\frac{1}{x}, \frac{2}{x}, \frac{3}{x} \ldots \frac{x-1}{x} \text{ echte breuken, derhalve zijn}$$

$$1-\frac{1}{x}, \quad 1-\frac{2}{x}, \quad 1-\frac{3}{x}, \ldots\ldots 1-\frac{k}{x} \ldots$$

ook echte breuken en haar product is altijd kleiner dan 1.

De waarde van de ontwikkeling $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ is dus altijd kleiner dan

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\ldots+\frac{1}{1.2.3\ldots k}\ldots$$

Maar $\frac{1}{2.3} < \frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{1.2.3.4} < \frac{1}{2^3}$, $\frac{1}{1.2.3\ldots k} < \frac{1}{2^{k-1}}$;

derhalve:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots\ldots$$

Verder heeft men (*Th. d. Alg. Rekenk.* § 21, N°. 6.)

$$\text{Lim } S = 1+\tfrac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots\ldots = 2;$$

derhalve $$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < 3.$$

Wij hebben nu gevonden: 1°. $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x > 2$;

2°. de waarde van $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ neemt steeds toe;

3°. die waarde blijft < 3;

derhalve moet $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ eene standvastige waarde tusschen 2 en 3 naderen; deze waarde e noemende heeft men, wanneer x een geheel positief, steeds aangroeiend getal is:

$$\lim\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Nemen wij voor z een irrationeel of gebroken getal x, dan kunnen wij altijd twee getallen ξ en $\xi+1$ aanwijzen, waartusschen x gelegen is. Omdat nu

$$\xi < x < \xi+1, \text{ is ook } \frac{1}{\xi} > \frac{1}{x} > \frac{1}{\xi+1};$$

dus ook:

$$\left(1+\frac{1}{\xi}\right)^x > \left(1+\frac{1}{x}\right)^x > \left(1+\frac{1}{\xi+1}\right)^x.$$

Stellen wij nu $\xi+1=\xi'$, $x=\xi+a$ en $x=\xi'-b$, waarin a en b kleiner dan 1 zijn, dan is

$$\left(1+\frac{1}{\xi}\right)^{\xi+a} > \left(1+\frac{1}{x}\right)^x > \left(1+\frac{1}{\xi'}\right)^{\xi'-b},$$

$$\text{of } \left\{\left(1+\frac{1}{\xi}\right)^{\xi}\right\}^{1+\frac{a}{\xi}} > \left(1+\frac{1}{x}\right)^x > \left\{\left(1+\frac{1}{\xi'}\right)^{\xi'}\right\}^{1-\frac{b}{\xi'}}.$$

Maar indien ξ en ξ' steeds grooter worden, dan hebben $\frac{a}{\xi}$ en $\frac{b}{\xi'}$ tot limiet 0; derhalve worden:

$$\lim\left(1+\frac{1}{\xi}\right)^{\xi} = e \text{ en } \lim\left(1+\frac{1}{\xi'}\right)^{\xi'} = e;$$

dus ook:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e,$$

waarin x nu een positief geheel, gebroken of irrationeel getal kan zijn.

Nemen wij nu voor z een negatief getal, bijv. $-x$, dan vinden wij:

$$\left(1+\frac{1}{z}\right)^z = \left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x} = \left(\frac{x-1}{x}\right)^{-x} = \left(\frac{x}{x-1}\right)^x.$$

Stellen wij hierin $x = 1 + \xi$, dan vinden wij:

$$\left(\frac{x}{x-1}\right)^x = \left(\frac{1+\xi}{\xi}\right)^{1+\xi} = \left\{\left(1+\frac{1}{\xi}\right)^{\xi}\right\}^{1+\frac{1}{\xi}}.$$

Maar voor een steeds toenemende ξ is $\lim\left(1+\frac{1}{\xi}\right) = 1$,

derhalve $\lim\left(1+\frac{1}{z}\right)^z = e$. . . . . (A)

Welke waarden men dus ook aan z toekenne, hetzij positief of negatief geheel, gebroken of irrationeel, steeds zal hare limiet e zijn.

Wanneer wij z zeer groot nemen, zullen wij vinden:

$$e = 2{,}71828182845904\ldots\ldots$$

Stelt δ een oneindig klein getal voor, dan is $z = \frac{1}{\delta}$ en $\frac{1}{z} = \delta$.

Bij zoodanige veronderstelling volgt nog uit (A):

$$\lim(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}} = e \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (B)$$

Wordt nog gevraagd naar de limiet van $(1+a\delta)^{\frac{1}{\delta}}$, dan is

$$\lim(1+a\delta)^{\frac{1}{\delta}} = \lim\left\{(1+a\delta)^{\frac{1}{a\delta}}\right\}^a = e^a \ldots (C)$$

Aanmerking. Men vergelijke hiermede SCHLÖMILCH's *Diff. und Integr. Rechn. Einl.*

2. Door eene reeks verstaat men in het algemeen eene rij van getallen, die volgens eene zekere wet van elkaâr afhangen. Indien bij het toenemen van het aantal termen hunne som een bepaald getal nadert, dan noemt men de reeks convergent; nadert voor $n = \infty$, S_n geene bepaalde waarde, dan noemt men de reeks *divergent*. [Vergelijk ook *Theorie der Algem. Rekenk.* I, pag. 101 sqq.] Zijn reeksen divergent, dan hebben slechts een bepaald aantal termen eene som; de reeks zelve kan men dan beschouwen als eene rij van getallen, die aan eene zekere analytische voorwaarde voldoen.

Wij willen eene reeks in 't algemeen voorstellen door:

$$t_0, t_1, t_2, t_3, t_4 \ldots\ldots t_n, t_{n+1}, t_{n+2}, \ldots\ldots$$

welker algemeene term t_n wij beschouwen, als eene functie van den index.

Meetkundige reeksen, waarvan de reden een gebroken is, zijn altijd sommeerbaar, dus ook convergent.

Uit de bepaling van convergentie volgt nog, dat de reeks

$$t_0, t_1, t_2, t_3 \ldots\ldots$$

niet convergent zal zijn, tenzij

$$S_{n+m} - S_n = t_n + t_{n+1} + t_{n+2} + \ldots\ldots t_{n+m-1}$$

meer en meer tot 0 nadere, naarmate n grooter wordt. Dit moet waar zijn, zoo lang m eene geheele positieve waarde heeft, dus ook voor $m = 1$; derhalve zal de algemeene term t_n meer en meer tot 0 moeten naderen, naarmate n grooter wordt genomen.

Uit $\lim (S_{n+m} - S_n) = 0$ voor $m = \infty$, volgt onmiddellijk de convergentie van de reeks. Want stellen wij $S_{n+m} - S_n = r_n$ en noemen wij r^n den *sluitterm* van de reeks, dan zal er, omdat r_n voor toenemende waarden van n tot 0 nadert, eene waarde van n moeten zijn, waarvoor zij een eindig getal is. Zij die waarde $= p$, dan is ook S_p, als zijnde de som van een eindig aantal termen, eindig. $S_{n+m} = S_p + r_p$ wordt dan ook eindig, zoodat de som der reeks voor toenemende waarden van m eindig blijft. Men wachte zich intusschen alleen uit het kleiner worden van t_n tot de convergentie der reeks te besluiten.

Wij zullen in de volgende bladzijden eenige stellingen mededeelen aangaande de convergentie der reeksen. Om hierbij geleidelijk te werk te gaan, zullen wij deze theorema's brengen tot vier hoofdafdeelingen:

A. Theorema's voor reeksen, waarvan alle termen positief zijn.
B. Theorema's voor reeksen, waarvan de termen door het teeken + en — verbonden kunnen zijn.
C. Theorema's voor reeksen, wier termen gerangschikt zijn volgens de opklimmende machten van een veranderlijk argument x en wier termen door + en — verbonden kunnen zijn.
D. Theorema's voor reeksen, in wier termen imaginaire grootheden voorkomen.

Alvorens echter tot de bepaling van de limieten van eenige reeksen over te gaan, volgen hier eenige stellingen, die dikwijls toegepast worden.

1°. *Indien men weet, dat de reeks*

$$t_0, t_1, t_2 \ldots\ldots$$

convergeert en gegeven is, dat de termen der reeks

$$u_0, u_1, u_2 \ldots\ldots$$

van den eersten af respectievelijk kleiner zijn, dan de overeenkomstige termen van de eerste reeks, dan is ook de tweede convergent.

2°. *Indien eene reeks van een oneindig aantal termen convergeert en met eene reeks van een eindig aantal termen vermeerderd wordt, dan is de som eene convergente reeks.*

3°. *Indien de reeks*

$$t_0, t_1, t_2, t_3 \ldots\ldots$$

convergeert en men van een bepaalden term af heeft:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{t_{n+1}}{t_n}, \quad \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} < \frac{t_{n+2}}{t_{n+1}}, \ldots.$$

dan convergeert ook de reeks

$$u_0, u_1, u_2, u_3 \ldots\ldots$$

Bewijs. De beide eerste stellingen zijn duidelijk uit zich zelven, om de derde te bewijzen stellen wij:

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} = \lambda_1, \quad \frac{t_{n+2}}{t_{n+1}} = \lambda_2, \quad \frac{t_{n+3}}{t_{n+2}} = \lambda_3 \ldots\ldots;$$

dan volgt daaruit

$$t_n + t_{n+1} + t_{n+2} + t_{n+3} + \ldots = t_n (1 + \lambda_1 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \ldots).$$

Stelt men verder $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \mu_1$ enz., dan is analoog:

$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots = u_n (1 + \mu_1 + \mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_2\mu_3 + \ldots).$$

Volgens de onderstelling is $\mu_1 < \lambda_1$, $\mu_2 < \lambda_2$, enz.,

dus $\mu_1\mu_2 < \lambda_1\lambda_2$, $\mu_1\mu_2\mu_3 < \lambda_1\lambda_2\lambda_3$, enz.;

derhalve:

$$\frac{1}{u_n}(u_n+u_{n+1}+u_{n+2}+u_{n+3}+\ldots) < \frac{1}{t_n}(t_n+t_{n+1}+t_{n+2}+t_{n+3}+$$

of

$$u_n+u_{n+1}+u_{n+2}+u_{n+3}+\ldots < \frac{u_n}{t_n}(t_n+t_{n+1}+t_{n+2}+t_{n+3}+\ldots).$$

Maar het tweede lid dezer vergelijking van ongelijkheid is de sluitterm eener convergente reeks, derhalve zal ook de reeks u_0, u_1, u_2 .... convergeeren.

Aanmerking. De eerste verhandeling van eenig belang over de convergentie en divergentie der reeksen is van CAUCHY. Na hem is dit veld door verschillende wiskundigen bearbeid. De meeste theoremas van deze § zijn ontleend aan de *Résumés analytiques* par AUGUSTE LOUIS CAUCHY etc. *Turin* 1833. 2e Livraison. — De stelling van n°. 10 is van SCHLÖMILCH en wordt door hem medegedeeld in zijne Diff. u. Int. R. pag. 262. sqq. De stellingen van n°. 11 en n°. 12 zijn van OSSIAN BONNET, en worden medegedeeld in het *journal* van LIOUVILLE. Men kan hiermede verder vergelijken SMAASEN's *Gronden der hoogere Algebra*, pag. 25, SCHLÖMILCH's *Handbuch der algebraischen Analysis* en SERRET's *Cours d'Alg.*

A. Theorema's voor reeksen, waarvan alle termen positief zijn.

3. Stelling. *Wanneer al de termen van de reeks*

$$t_0, t_1, t_2, t_3 \ldots\ldots t_m, t_{m+1} \ldots\ldots$$

positief zijn, en de termen

$$t_n, t_{n+1}, t_{n+2}, t_{n+3} \ldots\ldots$$

respectievelijk kleiner zijn, dan de termen der convergeerende reeks

$$T_0,\ T_1,\ T_2,\ T_3 \ldots\ldots,$$

dan convergeert ook de eerst opgegeven reeks.

Bewijs. Stellen wij:

$s_n = t_0 + t_1 + t_2 + \ldots t_{n-1}$ en $S_n = T_0 + T_1 + T_2 \ldots T_{n-1}$, dan is:

$$S_{n+m} - S_n = T_n + T_{n+1} + T_{n+2} + \ldots\ldots + T_{n+m-1}.$$

Maar volgens de veronderstelling heeft men:

$$t_{2n} < T_n,\ t_{2n+1} < T_{n+1},\ t_{2n+2} < T_{n+2}, \ldots\ldots$$
$$t_{2n+m-1} < T_{n+m-1};$$

derhalve:

$$t_{2n} + t_{2n+1} + t_{2n+2} + \ldots\ldots t_{2n+m-1} < S_{n+m} - S_n$$

of wat hetzelfde is

$$s_{2n+m} - s_{2n} < S_{n+m} - S_n.$$

Dewijl de reeks $T_0,\ T_1,\ T_2,\ T_3, \ldots\ldots$ convergeert, zal $S_{n+m} - S_n$ voor eene toenemende waarde van n, zoo dicht mogelijk bij 0 gebracht kunnen worden; zulks zal nog zoo veel te meer het geval zijn voor $s_{2n+m} - s_{2n}$; derhalve is de reeks

$$t_0,\ t_1,\ t_2 \ldots\ldots t_n \ldots\ldots$$

convergent.

De reeks $\frac{1}{1}, \frac{1}{1.2}, \frac{1}{1.2.3}, \frac{1}{1.2.3.4}, \frac{1}{1.2.3..n}$ zal convergeeren, omdat (vergel. N°. 1) hare termen, van de derde te beginnen, respectievelijk kleiner zijn, dan de termen van de reeks

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4} \ldots\ldots,$$

en de laatste reeks eene convergente is.

4. Stelling. *Wanneer de termen der reeks*

$$t_0,\ t_1,\ t_2,\ t_3, \ldots\ldots t_n,\ t_{n+1},\ t_{n+2}, \ldots\ldots$$

bij den $n$den term te beginnen, steeds grooter zijn, dan de termen van de divergeerende reeks

$$T_0,\ T_1,\ T_2,\ T_3 \ldots\ldots,$$

dan zal de eerste reeks ook divergeeren.

Bewijs. Even als in het vorige N°. stellende:

$s_n = t_0 + t_1 + t_2 + \ldots\ldots$; $S_n = T_0 + T_1 + T_2 + \ldots\ldots$,

heeft men $S_{n+m} - S_n = T_n + T_{n+1} + T_{n+2} + \ldots\ldots T_{n+m-1}$.

Verder is:

$$t_{2n} > T_n,\ t_{2n+1} > T_{n+1},\ t_{2n+2} > T_{n+2} \ldots\ldots$$
$$t_{2n+m-1} > T_{n+m-1};$$

derhalve:

$$t_{2n} + t_{2n+1} + t_{2n+2} + \ldots\ldots t_{2n+m-1} > S_{n+n} - S_n,$$

of, wat hetzelfde is:

$$s_{2n+m} - s_{2n} > S_{n+m} - S_n.$$

Dewijl nu voor aangroeiende waarden van n het verschil $S_{n+m} - S_n$ niet tot 0 nadert, zal zulks nog zooveel te minder het geval zijn voor $s_{n+m} - s_n$; de gestelde reeks is dus divergent.

Heeft men bijv. op eene of andere wijze gevonden, dat de reeks

$$1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{6}, \ldots\ldots$$

divergeert, dan zal zulks nog zooveel te meer het geval zijn voor de reeks

$$1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{4}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \ldots\ldots;$$

omdat de termen der 2de reeks, van den tweeden term te beginnen, respectievelijk grooter zijn, dan de termen der 1ste reeks.

5. Stelling. *Eene reeks $t_0, t_1, t_2 \ldots\ldots$ zal convergeeren of divergeeren, naarmate de limiet van $(t_n)^{\frac{1}{n}}$ voor eene toenemende waarde van n kleiner of grooter dan de eenheid is.*

Bewijs. Stellen wij de limiet van $(t_n)^{\frac{1}{n}}$ voor door L, nemen wij eerst aan $L < 1$; en geven wij vervolgens aan T zoodanige waarde, dat wij hebben:

$$L < T < 1.$$

Daar nu $(t_n)^{\frac{1}{n}}$ steeds meer en meer tot L tracht te naderen, hoe meer men n doet toenemen, zal van eene zekere waarde af:

$$(t^n)^{\frac{1}{n}} < T \quad \text{of} \quad t_n < T^n.$$

Daaruit volgt, dat er waarden van n zijn, waarvoor men altoos

vinden zal, dat de termen der reeks t_n, t_{n+1}, t_{n+2}, t_{n+3}..... respectievelijk kleiner zijn, dan de termen der reeks:

$$T^n,\ T^{n+1},\ T^{n+2},\ T^{n+3}.....$$

De laatste reeks nu is als meetkundige, wier reden < 1 is, steeds sommeerbaar voor oneindig toenemende waarden van n; derhalve zal zulks ook het geval zijn met de reeks t_0, t_1, t_2, t_3 ..., die dus convergent zal zijn.

Is $L > 1$, dan neme men een getal T zoodanig, dat $L > T > 1$. Daar $(t_n)^{\frac{1}{n}}$ meer en meer tot L tracht te naderen, is dus

$$(t_n)^{\frac{1}{n}} > T \quad \text{of} \quad t_n > T^n,$$

en zulks, wegens aanhoudend toenemen van n, na eenmaal het geval geweest te zijn, voortdurend. Daaruit volgt, dat de termen der reeks

$$t_n,\ t_{n+1},\ t_{n+2},.....$$

respectievelijk grooter zijn, dan de termen der reeks

$$T^n,\ T^{n+1},\ T^{n+2},.....;$$

maar omdat $T > 1$, is de laatste reeks divergent, de eerste zal dus zulks à fortiori zijn.

Wordt bijv. gevraagd of de reeks

$$\frac{1}{3.6.9},\ \frac{5}{6.9.12},\ \frac{8}{9.12.15},\ \frac{11}{12.15.18}\ .....$$

convergent is, dan vindt men:

$$(t_n)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{3n-1}{3n(3n+3)(3n+6)}} < \sqrt[n]{\frac{1}{9(n+1)(n+2)}} < 1;$$

de reeks zal derhalve convergeeren.

6. Stelling. *Eene reeks zal convergeeren of divergeeren, naarmate de limiet van het quotiënt $\frac{t_{n+1}}{t_n}$ voor toenemende waarden van n kleiner of grooter is dan de eenheid.*

Bewijs Zij v kleiner dan het verschil tusschen L en 1, dan is:

$$L - v < L < L + v < 1 \quad \text{voor } L < 1;$$
$$\text{of} \quad L + v > L > L - v > 1 \quad \text{voor } L > 1.$$

In beide gevallen kan n zoo groot genomen worden, dat $\frac{t_{n+1}}{t_n}$, als naderende tot L, tusschen $L-v$ en $L+v$ ligt; zulks is ook het geval met $\frac{t_{n+2}}{t_{n+1}}$, $\frac{t_{n+3}}{t_{n+2}}$, enz.; men vindt derhalve voor

$L \gtrless 1$;

$$L-v < \frac{t_{n+1}}{t_n} < L+v \quad \text{of} \quad t_n(L-v) < t_{n+1} < t_n(L+v);$$

$$L-v < \frac{t_{n+2}}{t_{n+1}} < L+v \text{ of } t_{n+1}(L-v) < t_{n+2} < t_{n+1}(L+v);$$

of zooveel te meer: $t_n(L-v)^2 < t_{n+2} < t_n(L+v)^2$.

$$L-v < \frac{t_{n+3}}{t_{n+2}} < L+v \text{ of } t_{n+2}(L-v) < t_{n+3} < t_{n+2}(L+v);$$

of zooveel te meer: $t_n(L-v)^3 < t_{n+3} < t_n(L+v)^3$.

enz.

Men heeft dus:

$$t_n\{(L-v)+(L-v)^2+(L-v)^3+\ldots\} < t_{n+1}+t_{n+2}+t_{n+3}+\ldots$$
$$< t_n\{(L+v)+(L+v)^2+(L+v)^3+\ldots\}$$

Is nu $L-v > 1$, dan is het eerste lid dezer ongelijkheid divergent, zulks zal dus nog zooveel te meer het geval zijn met de reeks

$$t_{n+1}, t_{n+2}, t_{n+3}+\ldots;$$

is $L+v < 1$, dan is het derde lid dezer ongelijkheid convergent, zulks zal dus nog zooveel te meer het geval zijn met de tweede reeks; waardoor de stelling bewezen is. — In geval L gelijk aan 1 mocht zijn, kan men aangaande de convergentie en divergentie der reeks niets naders bepalen.

7. Laat ons ter toepassing dezer stelling nemen de reeks:

$$1, \frac{1}{1.2}, \frac{1}{1.2.3}, \frac{1}{1.2.3.4} \ldots\ldots \frac{1}{1.2.3\ldots\ldots n-1}.$$

Hier is $t_{n-1} = \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}$ en $t_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n}$, derhalve:

$$\frac{t_n}{t_{n-1}} = \frac{\frac{1}{1.2.3.....n}}{\frac{1}{1.2.3...(n-1)}} = \frac{1}{n}.$$

Dewijl 1 eindig is en n steeds toeneemt, is $\lim \frac{1}{n} = 0 < 1$, derhalve is de reeks convergent.

Nemen wij de stelling van N°. 6, dan zouden we vinden:

$$\left(\frac{1}{1.2.3...n}\right)^{\frac{1}{n}} < 1,$$

waaruit wij eveneens zouden zien, dat de reeks convergent is.

8. Stelling. *Wanneer in de reeks* $t_0, t_1, t_2, t_3 .....$ *elke voorgaande term kleiner is dan zijn volgende, dan zal zij met de reeks*

$$t_0, 2t_1, 4t_2, 8t_7, 16t_{15} .....$$

tegelijk convergeeren of divergeeren.

Bewijs. Nemen wij in de eerste plaats aan, dat de eerste reeks convergent is.

Dewijl elke voorgaande term kleiner is dan zijn volgende, heeft men:

$$\begin{aligned}
t_0 &= t_0, \\
2t_1 &= 2t_1, \\
4t_2 &< 2t_2 + 2t_3, \\
8t_7 &< 2t_4 + 2t_5 + 2t_6 + 2t_7, \\
16t_{15} &< 2t_8 + 2t_9 + 2t_{10} + 2t_{11} + 2t_{12} + 2t_{13} + 2t_{14} + 2t_{15}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Stellen wij nu:

$$T_0 = t_0, \; T_1 = t_1, \; T_2 = t_2 + t_3, \; T_7 = t_4 + t_5 + t_6 + t_7,$$
$$T_{15} = t_8 + t_9 + t_{10} + t_{11} + t_{12} + t_{13} + t_{14} + t_{15},$$

dan zijn de termen der reeks

$$t_0, 2t_1, 4t_2, 8t_7, 16t_{15} .....$$

van den derden term af, respectievelijk kleiner dan de termen der reeks

$$T_0, 2T_1, 2T_2, 2T_7, 2T_{15} .....$$

Nu is $T_0 + T_1 + T_2 + T_7 + \ldots = t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + \ldots;$

de tweede reeks is convergent, derhalve zal de eerste reeks zulks ook zijn. Maar is T_0, T_1, T_3, T_7 ..... convergent, dan is ook $2T_0$, $2T_1$, $2T_3$, $2T_7$..... convergent, dus ook T_0, $2T_1$, $2T_3$, $2T_7$, en zooveel te meer de reeks

$$t_0,\ 2t_1,\ 4t_3,\ 8t_7,\ 16t_{15}\ldots\ldots$$

Nemen wij in de tweede plaats aan, dat de eerste reeks divergeert, dan is:

$$\begin{aligned}
t_0 &= t_0,\\
2t_1 &> t_1 + t_2,\\
4t_3 &> t_3 + t_4 + t_5 + t_6,\\
8t_7 &> t_7 + t_8 + t_9 + t_{10} + t_{11} + t_{12} + t_{13} + t_{14},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

en stellen wij:

$$\begin{aligned}
t_0 &= T_0\\
t_1 + t_2 &= T_2\\
t_3 + t_4 + t_5 + t_6 &= T_6\\
t_7 + t_8 + \ldots + t_{14} &= T_{14},\\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

dan zijn de termen der reeks t_0, $2t_1$, $4t_3$, $8t_7$, $16t_{15}$..... van den tweeden term af grooter, dan die der reeks:

$$T_0,\ T_2,\ T_6,\ T_{14}\ldots\ldots$$

Maar $T_0+T_2+T_6+T_{14}+\ldots = t_0+t_1+t_2+t_3+t_4+t_5+\ldots$ en divergeert derhalve; daarom zal ook de reeks

$$t_0,\ 2t_1,\ 4t_3,\ 8t_7,\ 16t_{15}$$

in dit geval divergeeren. Het bewijs van het omgekeerde laten wij aan den Lezer.

De voorgaande stelling is bij het beoordeelen van de convergentie der reeksen van zeer veel nut. Wij willen haar toepassen op de reeks:

$$1,\ \frac{1}{2^\alpha},\ \frac{1}{3^\alpha},\ \frac{1}{4^\alpha},\ \frac{1}{5^\alpha},\ \frac{1}{6^\alpha}\ldots\ldots$$

Hieruit leidt men af de reeks:

$$1 + 2\,.\,\frac{1}{2^\alpha} + 4\,.\,\frac{1}{4^\alpha} + 8\,.\,\frac{1}{8^\alpha} + 16\,.\,\frac{1}{16^\alpha} + \ldots\ldots,$$

of $1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{4^{\alpha-1}} + \frac{1}{8^{\alpha-1}} + \frac{1}{16^{\alpha-1}} + \ldots\ldots$

d. i. $1 + \frac{1}{2^{1(\alpha-1)}} + \frac{1}{2^{2(\alpha-1)}} + \frac{1}{2^{3(\alpha-1)}} + \frac{1}{2^{4(\alpha-1)}} + \ldots$

Deze reeks nu is eene meetkundige, waarvan de reden $\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1}$ is en zal dus convergeeren, indien $\alpha > 1$. Is $\alpha < 1$ of $\alpha = 1$, dan wordt de reden $>$ of $= 1$ en de reeks wordt divergent.

Stellen wij bijv. $\alpha = 1$, dan vinden wij, dat de reeks

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} \ldots\ldots$$

zal divergeeren, omdat zulks het geval is met

$$1 + \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^{3.0}} + \frac{1}{2^{3.0}} + \text{enz.}$$

d. i. met $1 + 1 + 1 + 1 + 1 \ldots\ldots$

Eveneens vindt men, door $\alpha = \frac{1}{2}$ te stellen, dat de reeks

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \ldots\ldots$$

divergent is. (Vergel. N°. 4.)

9. Stelling. *Wanneer de breuk* $\dfrac{\log t_n}{\log \frac{1}{n}}$ *voor oneindige aangroeiing van n voortdurend de limiet L nadert, dan is de reeks* $t_0, t_1, t_2 \ldots\ldots$ *convergent of divergent, naar gelang* $L > 1$ *of* $L < 1$.

Bewijs. Nemen wij eene waarde, zoodanig, dat $L > a > 1$, dan zal, omdat $\dfrac{\log t_n}{\log \frac{1}{n}}$ steeds meer en meer tot L tracht te naderen, van eene zekere waarde van n af

$$\frac{\log t_n}{\log \frac{1}{n}} = \frac{\log \frac{1}{t_n}}{\log n} > a;$$

dus ook $\log \frac{1}{t_n} > a \log n$, of $\log \frac{1}{t_n} > \log n^a$; d. i. $\frac{1}{t_n} > n^a$;

$$\text{of } t_n < \frac{1}{n^a}.$$

De termen der reeks $t_0, t_1, t_2, t_3, t_4 \ldots . t_n, t_{n+1} \ldots \ldots$ worden eens kleiner, dan die der reeks

$$1, \frac{1}{2^a}, \frac{1}{3^a}, \frac{1}{4^a} \ldots . \frac{1}{n^a}, \frac{1}{(n+1)^a} \ldots \ldots$$

de laatste convergeert voor $a > 1$, derhalve zal zulks ook het geval zijn met de eerste.

Is $L < 1$, dan kan men a zoodanig bepalen, dat $L < a < 1$; derhalve vindt men $t_n > \frac{1}{n^a}$. Hierin is $a < 1$, dus zal de reeks

$$t_0, t_1, t_2, t_3 \ldots \ldots t_n, t_{n+1} \ldots \ldots$$

in dat geval divergeeren.

10. De stellingen, in de vorige N°.'s aangegeven, wijzen de convergentie slechts aan voor $L <$ of > 1. Voor het geval, dat L gelijk aan 1 is, laten zij zulks onbeslist. Hier volgen nu drie stellingen, die in dat geval van veel nut kunnen zijn.

Stelling. *De reeks* $t_0 + t_1 + t_2 + t_3 \ldots \ldots$, *welke slechts uit positieve termen bestaat, convergeert, wanneer men heeft*

$$\lim \left\{ n \left(\frac{t_n}{t_{n+1}} - 1 \right) \right\} > 1;$$

zij divergeert, wanneer de waarde van deze limiet kleiner is dan 1.

Bewijs. Men heeft identiek:

$$\frac{a_0 a_1 a_2 \ldots a_{n-1}}{b_0 b_1 b_2 \ldots b_{n-1}} = 1 + \frac{a_0 - b_0}{b_0} + \frac{a_1 - b_1}{b_1} \cdot \frac{a_0}{b_0} + \frac{a_2 - b_2}{b_2} \cdot \frac{a_0 a_1}{b_0 b_1} +$$

$$\ldots \ldots \frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{b_{n-1}} \cdot \frac{a_0 a_1 \ldots \ldots a_{n-2}}{b_0 b_1 \ldots \ldots b_{n-2}} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

waarvan men zich kan overtuigen door te stellen:

$$\frac{a_0 - b_0}{b_0} = \frac{a_0}{b_0} - 1, \quad \frac{a_1 - b_1}{b_1} = \frac{a_1}{b_1} - 1 \ldots \ldots$$

en dan alle bewerkingen te verrichten.

Stelt men nu in (1):

$a_0 = a, a_1 = a+1, a_2 = a+2, a_3 = a+3, \ldots a_{n-1} = a+n-1,$
$b_0 = b, b_1 = b+1, b_2 = b+2, b_3 = b+3, \ldots b_{n-1} = b+n-1,$

waarin a en b willekeurige positieve getallen zijn, dan is:

$$\frac{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)}{b(b+1)(b+2)\ldots(b+n-1)} = 1 + \frac{a-b}{b} + \frac{(a-b)}{b+1}\cdot\frac{a}{b} +$$

$$+\frac{(a-b)}{b+2}\cdot\frac{a(a+1)}{b(b+1)} + \ldots + \frac{a-b}{b+n-1}\times\frac{a(a+1)\ldots(a+n-2)}{b(b+1)\ldots(b+n-2)} \ldots (2)$$

Zoodra wij nu voor $n = \infty$ de limiet kunnen bepalen, waartoe het product, dat het eerste lid dezer vergelijking uitmaakt, nadert, dan hebben wij de som gevonden van een oneindig aantal termen van de reeks, die het tweede lid uitmaakt. Wij hebben al aanstonds twee gevallen, namelijk $a < b$ of $a > b$; want $a = b$ zou $1 = 1$ opleveren en kan dus niet verder in aanmerking komen. Deze twee gevallen kunnen echter tot één gebracht worden, want is

$$\lim \frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)}{b(b+1)\ldots(b+n-1)} = L \text{ voor } a < b,$$

dan is:

$$\lim \frac{b(b+1)\ldots(b+n-1)}{a(a+1)\ldots(a+n-1)} = \frac{1}{L} \text{ voor } a < b;$$

en wanneer men hierin $b = \alpha$ en $a = \beta$ stelt:

$$\lim \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)} = \frac{1}{L} \text{ voor } \beta < \alpha \ldots \text{ (M)}$$

Indien wij dus nemen $b > a$, dan kunnen zich wederom twee gevallen voordoen: a en b kunnen beide positieve geheele getallen zijn, of zij zijn zulks niet.

A. Zij dus $b > a$ en $b = a + k$; b en a positief en geheel. In het eerste lid van de vergelijking (2), te weten

$$\frac{a(a+1)(a+2)\ldots\ldots(a+n-1)}{b(b+1)(b+2)\ldots\ldots(b+n-1)},$$

waarin n nog geheel willekeurig is, kan men $n > k+1$ nemen en vindt dan

$$\frac{a(a+1)(a+2)\ldots\ldots(a+k-1)(a+k)(a+k+1)\ldots(a+n-1)}{(a+k)(a+k+1)\ldots(a+n-1)(a+n)\ldots\ldots\ldots(a+n+k-1)},$$

en na vereenvoudiging:

$$\frac{a(a+1)(a+2)\ldots\ldots\ldots(a+k-1)}{(a+n)(a+n+1)\ldots(a+n+k-1)}.$$

Wordt hierin $n=\infty$, dan is

$$\lim \frac{a}{a+n}=0,\quad \lim \frac{a+1}{a+n+1}=0 \ldots . \lim \frac{a+k-1}{a+n+k-1}=0,$$

derhalve:

$$\lim \frac{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)}{b(b+1)(b+2)\ldots(b+n-1)}=\lim \frac{a(a+1)(a+2)\ldots\ldots\ldots(a+k-1)}{(a+n)(a+n+1)\ldots(a+n+k-1)}=0$$

voor $b>a$ en a en b positieve geheele getallen.

B. Zijn a en b niet tegelijk geheele positieve getallen, maar zijn ze ten minste rationeel, dan kan men ze tot denzelfden noemer herleiden. Stellen wij dan $a=\frac{\alpha}{\gamma}$ en $b=\frac{\beta}{\gamma}$ en α, β en γ geheele positieve getallen, dan zal, omdat $b>a$, ook $\beta>\alpha$.

Het eerste lid van de vergelijking (2) krijgt dan de volgende gedaante:

$$\frac{\alpha(\alpha+\gamma)(\alpha+2\gamma)\ldots\ldots\{\alpha+(n-1)\gamma\}}{\beta(\beta+\gamma)(\beta+2\gamma)\ldots\ldots\{\beta+(n-1)\gamma\}}$$

Omdat eene echte breuk grooter wordt, indien teller en noemer met een zelfde getal vermeerderd worden, en men dus heeft:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta},\quad \frac{\alpha}{\beta}<\frac{\alpha+1}{\beta+1},\quad \frac{\alpha}{\beta}<\frac{\alpha+2}{\beta+2}\ldots\ldots\frac{\alpha}{\beta}<\frac{\alpha+\gamma-1}{\beta+\gamma-1}$$

is ook

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\gamma}<\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots\ldots(\alpha+\gamma-1)}{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots\ldots(\beta+\gamma-1)}\ldots\ldots \quad (3)$$

Schrijft men nu voor α en β achtereenvolgens $\alpha+\gamma$, $\beta+\gamma$; $\alpha+2\gamma$, $\beta+2\gamma$ enz. tot $\alpha+(n-1)\gamma$ en $\beta+(n-1)\gamma$, dan vindt men:

$$\left(\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\gamma}\right)^{\gamma}<\frac{(\alpha+\gamma)(\alpha+\gamma+1)\ldots(\alpha+2\gamma-1)}{(\beta+\gamma)(\beta+\gamma+1)\ldots(\beta+2\gamma-1)},$$

$$\left(\frac{\alpha+2\gamma}{\beta+2\gamma}\right)^{\gamma}<\frac{(\alpha+2\gamma)(\alpha+2\gamma+1)\ldots(\alpha+3\gamma-1)}{(\beta+2\gamma)(\beta+2\gamma+1)\ldots(\beta+3\gamma-1)},$$

. . . . . .

$$\left\{\frac{\alpha+(n-1)\gamma}{\beta+(n-1)\gamma}\right\}^{\gamma} < \frac{\left\{\alpha+(n-1)\gamma\right\}\left\{\alpha+(n-1)\gamma+1\right\}\ldots\left\{\alpha+n\gamma-1\right\}}{\left\{\beta+(n-1)\gamma\right\}\left\{\beta+(n-1)\gamma+1\right\}\ldots\left\{\beta+n\gamma-1\right\}}.$$

Vermenigvuldigt men deze ongelijkheden bij (3) te beginnen met elkander, dan komt er:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\gamma}\left(\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\gamma}\right)^{\gamma}\left(\frac{\alpha+2\gamma}{\beta+2\gamma}\right)^{\gamma},\ldots\left\{\frac{\alpha+(n-1)\gamma}{\beta+(n-1)\gamma}\right\}^{\gamma} < \frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha+1}{\beta+1}\cdots\frac{\alpha+n\gamma-1}{\beta+n\gamma-1}$$

of indien men $n\gamma = m$ neemt, waarin n, γ en m geheele getallen zijn,

$$\left\{\frac{\alpha(\alpha+\gamma)(\alpha+2\gamma)\ldots\left\{\alpha+(n-1)\gamma\right\}}{\beta(\beta+\gamma)(\beta+2\gamma)\ldots\left\{\beta+(n-1)\gamma\right\}}\right\}^{\gamma} < \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+m-1)}{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+m-1)}.$$

Indien nu n en dus ook m tot in 't oneindige toeneemt, dan is de limiet van het tweede lid dezer vergelijking van ongelijkheid gelijk aan nul; derhalve:

$$\lim \frac{\alpha(\alpha+\gamma)\ldots\left\{\alpha+(n-1)\gamma\right\}}{\beta(\beta+\gamma)\ldots\left\{\beta+(n-1)\gamma\right\}} = 0 \text{ voor } \beta > \alpha;$$

dus ook:

$$\lim \frac{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)}{b(b+1)(b+2)\ldots(b+n-1)} = 0 \text{ voor } b > a.$$

Dewijl men alle irrationeele getallen zoo nauwkeurig als men zulks verlangt door rationeele breuken voor kan stellen, gaat de convergentie ook door voor irrationeele waarden van a en b, indien slechts $b > a$.

Nemen wij nu in de vergelijking (2) $n = \infty$ dan heeft men:

$$0 = 1 + \frac{a-b}{b}\left\{1 + \frac{a}{b+1} + \frac{a(a+1)}{(b+1)(b+2)} + \ldots\right\}$$

waarvoor men ook schrijven kan:

$$\frac{b}{b-a} = 1 + \frac{a}{b+1} + \frac{a(a+1)}{(b+1)(b+2)} + \ldots$$

en indien men $b-1$ voor b schrijft, mits $b-1 > a$:

$$\frac{b-1}{b-a-1} = 1 + \frac{a}{b} + \frac{a(a+1)}{b(b+1)} + \frac{a(a+1)(a+2)}{b(b+1)(b+2)} \ldots\ldots (4)$$

Dat nu de reeks (1) voor $a > b$ divergeert, volgt uit de vergelijking (M); want alsdan is:

$$\lim \frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)}{b(b+1)\ldots(b+n-1)} = \frac{1}{L} = \frac{1}{0} = \infty .$$

Bovendien vindt men zulks gemakkelijk door in A

$$a = b + k$$

te stellen enz. Dit wordt verder aan den Lezer overgelaten.

Om nu tot eene algemeene limietbepaling te komen in (4) heeft men:

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{\frac{a(a+1)(a+2)\ldots\ldots(a+n)}{b(b+1)(b+2)\ldots\ldots(b+n)}}{\frac{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)}{b(b+1)(b+2)\ldots(b+n-1)}} = \frac{a+n}{b+n} \text{ ; waarin } b > a+1.$$

Eene reeks zal dus convergeeren, indien van een zekeren term het quotiënt

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} < \frac{a+n}{b+n} \text{ en } b > a+1 \text{ (Zie n°. 2).}$$

of

$$\frac{t_n}{t_{n+1}} > \frac{b+n}{a+n}$$

d. i.:

$$n\left(\frac{t_n}{t_{n+1}} - 1\right) > \left\{\left(\frac{b+n}{a+n} - 1\right)n = \frac{n}{a+n}(b-a)\right\}.$$

Neemt men hierin $n = \infty$, dan volgt daaruit:

$$\lim\left\{n\left(\frac{t_n}{t_{n+1}} - 1\right)\right\} > b-a, \text{ maar omdat } b-a > 1$$

$$\lim\left\{n\left(\frac{t_n}{t_{n+1}} - 1\right)\right\} > 1.$$

Heeft men bijv. de reeks:

$$1 + \frac{\alpha.\beta}{1.\gamma} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.\ 2.\ \gamma(\gamma+1)} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.\ 2.\ 3.\ \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} + \text{enz.}$$

dan is $$n\left(\frac{t_n}{t_{n+1}} - 1\right) = \frac{1}{\frac{\alpha}{n} + 1} \times \frac{\gamma + 1 - \alpha - \beta + \frac{\gamma - \alpha\beta}{n}}{\frac{\beta}{n} + 1}$$

bijgevolg:

$$\lim \left\{ n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) \right\} = \gamma + 1 - \alpha - \beta.$$

Voor de convergentie wordt vereischt:

$$\gamma + 1 - \alpha - \beta > 1$$
$$\gamma > \alpha + \beta.$$

11. Stelling. *Wanneer* $\frac{t_{n+1}}{t_n}$ *wordt voorgesteld door* $1 - \frac{r}{n}$, *dan zal eene reeks, waarin de limiet van het quotiënt* $\frac{t_{n+1}}{t_n} = 1$, *convergeeren of divergeeren, naar gelang* $nr >$ *of* < 1 *is. Voor* $nr = 1$ *blijft de convergentie of divergentie onbeslist.*

Volgens N°. 8 is de reeks $\frac{1}{n^\alpha}, \frac{1}{(n+1)^\alpha}, \frac{1}{(n+2)^\alpha}, \frac{1}{(n+3)^\alpha} \ldots$ convergent voor $\alpha > 1$, divergent voor $\alpha < 1$.

In geval $\alpha > 1$, zal de gestelde reeks ook convergeeren, indien

$$S_{m+n} - S_m < \frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{(n+1)^\alpha} + \frac{1}{(n+2)^\alpha} \ldots\ldots;$$

want het tweede lid nadert tot 0, derhalve zal het eerste zulks zooveel te meer doen.

Maar $S_{m+n} - S_m = t_m + t_{m+1} + t_{m+2} + \ldots\ldots$,
derhalve zal deze laatste reeks convergeeren, indien

$$n \frac{t_{p+1}}{t_p} < 1, \text{ dus } < \frac{\frac{1}{(n+1)^\alpha}}{\frac{1}{n^\alpha}} \text{ d. i. } < \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} = \left(\frac{n+1}{n} \right)^{-\alpha} = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-\alpha},$$

$$\text{omdat } \lim \frac{\frac{1}{(n+1)^\alpha}}{\frac{1}{n^\alpha}} \text{ gelijk is aan } 1.$$

Ontwikkelen wij $\left(1 + \frac{1}{a}\right)^{-\alpha}$ volgens het binomium van NEWTON, dan is:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.\ 2} \cdot \frac{1}{n^2} - \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{1.\ 2\ 3} \cdot \frac{1}{n^3} + \ldots$$

$$\text{Maar } \left\{\lim \frac{t_{p+1}}{t_p} = 1 - r\right\} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\alpha};$$

$$\text{derhalve } 1 - r < 1 - \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.\ 2} \cdot \frac{1}{n^2} - \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{1.\ 2.\ 3} \cdot \frac{1}{n^3} + \ldots.$$

Gaan wij hierin over tot $n = \infty$ en blijft α eindig, dan is eindelijk:

$$nr > \alpha > 1$$

een voorwaarde van de convergentie der opgegeven reeks.

$$\text{Is } s_{m+n} - s_n > \frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{(n+1)^\alpha} + \frac{1}{(n+2)^\alpha} + \ldots..$$

en $\alpha < 1$, dan divergeert de reeks

$$t_n + t_{n+1} + t_{n+2} + \ldots..; \text{ dus ook als } \lim \frac{t_{p+1}}{t_p} > 1,$$

$$\text{dus} > \frac{\frac{1}{(n+1)^\alpha}}{\frac{1}{n^\alpha}}, \text{ d. i. } > 1.$$

$$\text{Daaruit volgt verder: } 1 - r > 1 - \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.\ 2} \frac{1}{n^2} - \ldots..$$

Derhalve is de reeks divergent voor $nr < \alpha < 1$.

12. Stelling. *Wanneer ξ een positief getal voorstelt, zoo klein als men zulks verkiest maar steeds > 0, dan zal eene reeks convergeeren, indien $\lim n^{1+\xi} t_n$ niet oneindig groot wordt; indien $\lim nt_n$ niet gelijk 0 is, is de reeks divergent. Onbeslist blijft de convergentie, indien tegelijkertijd $n^{1+\xi} t_n = \infty$ en $nt_n = 0$ zijn.*

Bewijs. Indien $\lim n^{1+\xi} t_n$ niet oneindig groot kan worden, is er een eindig getal p aan te wijzen zoodanig,

$$\text{dat } t_n < \frac{p}{n^{1+\xi}},\ t_{n+1} < \frac{p}{(n+1)^{1+\xi}},\ t_{n+2} < \frac{p}{(n+2)^{1+\xi}}, \ldots$$

derhalve

$$t_n + t_{n+1} + t_{n+2} + \ldots. < p \left\{ \frac{1}{n^{1+\xi}} + \frac{1}{(n+1)^{1+\xi}} + \frac{1}{(n+2)^{1+\xi}} + \ldots \right.$$

Maar de tweede reeks convergeert volgens N°. 8, derhalve zoo veel te meer de eerste.

Ware nt_n niet $= 0$ voor eene groote waarde van n, dan kan men een getal q aanwijzen zoodanig,

dat $t_n > \frac{q}{n}$, $t_{n+1} > \frac{q}{n+1}$, $t_{n+2} > \frac{q}{n+2}$ .....;

derhalve

$$t_n + t_{n+1} + t_{n+2} + \ldots > q\left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \ldots\right\}.$$

Maar de tweede reeks divergeert, dus nog zoo veel te meer de eerste.

13. Stelling. *Wanneer gegeven zijn de convergeerende reeksen:*

$$s = t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + \ldots\ldots \quad \text{en}$$
$$s' = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots\ldots,$$

dan zal de reeks

$$t_0 + u_0,\ t_1 + u_1,\ t_2 + u_2,\ t_3 + u_3, \ldots\ldots$$

eveneens convergeeren en $s + s'$ tot limiet harer som hebben.

Bewijs. Dewijl de reeksen convergeeren, kan men aan n zoodanige waarde geven, dat $s - s_n$ en $s' - s'_n$ kleiner zijn, dan eenig getal, hoe klein ook genomen, bijv. $< \frac{1}{2}\Delta$, dan zal men hebben:

$$(s - s_n) + (s' - s'_n) < \Delta,$$

of $$(s + s') - (s_n + s'_n) < \Delta.$$

Maar $s_n + s'_n = (t_0 + u_0) + (t_1 + u_1) + (t_2 + u_2) + \ldots + (t_{n-1} + u_{n-1})$; men zal dus n altijd zoo groot kunnen nemen, dat $(s + s') - (s_n + s'_n)$ kleiner is, dan elk gegeven getal:

de reeks $t_0 + t_0,\ t_1 + u_1,\ t_2 + u_2,\ t_3 + u_3 \ldots\ldots$

is derhalve convergent.

Aanmerking. Vergelijk met deze stelling en de volgende de stellingen van N°. 2.

14. Stelling. *Wanneer* $t_0, t_1, t_2 \ldots$ *en* $u_0, u_1, u_2 \ldots$ *twee convergeerende reeksen zijn, wier sommen* s *en* s' *tot limiet hebben, dan zal* ss' *de limiet zijn van de reeks:*

$$\begin{aligned}
&t_0 u_0\\
&t_0 u_1 + t_1 u_0\\
&t_0 u_2 + t_1 u_1 + t_2 u_0\\
&t_0 u_3 + t_1 u_2 + t_2 u_1 + t_3 u_0\\
&t_0 u_4 + t_1 u_3 + t_2 u_2 + t_3 u_1 + t_4 u_0.\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Bewijs. Stellen wij de som van n termen der eerste reeks voor door s_n, die van de tweede door s'_n, die van de derde door S_n, dan is:

$$\begin{aligned}
s_n \times s'_n = {} & t_0u_0+t_1u_0+t_2u_0+t_3u_0+t_4u_0+\ldots..t_{n-1}u_0\\
& t_0u_1+t_1u_1+t_2u_1+t_3u_1+t_4u_1+\ldots..t_{n-1}u_1\\
& t_0u_2+t_1u_2+t_2u_2+t_3u_2+t_4u_2+\ldots..t_{n-1}u_2\\
& t_0u_3+t_1u_3+t_2u_3+t_3u_3+t_4u_3+\ldots..t_{n-1}u_3\\
& t_0u_4+t_1u_4+t_2u_4+t_3u_4+t_4u_4+\ldots..t_{n-1}u_4\\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
t_0u_{n-1}+t_1u_{n-1}+t_2u_{n-1}+t_3u_{n-1}+t_4u_{n-1}+\ldots..t_{n-1}u_{n-1}&
\end{aligned}$$

Rangschikt men dit product diagonaalsgewijze, van den linkerbovenhoek beginnende eerst één term nemende, daarna twee termen, dan drie, enz., dan vindt men $S_n < s_n \times s'_n$.

Zij verder m het grootste getal, dat in $\frac{n-1}{2}$ begrepen is, dus $m = \frac{n-1}{2}$ of $m = \frac{n-2}{2}$ naar gelang n oneven of even is, dan is

$$S_n > s_{m+1} \times s'_{m+1}.$$

Laten wij nu n voortdurend toenemen, dan is zulks ook het geval met m.

Maar omdat $s_n \times s'_n > S_n > s_{m+1} \times s'_{m+1}$,

zal ook $\lim s_n \times s'_n > \lim S_n > \lim s_{m+1} \times s'_{m+1}$.

Maar $\lim s_n . s'_n = \lim s_{m+1} . s'_{m+1} = ss'$, derhalve zal ook $\lim S_n = s'$.

Aanmerking. De Lezer ziet misschien niet duidelijk in, waarom

$$S_n > s_{m+1} \times s'_{m+1},$$

indien $m = \frac{n-1}{2}$ of $= \frac{n-2}{2}$ genomen wordt. Laat ons de som eens nemen van een bepaald aantal termen:

$$\begin{aligned} s_6 \times s'_6 = {} & t_0u_0 + t_1u_0 + t_2u_0 + t_3u_0 + t_4u_0 + t_5u_0 \\ & t_0u_1 + t_1u_1 + t_2u_1 + t_3u_1 + t_4u_1 + t_5u_1 \\ & t_0u_2 + t_1u_2 + t_2u_2 + t_3u_2 + t_4u_2 + t_5u_2 \\ & t_0u_3 + t_1u_3 + t_2u_3 + t_3u_3 + t_4u_3 + t_5u_3 \\ & t_0u_4 + t_1u_4 + t_2u_4 + t_3u_4 + t_4u_4 + t_5u_4 \\ & t_0u_5 + t_1u_5 + t_2u_5 + t_3u_5 + t_4u_5 + t_5u_5 \end{aligned}$$

Neem ik nu de som der termen diagonaalsgewijze, dan vind ik:

$$\begin{aligned} & t_0u_0 \qquad n = 6 \quad \frac{n-2}{2} = m; \; m+1 = 3 \\ & t_0u_1 + t_1u_0 \\ & t_0u_2 + t_1u_1 + t_2u_0 \\ & t_0u_3 + t_1u_2 + t_2u_1 + t_3u_0 \\ & t_0u_4 + t_1u_3 + t_2u_2 + t_3u_1 + t_4u_0 \\ & t_0u_5 + t_1u_4 + t_2u_3 + t_3u_2 + t_4u_1 + t_5u_0 \\ & \quad + t_1u_5 + t_2u_4 + t_3u_3 + t_4u_2 + t_5u_1 \\ & \quad\quad + t_2u_5 + t_3u_4 + t_4u_3 + t_5u_2 \\ & \quad\quad\quad + t_3u_5 + t_4u_4 + t_5u_3 \\ & \quad\quad\quad\quad + t_4u_5 + t_5u_4 \\ & \quad\quad\quad\quad\quad + t_5u_5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} & t_0u_0 \\ & t_0u_1 + t_1u_0 \\ & t_0u_2 + t_1u_1 + t_2u_0 \\ & \quad + t_1u_2 + t_2u_1 \\ & \quad\quad + t_2u_2 \end{aligned}$$

Hieruit nu ziet men aanstonds, hoeveel termen aan elke polynomium ontbreken, om termen van de begeerde reeks te zijn, zoodat het duidelijk is, dat

$S_n < s_n \times s'_n$; in dit geval $n = 6$;

$S_n > s_{m+1} \times s'_{m+1}$; in dit geval $m = 3$.

B. Theorema's voor reeksen, waarvan de termen door het teeken + of — met elkander verbonden zijn.

15. Wanneer wij de absolute waarden van de termen der reeks $t_0, t_1, t_2 \ldots\ldots$ voorstellen door $p_0, p_1, p_2, p_3 \ldots\ldots$, en is de absolute waarde der som

$$t_0+t_1+t_2+t_3+\ldots\ldots t_{n-1}$$

nooit grooter, dan

$$p_0+p_1+p_2+p_3+\ldots\ldots p_{n-1}.$$

Evenmin is

$$t_n+t_{n+1}+t_{n+2}+\ldots t_{n+m-1}>p_n+p_{n+1}+p_{n+2}+\ldots p_{n+m-1}.$$

Stellen wij nu

$$s_n=t_0+t_1+t_2+\ldots\ldots t_{n-1},$$

en $$s'_n=p_0+p_1+p_2+\ldots\ldots p_{n-1},$$

dan is de absolute waarde van $s_{n+m}-s_n$ nooit grooter, dan $s'_{n+m}-s'_n$.

Convergeert dus de reeks $p_0, p_1, p_2, p_3\ldots\ldots$, dan zal zulks zoo veel te meer het geval zijn met de reeks $t_0, t_1, t_2, t_3\ldots\ldots$, omdat men voor eene steeds toenemende waarde van n, $s_{n+m}-s_n$ kleiner kan doen worden, dan elke grootheid, hoe klein ook genomen.

Wanneer voor aangroeiingen van n de termen $p_n, p_{n+1}, p_{n+2}\ldots$ niet tot 0 naderen, is de reeks divergent, want:

$$\left.\begin{array}{l} s_{n+1}-s_n=t_n \\ s_{n+2}-s_{n+1}=t_{n+1} \\ s_{n+3}-s_{n+2}=t_{n+2} \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}, \text{ waarvan de absolute waarden zijn: } \left\{\begin{array}{l} p_n \\ p_{n+1} \\ p_{n+2} \\ \ldots \end{array}\right.$$

dewijl deze nu volgens de veronderstelling niet tot 0 naderen, naderen ook de verschillende sommen niet tot 0 en de reeks $t_0, t_1, t_2\ldots\ldots$ blijkt divergent te zijn.

16. Stelling. *De reeks* $p_0, p_1, p_2, p_3\ldots\ldots$ *is convergent* (N°. 5), *wanneer de waarden van* $(p_n)^{\frac{1}{n}}$ *tot eene limiet naderen* <1. *Naderen deze waarden voor aangroeiingen van* n *tot eene limiet* >1, *dan kan* p_n *nooit tot* 0 *naderen.*

Bewijs. Uit

$$\left.\begin{array}{l} (p_n)^{\frac{1}{n}}>1 \\ (p_{n+1})^{\frac{1}{n+1}}>1 \\ (p_{n+2})^{\frac{1}{n+2}}>1 \end{array}\right\} \text{ volgt onmiddellijk: } \left\{\begin{array}{l} p_n>1, \\ p_{n+1}>1, \\ p_{n+2}>1, \end{array}\right.$$

zoodat in dit geval p_n nooit tot de grenswaarde 0 kan naderen. Wij kunnen dus de stelling van N°. 5 meer algemeen maken door de volgende bewoordingen: *Wanneer p_n de* absolute waarde *is van den algemeenen term van de reeks $t_0, t_1, t_2 \ldots\ldots$, dan zal de reeks convergeeren of divergeeren, naar gelang de waarden van $(p_n)^{\frac{1}{n}}$, voor toenemende aangroeiingen van n, eene limiet L naderen, die kleiner of grooter is dan* 1.

17. Stelling. *Wanneer voor aangroeiende waarden van n de absolute waarde der verhouding $\frac{t_{n+1}}{t_n}$ eene limiet L nadert, dan is de reeks convergent of divergent, naar gelang $L < 1$ of $L > 1$.*

Bewijs. Met behulp van het vorige N°. en van N°. 6 kan het bewijs hiervan zoo gemakkelijk geleverd worden, dat wij het gerustelijk overlaten aan den Lezer.

18. Stelling. *Wanneer de termen eener reeks afwisselend positief en negatief zijn en hunne absolute waarden met het aangroeien van den index meer en meer tot* 0 *naderen, dan is de reeks convergent.*

Bewijs. Zij de gegeven reeks $t_0 - t_1 + t_2 - t_3 + t_4 - t_5 \ldots + t_{n-2} - t_{n-1} + \ldots$.

Schrijft men hiervoor:

$$S_n = (t_0 - t_1) + (t_2 - t_3) + \ldots\ldots + (t_{n-2} - t_{n-1}),$$

dan blijkt daaruit, omdat $t_0 > t_1$, $t_2 > t_3$, $\ldots\ldots t_{n-2} > t_{n-1}$, dat ook $S_n > t_0 - t_1$.

Schrijft men echter:

$$S_n = t_0 - (t_1 - t_2) - (t_3 - t_4) - (t_5 - t_6) - \ldots\ldots\ldots$$

dan zal, omdat $t_1 > t_2$, $t_3 > t_4 \ldots\ldots$

ook $S_n < t_0$.

Aangezien nu S_n voor een willekeurige waarde van n gelegen is tusschen t_0 en $t_0 - t_1$, moet de opgegeven reeks convergent zijn.

Wij vonden in N°. 9, dat de reeks $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots\ldots$ divergeerde; dezelfde reeks met afwisselende teekens zal volgens de zoo even bewezen stelling convergeeren.

19. Stelling. *Wanneer alle termen der convergeerende reeks*

$$p_0 , p_1 , p_2 , p_3 \ldots\ldots$$

positief zijn en $q_0 , q_1 , q_2 , q_3 \ldots\ldots$ *eene reeks is, waarvan alle termen positief en kleiner dan de eenheid zijn, dan is ook*

$$p_0q_0 , p_1q_1 , p_2q_2 , p_3q_3 \ldots\ldots$$

eene convergeerende reeks.

Bewijs. Stellen wij $s_n = p_0 + p_1 + p_2 + \ldots\ldots p_{n-1}$ en

$$s'_n = p_0q_0 + p_1q_1 + p_2q_2 + \ldots\ldots p_{n-1}q_{n-1} ,$$

dan is $s_{n+m} - s_n = p_n + p_{n+1} + p_{n+2} + p_{n+3} + \ldots\ldots p_{n+m-1}$,

en $s'_{n+m} - s'_n = p_nq_n + p_{n+1}q_{n+1} + p_{n+2}q_{n+2} + \ldots\ldots p_{n+m-1}q_{n+m-1}$.

Dewijl nu $q_n < 1$, $q_{n+1} < 1$, $q_{n+2} < 1$, enz.,

is $p_nq_n < p_n$, $p_{n+1}q_{n+1} < p_{n+1}$, $p_{n+2}q_{n+2} < p_{n+2}$, enz.

en dus $s_{n+m} - s_n > s'_{n+m} - s'_n$.

Omdat nu $s_{n+m} - s_n$, voor aangroeiingen van n, steeds meer tot 0 nadert, zal zulks ook het geval zijn met $s'_{n+m} - s'_n$; de reeks

$$p_0q_0 , p_1q_1 , p_2q_2 , p_3q_3 , \ldots\ldots$$

is dus convergent.

20. Stelling. *Wanneer* $p_0 , p_1 , p_2 , p_3 \ldots\ldots$ *eene convergente reeks met positieve termen is en* $t_0 , t_1 , t_2 , t_3 , t_4 \ldots$ *termen zijn, die, wat hunne absolute waarden betreft, kleiner zijn dan* 1, *maar positief of negatief kunnen zijn, dan is*

$$p_0t_0 , p_1t_1 , p_2t_2 , p_3t_3 \ldots\ldots$$

steeds eene convergeerende reeks.

Bewijs. Zijn namelijk t'_0, t'_1, t'_2, t'_3 enz. respectievelijk de absolute waarden van t_0, t_1, t_2, $t_3 \ldots\ldots$, dan is de reeks

$$p_0t'_0 , p_1t'_1 , p_2t'_2 , p_3t'_3 \ldots\ldots$$

convergent (Vergel. N°. 19); derhalve is zulks ook het geval voor de reeks

$$p_0t_0 , p_1t_1 , p_2t_2 , p_3t_3 \ldots\ldots$$

(Vergel. N°. 15).

C. Theorema's voor reeksen, wier termen gerangschikt zijn volgens de opklimmende machten van een veranderlijk argument x en door de teekens $+$ en $-$ aan elkander verbonden kunnen zijn.

21. Stelling. *Wanneer α_n de absolute waarde is van den algemeenen coëfficiënt in de reeks*

$$a_0 , a_1 x , a_2 x^2 , a_3 x^3 , a_4 x^4 \ldots\ldots$$

en ξ eene absolute waarde van x, terwijl de waarden van $(\alpha_n)^{\frac{1}{n}}$ meer en meer de limiet L naderen, dan zal de opgegeven reeks convergeeren of divergeeren, naar gelang $\xi < \frac{1}{L}$ of $\xi > \frac{1}{L}$, d. i. met andere woorden: de reeks is convergent voor alle waarden van x tusschen $x = \frac{1}{L}$ en $x = -\frac{1}{L}$.

Bewijs. Zij gegeven de reeks

$$a_0 , a_1 x , a_2 x^2 , a_3 x^3 \ldots\ldots$$

en stellen wij de absolute waarden van de coëfficiënten harer termen voor door

$$\alpha_0 , \alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3 , \ldots\ldots$$

en is L de grens, waartoe de waarden van $(\alpha_n)^{\frac{1}{n}}$ meer en meer naderen voor achtereenvolgende aangroeiingen van n, dan zal, indien ξ eene positieve waarde van x aanwijst,

$$\lim (\alpha_n \xi^n)^{\frac{1}{n}} = \lim (\alpha_n)^{\frac{1}{n}} . \xi = L\xi .$$

Volgens N°. 16 is dus de reeks convergent of divergent, naar gelang $L\xi < 1$ of $L\xi > 1$, waardoor de stelling bewezen is.

Aanmerking: Het zal den Lezer niet moeilijk vallen, om de stelling van N° 6 ook voor dit geval te bewijzen. Zij luidt alsdan: *Indien de absolute waarde van de verhouding $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, d. i.: indien $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$ steeds tot de limiet L nadert, dan zal de reeks*

$$a_0\,,\ a_1x\,,\ a_2x^2\,,\ a_3x^3\,.....$$

convergeeren voor alle waarden van x tusschen de grenzen $-\frac{1}{L}$ *en* $+\frac{1}{L}$ *en voor alle andere waarden divergeeren.*

22. Zij ter toepassing gegeven de reeks:

$$1\,,\ 2x\,,\ 3x^2\,,\ 4x^3\,,\ 5x^4\,.....$$

Hierin is $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n}$, dus voor $n=\infty$: $\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$.

De opgegeven reeks zal dus convergeeren voor alle waarden van x, tusschen -1 en $+1$; voor alle andere waarden is zij divergent.

Neemt men x juist gelijk aan $\pm\frac{1}{L}$, dan kunnen de reeksen evenzeer convergeeren als divergeeren; neemt men bijv. de reeks

$$x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}\,.....,$$

die convergent is voor alle waarden van x tusschen -1 en $+1$ en substitueert men daarin $x=\pm 1$, dan vindt men voor de eerste waarde
de divergente reeks: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+.....$;
voor de tweede waarde
de convergente reeks: $-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+.....$

Neemt men de reeks:

$$1\,,\ \frac{m}{1}x\,,\ \frac{m(m-1)}{1.\ 2}x^2\,,\ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3.}x^3\,,.....$$

dan is $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{m-n}{n+1}=-\frac{1-\frac{m}{n}}{1+\frac{1}{n}}$ en dus voor $n=\infty$,

$\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=-1$.

Deze reeks is dus convergent, in zooverre x gelegen is tusschen -1 en $+1$; buiten deze grenzen is zij divergent.

De reeks

$$1, \frac{x}{1}, \frac{x^2}{1.2}, \frac{x^3}{1.2.3}, \frac{x^4}{1.2.3.4} \ldots\ldots \text{(zie N°. 7)}$$

is convergent voor alle waarden van x, want

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1}$ en dus voor $n = \infty$, $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$.

De reeks convergeert dus voor alle waarden tusschen $+\frac{1}{L}$ en $-\frac{1}{L}$, d. i. tusschen $-\infty$ en $+\infty$.

De reeks $1, 1.x, 1.2.x^2, 1.2.3.x^3, \ldots\ldots$ is altijd divergent; want $\frac{a_{n+1}}{a_n} = n+1$, dus voor $n = \infty$, $L = \infty$ en $\frac{1}{L} = +0$.

Dewijl tusschen -0 en $+0$ geene waarden van x gelegen kunnen zijn, is de reeks voor alle mogelijke waarden van x divergent.

23. Stelling. *Wanneer de volgende reeksen, wier aantal eindig is,*

$$a_0, a_1x, a_2x^2, a_3x^3, \ldots\ldots$$
$$b_0, b_1x, b_2x^2, b_3x^3, \ldots\ldots$$
$$c_0, c_1x, c_2x^2, c_3x^3, \ldots\ldots$$
$$d_0, d_1x, d_2x^2, d_3x^3, \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

voor dezelfde waarde van x respectievelijk s_a, s_b, s_c, s_d \ldots\ldots tot limiet harer som hebben, dan is voor diezelfde waarde $s_a + s_b + s_c + s_d + \ldots\ldots$, de limiet van de som der reeks

$$(a_0+b_0+c_0+d_0+\ldots\ldots)+(a_1+b_1+c_1+d^1+\ldots\ldots)x + (a_2+b_2+c_2+d_2+\ldots\ldots)x^2+\ldots\ldots$$

Bewijs. Het bewijs dezer stelling voor twee reeksen komt geheel overeen met het bewijs van N°. 13. Wij laten zulks aan den Lezer. Uit het bewijs voor twee reeksen wordt gemakkelijk het betoog voor een willekeurig aantal reeksen afgeleid.

24. Stelling. *Wanneer de reeksen*

$$a_0 , a_1x , a_2x^2 , a_3x^3 , a_4x^4 \ldots\ldots$$
$$b_0 , b_1x , b_2x^2 , b_3x^3 , b_4x^4 \ldots\ldots$$
$$c_0 , c_1x , c_2x^2 , c_3x^3 , c_4x^4 \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

voor eene zelfde waarde van x respectievelijk s_a, s_b, s_c,..... tot limiet harer som hebben, dan is voor dezelfde waarden van x, $s_a \times s_b \times s_c$ ..... de limiet voor de som van de reeks

$$a_0b_0c_0 \ldots + (b_0a_1 + c_0a_1 + a_0b_1 + a_0c_1 + b_0c_1 + \ldots)x + \ldots$$

Bewijs. Ook hiervan blijve het bewijs, dat analoog is met het betoog van N°. 14, aan den Lezer.

Stelt men verder

$$a_0 = b_0 = c_0 = \ldots\ldots$$
$$a_1 = b_1 = c_1 = \ldots\ldots,$$
$$a_2 = b_2 = c_2 = \ldots\ldots$$
enz.,

dan zal voor elke waarde van x, waarvoor de reeks a_0, a_1x, a_2x^2..... convergeert, zulks ook het geval zijn met de ontwikkeling van

$$\{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \ldots\ldots\}^n,$$

waarin n een eindig, positief, geheel getal voorstelt.

25. Stelling. *Eene functie $\varphi(x)$ kan tusschen de grenzen $x = -a$ en $x = +a$ slechts op één wijze, volgens de opklimmende machten van het argument gerangschikt, in eene reeks ontwikkeld worden, die tusschen dezelfde grenzen convergent zal zijn.*

Bewijs. Stellen wij; dat $\varphi(x)$ tusschen de grenzen $-a$ en $+a$ op twee wijzen ontwikkelbaar is; dat men dus heeft:

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \ldots$$

welke reeksen beide voor alle waarden van x tusschen $-a$ en $+a$ gelden.

Stelt men derhalve $x = 0$, dan vindt men onmiddellijk:

$$a_0 = b_0$$

en $x(a_1 + a_2x + a_3x^2 + \ldots\ldots) = x(b_1 + b_2x + b_3x^2 + \ldots\ldots)$;

dus door x deelende:

$$a_1 + a_2x + a_3x^2 + \ldots\ldots = b_1 + b_2x + b_3x^2 \ldots.$$

welke vergelijking wederom waar blijft voor alle waarden van x, enz.

Deze redeneering voortzettende, ziet men, dat $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ...; derhalve is er slechts ééne ontwikkeling volgens de opklimmende machten van het argument mogelijk.

Aanmerking. De vierde afdeeling, namelijk die reeksen, in wier termen imaginaire grootheden voorkomen, zullen wij behandelen bij de goniometrische functiën. Eveneens zullen wij ook onder die afdeeling brengen de zoogenaamde *dubbele reeksen*, wier toepassing niet van belang ontbloot is.

---

§ 24. Over de limieten van de wortels der vergelijking

$$f(x) = 0.$$

1. Wanneer wij in de vergelijking $f(x) = 0$ b en a voor x substitueeren, waarin $b > a$, en daarna de indexreeks opmaken, dan zal, wanneer de laatste drie termen dier indexreeks 0, 0, 1 zijn, $f(x) = 0$ één wortel, maar ook niet meer dan één wortel tusschen a en b hebben. (Hier is natuurlijk alleen sprake van reëele wortels). Alsdan ligt er tusschen die grenzen geen reëele wortel van $f_1(x) = 0$, noch van $f_2(x) = 0$, zoodat, wanneer wij den wortel, welke tusschen a en b ligt, $= \alpha$ stellen en in $f(x) = 0$, x door α vervangen, wel $f(\alpha)$, maar noch $f_1(\alpha)$, noch $f_2(\alpha)$ gelijk aan 0 zullen worden. Wij willen trachten in dit geval nauwere grenzen voor α op te sporen, dan a en b. Zoodra de laatste drie termen der indexreeks 0, 0, zijn, kunnen zich vier gevallen voordoen.

(a) $+\,+\,-$, $+\,-\,+$, $-\,+\,-$, $-\,-\,+$
$0\;0\;1$ $0\;0\;1$ $0\;0\;1$ $0\;0\;1$

(b) $+\,+\,+$, $+\,-\,-$, $-\,+\,+$, $-\,-\,-$.

Wij willen deze gevallen achtereenvolgens beschouwen.

2. Zij gegeven: $+\,+\,-\ldots.f(x-a)$
$+\,+\,+\ldots.f(x-b)$.

Omdat $f_1(x)$ en $f_2(x)$ tusschen a en b niet van teeken veranderen, zijn zij beiden positief. Nemen wij nu b aan als de eerste benaderde waarde van den wortel α, dan kunnen wij stellen $\alpha = b - \beta$, waarin β, omdat b de grootste grens is, positief is.

Beschouwt men nu $f(b-\beta) - f(b)$ als eene functie van β, stelt men bijv. $f(b-\beta) - f(b) = F(\beta)$, dan heeft men volgens § 21, 20:

$$f(b-\beta) = f(b) - \beta f_1(b - \theta\beta),$$

en dewijl $$f(b-\beta) = f(\alpha) = 0,$$

ook $$f(b) - \beta f_1(b - \theta\beta) = 0;$$

dus $$\beta = \frac{f(b)}{f_1(b-\theta\beta)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\xi)$$

Verder is volgens § 21, 20:

$$f_1(b - \theta\beta) = f_1(b) - \theta\beta f_2(b - \theta_1\theta\beta).$$

Nu ligt $b - \theta_1\theta\beta$ tusschen $b-\beta$ en b, d. i.: tusschen α en b, dus ook tusschen a en b, daarom is $f_2(b-\theta_1\theta\beta)$ positief en bijgevolg:

$$f_1(b-\theta\beta) < f_1(b),$$

terwijl ook deze beide grootheden positief zijn. Dewijl nu ook $f(b)$ positief is, zoo is:

$$\frac{f(b)}{f_1(b-\theta\beta)} > \frac{f(b)}{f_1(b)},$$

derhalve volgens (ξ):

$$\beta > \frac{f(b)}{f_1(b)}.$$

Men heeft dus

$$b-\beta < b-\frac{f(b)}{f_1(b)}$$

en, omdat $b-\beta=\alpha$ is,

$$\alpha < b-\frac{f(b)}{f_1(b)}.$$

Omdat verder $f(b)$ en $f_1(b)$ beiden positief zijn, is

$$b-\frac{f(b)}{f_1(b)} < b:$$

derhalve is $b-\frac{f(b)}{f_1(b)}$ een nadere grens dan b. Door deze waarde voor x te substitueeren en hiermede voort te gaan, zal men eene zoo nauwe grens krijgen voor den wortel, als men verkiest.

Beschouwen wij nu de grenswaarde a en stellen wij den wortel $\alpha=a+\gamma$, dan is γ positief, en volgens § 21, 20:

$$f(a+\gamma)=f(a)+\gamma f_1(a+\theta\gamma),$$

of omdat $f(a+\gamma)=(f\alpha)=0$,

$$\gamma=-\frac{f(a)}{f_1(a+\theta\gamma)}.$$

Nu is $a+\theta\gamma$ eene gemiddelde waarde tusschen a en $a+\gamma$ of α, dus ook tusschen a en b; stellen wij daarom $a+\theta\gamma=b-\gamma'$, dan is ook γ' positief en volgens § 21, 20 is

$$f_1(a+\theta\gamma)=f_1(b-\gamma')=f_1(b)-\gamma' f_2(b-\theta\gamma'),$$

waarin wederom $b-\theta\gamma'$ eene gemiddelde waarde is tusschen $b-\gamma'$ en b, dus ook tusschen a en b. Hieruit volgt, dat $f_2(b-\theta\gamma')$ positief is en daarom ook:

$$f_1(a+\theta\gamma) < f_1(b),$$

waaruit tevens blijkt, dat deze beide waarden positief zijn.

Dewijl nu echter $f(a)$ negatief is, heeft men:

$$-\frac{f(a)}{f_1(a+\theta\gamma)} > -\frac{f(a)}{f_1(b)}$$

d. i.: $\gamma > -\frac{f(a)}{f_1(b)}$, of ook $a+\gamma > a-\frac{f(a)}{f_1(b)}$;

of wat hetzelfde is, omdat wij gesteld hebben: $\alpha = a+\gamma$

$$\alpha > a-\frac{f(a)}{f_1(b)}.$$

Maar $\frac{f(a)}{f_1(b)}$ is negatief, $a-\frac{f(a)}{f_1(b)}$ is dus positief, derhalve is $a-\frac{f(a)}{f_1(b)}$ eene nadere grens voor den wortel dan a.

3. Zij in de tweede plaats gegeven:

$$f(x-a): \ + \ - \ +$$
$$f(x-b): \ + \ - \ -.$$

Hier is $f_1(x)$ tusschen a en b steeds negatief en $f_2(x)$ steeds positief. Zij b wederom eene eerste benaderde waarde van den waren wortel α. Zij verder $\alpha = b-\beta$, dan is β positief en volgens § 21, 20:

$$f(b-\beta) = f(\alpha) = f(b) - \beta f_1(b-\theta\beta) = 0,$$

bijgevolg: $$\beta = \frac{f(b)}{f_1(b-\theta\beta)}.$$

Maar $f_1(b-\theta\beta)$ is eene gemiddelde waarde tusschen $b-\beta$ en b, dus tusschen α en b, dus tusschen a en b; stellen wij dus:

$$b-\theta\beta = \alpha+\beta',$$

dan is β' positief en wederom is volgens § 21, 20:

$$f_1(b-\theta\beta) = f_1(a+\beta') = f_1(a) + \beta' f_2(a+\theta\beta'),$$

waarin $a+\theta\beta'$ eene gemiddelde waarde tusschen a en $a+\beta'$, dus tusschen a en b, dus ook positief is. Hieruit blijkt verder

$$f_1(b-\theta\beta) > f_1(a),$$

waarbij nog valt op te merken, dat beide grootheden negatief zijn. Omdat nu ook $f(b)$ negatief is, heeft men:

$$\frac{f(b)}{f_1(b-\theta\beta)} > \frac{f(b)}{f_1(a)};$$

d. i.: $\beta > \frac{f(b)}{f_1(a)}$ en ook $b-\beta < b-\frac{f(b)}{f_1(a)}$;

derhalve wordt:

$$\alpha < b-\frac{f(b)}{f_1(a)};$$ en omdat $\frac{f(b)}{f_1(a)}$ positief is,

is $b-\frac{f(b)}{f_1(a)}$ eene nadere grens van α dan b.

Stellen wij verder $\alpha = a+\gamma$, dan is γ positief en

$$f(a+\gamma) = f(\alpha) = f(a)+\gamma f_1(\alpha+\theta\gamma) = 0;$$

daarom $$\gamma = -\frac{f(a)}{f_1(\alpha+\theta\gamma)}$$

enz. enz.

Op soortgelijke wijze doorredeneerende, als in het reeds behandelde, vinden wij eindelijk, dat

$$a-\frac{f(a)}{f_1(a)}$$

eene nadere grens van α is dan a.

4. Het zal nu wel onnoodig zijn, de beide andere gevallen zoo uitvoerig te behandelen, als de beide eerste. De Lezer, die het voorgedragene goed gevolgd heeft, zal gemakkelijk vinden, dat voor

$f(x-a)$ $\quad -+-$
$f(x-b)$ $\quad -++$

$b-\frac{f(b)}{f_1(a)}$ eene nadere grens van α is dan b,

en $a-\frac{f(a)}{f_1(a)}$ eene nadere grens van α dan a;

terwijl voor

$f(x-a)$ $\quad --+$
$f(x-b)$ $\quad ---$

$b - \frac{f(b)}{f_1(b)}$ eene nadere grens van α is dan b,

en $a - \frac{f(a)}{f_1(b)}$ eene nadere grens van α dan a.

Een en ander te zamen vattende, komt men tot het volgende resultaat:

a) *Indien in* $f(x—a)$ *en* $f(x—b)$ *de laatste termen ongelijke teekens hebben, doch in beide functiën voorafgegaan worden door twee gelijke teekens* $+\,+$ *of* $—\,—$, *dan zijn*

$a - \frac{f(a)}{f_1(b)}$ *en* $b - \frac{f(b)}{f_1(b)}$ *nadere grenzen van* α, *dan* a *en* b.

b) *Worden echter deze termen voorafgegaan door twee ongelijke teekens* $+\,—$ *of* $—\,+$, *dan zijn*

$a - \frac{f(a)}{f_1(a)}$ *en* $b - \frac{f(b}{f_1(a)}$ *nadere grenzen van* α, *dan* a *en* b.

Stellen wij deze eerste nadere grenzen voor door a' en b', dan zal, omdat a' en b' binnen a en b liggen en wel $a < a' < b' < b$, indien de drie laatste termen van $f(a)$ en $f(b)$ de volgende teekens hebben:

$+\,+\,—$	$f(x-a)$	zulks ook het geval zijn met de drie laatste termen van	$f(x—a')$
$+\,+\,+$	$f(x-b)$		$f(x—b')$
$—\,—\,+$	$f(x-a)$		$f(x—a')$
$—\,—\,—$	$f(x-b)$		$f(x—b')$
$+\,—\,+$	$f(x-a)$		$f(x—a')$
$+\,—\,—$	$f(x-b)$		$f(x—b')$
$—\,+\,—$	$f(x-a)$		$f(x—a')$
$—\,+\,+$	$f(x-b)$		$f(x—b')$

Verder volgt uit het aangetoonde nog rechtstreeks voor het geval, dat men heeft

$$a < a' \ldots < a'' < a''' \ldots\ldots < b''' < b'' < b' < b:$$

voor de teekens $+\,+\,—$	$—\,—\,+$	$f(x—b)$	
$+\,+\,+$	$—\,—\,—$	$f(x—b)$	

$$a' = a - \frac{f(a)}{f_1(b)}, \quad b' = b - \frac{f(b)}{f_1(b)},$$

$$a'' = a' - \frac{f(a')}{f_1(b')}, \quad b'' = b' - \frac{f(b')}{f_1(b')},$$

$$a''' = a'' - \frac{f(a'')}{f_1(b'')}, \quad b''' = b'' - \frac{f(b'')}{f_1(b'')};$$

. . . . . .

en voor de teekens $\left.\begin{matrix} +-+ \\ +-- \end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} -+- \\ -++ \end{matrix}\right\}$ $f(x-a)$ $f(x-b)$

$$a' = a - \frac{f(a)}{f_1(a)}, \quad b' = b - \frac{f(b)}{f_1(a)},$$

$$a'' = a' - \frac{f(a')}{f_1(a')}, \quad b'' = b' - \frac{f(b')}{f_1(a')},$$

$$a''' = a'' - \frac{f(a'')}{f_1(a'')}, \quad b''' = b'' - \frac{f(b'')}{f_1(a'')},$$

. . . . . .

Door deze handelwijze worden de grenzen, waartusschen de wortel α zich bevindt, hoe langer hoe nauwer, zoodat die wortel eindelijk met tamelijke nauwkeurigheid bekend zal zijn.

5. Stelling. *Wanneer tusschen a en b, $a < b$, geen reëele wortel ligt der vergelijking $f_2(x) = 0$, maar wel een reëele wortel der vergelijking $f_1(x) = 0$; wanneer men verder weet, dat er tusschen deze grenzen geene of slechts twee reëele wortels kunnen liggen van de vergelijking $f(x) = 0$ en een der termen van de reeks*

$$\frac{f(b)}{f_1(b)} - \frac{f(a)}{f_1(a)}, \frac{f(b')}{f_1(b')} - \frac{f(a')}{f_1(a')}, \frac{f(b'')}{f_1(b'')} - \frac{f(a'')}{f_1(a'')}, \ldots .$$

even zoo groot is als, of grooter dan de overeenkomstige term der reeks

$$b - a, \quad b' - a', \quad b'' - a'', \ldots .$$

dan kan men altijd zeker besluiten, dat er tusschen de grenzen a en b geen reëele wortel der vergelijking $f(x) = 0$ gelegen is.

Bewijs. Omdat de vergelijking $f(x) = 0$ tusschen a en b twee wortels kan hebben, maar niet meer; omdat zij verder niet één wortel, maar twee of geen wortels heeft tusschen die

grenzen, kunnen wij aannemen, dat er twee zijn, die wij voorstellen door β en α, $\beta > \alpha$. Ten eersten hebben nu $f(a)$ en $f(b)$ gelijke teekens, want dewijl $\alpha < \beta$ en tusschen a en b slechts twee wortels liggen, liggen er tusschen a en α, α en β en β en b geene wortels. Verder weet men, dat $f(\alpha - \delta)$ en $f(\alpha + \delta)$ ongelijke teekens hebben, eveneens $f(\beta - \delta)$ en $f(\beta + \delta)$, omdat α en β wortels zijn der vergelijking $f(x) = 0$. Zij nu $f(a)$ positief of negatief, dan heeft men voor de bovenstaande functiën de onderstaande teekens:

$f(a)$,	$f(\alpha-\delta)$,	$f(\alpha)$,	$f(\alpha+\delta)$,	$f(\beta-\delta)$,	$f(\beta)$,	$f(\beta+\delta)$,	$f(b)$,
$\pm$	$\pm$	0	$\mp$	$\mp$	0	$\pm$	$\pm$

waaruit men ten duidelijkste ziet, dat $f(a)$ en $f(b)$ gelijke teekens hebben.

De vergelijking $f_1(x) = 0$ heeft een wortel, dien wij γ noemen, tusschen de grenzen a en b; γ kan geen wortel zijn van $f(x) = 0$, omdat deze dan twee gelijke wortels zou hebben, 't geen strijdt tegen de veronderstelling $\beta > \alpha$. Verder is het duidelijk, dat $f_1(x)$ tusschen a en γ en tusschen γ en b geene verandering van teeken heeft. Is $f_1(a)$ positief, dan is $f_1(b)$ negatief en omgekeerd.

Dewijl $f_1(x)$ tusschen de grenzen a en γ en tusschen de grenzen γ en b steeds hetzelfde teeken heeft, volgt uit § 21, 16, dat $f(x)$ in die tusschenruimten altijd *toe-* of altijd *af-*neemt. Had dus $f(\gamma)$ met $f(a)$ en dus ook met $f(b)$ hetzelfde teeken, dan zou $f(x)$ tusschen die grenzen nimmer 0 kunnen worden en zoude de vergelijking $f(x) = 0$ geen wortel tusschen a en b hebben. Dit strijdt tegen de veronderstelling; daarom heeft $f(x) = 0$ één wortel, en wel de kleinste, tusschen a en γ; terwijl een tweede, en wel de grootste, tusschen γ en b gelegen is.

Verder is $f_2(x)$ tusschen a en b nooit gelijk aan 0; $f_2(a)$ en $f_2(b)$, derhalve ook $f_2(\gamma)$ hebben hetzelfde teeken; wij willen trachten dit teeken te bepalen. Volgens § 21, 20 is:

$$f(\gamma - \delta) = f(\gamma) - \delta f_1(\gamma) + \tfrac{1}{2}\delta^2 f_2(\gamma - \theta\delta),$$

en omdat $f_1(\gamma) = 0$,

$$f(\gamma - \delta) = f(\gamma) + \tfrac{1}{2}\delta^2 f_2(\gamma - \theta\delta).$$

Nemen wij nu $f(\gamma)$ positief, dan zou, indien $f_2(\gamma)$ positie

ware, dewijl $f_2(x)$ tusschen a en b niet van teeken verandert, ook $f_2(\gamma-\theta\delta)$ positief zijn, derhalve zou men in die veronderstelling vinden:

$$f(\gamma-\delta) > f(\gamma).$$

Dewijl nu $f(x)$ tusschen $x=a$ en $x=\gamma$ steeds toe- of afneemt, zouden $f(a)$, $f(\gamma-\delta)$ en $f(\gamma)$ steeds hetzelfde teeken hebben, terwijl wij reeds bewezen hebben, dat $f(a)$ en $f(\gamma)$ steeds verschillende teekens hebben. Men komt hier dan tot eene ongerijmdheid. Is dus $f(\gamma)$ positief, dan moet $f_2(\gamma)$ negatief zijn. Op gelijke wijze toont men aan, dat indien $f(\gamma)$ negatief is, ook $f_2(\gamma)$ positief moet zijn; derhalve hebben $f(\gamma)$ en $f_2(\gamma)$ steeds tegengestelde teekens.

Dewijl nu $f(\gamma)$ en $f_2(\gamma)$ altoos tegengestelde teekens hebben, vinden wij door middel van den regel der dubbele teekens, indien wij stellen, dat $f(x-\gamma)$, $\pm 0 \mp$ tot laatste teekens heeft:

$$\begin{array}{rl} f(x-(\gamma-\delta)) & \pm\mp\mp \\ f(x-\gamma) & \pm\ 0\ \mp \\ f(x-(\gamma+\delta)) & \pm\pm\mp \end{array}$$

Nemen wij nu verder nog in aanmerking, dat $f(\gamma)$ met $f(a)$ en $f(b)$ tegengestelde teekens heeft; dat $f_1(x)$ tusschen a en γ en tusschen γ en b niet van teeken verandert, en dat $f_2(x)$ binnen de grenzen a en b niet van teeken verandert, dan heeft men onmiddellijk het volgende schema:

$$\begin{array}{rl} f(x-a) & \pm\mp\pm \\ f(x-(\gamma-\delta)) & \pm\mp\mp \\ f(x-\gamma) & \pm\ 0\ \mp \\ f(x-(\gamma+\delta) & \pm\pm\mp \\ f(x-b) & \pm\pm\pm. \end{array}$$

Beschouwen wij nu a en $\gamma-\delta$, als grenzen van den wortel α, en $\gamma+\delta$ en b als grenzen van den wortel β, dan heeft men op grond van N°. 4:

$$a - \frac{f(a)}{f_1(a)} < \alpha \quad \text{en} \quad b - \frac{f(b)}{f_1(b)} > \beta,$$

derhalve is:

$$\left\{a - \frac{f(a)}{f_1(a)}\right\} - \left\{b - \frac{f(b)}{f_1(b)}\right\} < \alpha - \beta,$$

$$\frac{f(b)}{f_1(b)} - \frac{f(a)}{f_1(a)} < b - a - (\beta - \alpha);$$

en omdat $\beta > \alpha$, nog zoo veel te meer:

$$\frac{f(b)}{f_1(b)} - \frac{f(a)}{f_1(a)} < b - a;$$

't geen zelfs door blijft gaan, indien $f(x) = 0$ twee gelijke wortels heeft; indien slechts de vergelijking $f_2(x) = 0$ geen, $f_1(x) = 0$ één, en $f(x) = 0$ twee reëele wortels tusschen de grenzen a en b heeft.

Hieruit wordt onmiddellijk afgeleid:

$$\frac{f(b')}{f_1(b')} - \frac{f(a')}{f_1(a')} < b' - a',$$

$$\frac{f(b'')}{f_1(b'')} - \frac{f(a'')}{f_1(a'')} < b'' - a'',$$

$$\frac{f(b''')}{f_1(b''')} - \frac{f(a''')}{f_1(a''')} < b''' - a''',$$

enz.

waaruit het gestelde gemakkelijk afgeleid wordt.

Aanmerking. Dit *Theorema*, zoo gewichtig om de imaginaire wortels eener vergelijking te leeren kennen, is van FOURIER en komt voor in zijne: *Analyse des équations déterminées*, *Paris* 1831. Het bewijs van den vinder is uit de deelen der hoogere analysis afgeleid. Het hier geleverde, zeer fraaie, duidelijke en eenvoudige bewijs is van GRUNERT en komt voor in *Suppl. zu* KLÜGEL's *W.*

6. Om nu de grenzen te bepalen, waartusschen zich de wortels eener vergelijking bevinden, schrijft men eerst de afgeleide functiën der vergelijking; dan bepaalt men het teeken dier afgeleide functiën achtereenvolgens voor $x = 0$, $x = -1$, $x = -10$, $x = -10^2$, ... tot dat men niets heeft dan variatiën; vervolgens substitueert men $x = 1$, $x = 10$, $x = 10^2$,

$s = 10^8$ ..... tot dat men niets vindt dan permanentiën, dan weet men zeker, dat alle wortels der vergelijking tusschen die uiterste waarden begrepen zijn. Is nu het laatste cijfer der indexreeks één, dan ligt er één reëele wortel tusschen de alzoo gebruikte grenzen; is dat cijfer 2, dan liggen er twee wortels, wier natuur men nog moet onderzoeken; is het 3, dan is er één reëele wortel, en er zijn twee wortels, van welke men nog niets kan bepalen, enz. Voorbeelden zullen dit nader verduidelijken. Zij gegeven de vergelijking:

$$x^5 - 3x^4 - 24x^3 + 95x^2 - 46x - 101 = 0.$$

$$f(x) = x^5 - 3x^4 - 24x^3 + 95x^2 - 46x - 101$$
$$f_1(x) = 5x^4 - 12x^3 - 72x^2 + 190x - 46$$
$$f_2(x) = 20x^3 - 36x^2 - 144x + 190$$
$$f_3(x) = 60x^2 - 72x - 144$$
$$f_4(x) = 120x - 72$$
$$f_5(x) = 120$$

(—10)	+ — + — + —	
	0 0 1 1 1 1	één reëele wortel;
(— 1)	+ — — + — +	
	0 0 0 0 0 1	één reëele wortel;
(0)	+ — — + — —	
	0 1 0 0 1 0	geen wortel;
(1)	+ + — + + —	
	0 0 1 2 2 3	één reëele wortel en twee,
(10)	+ + + + + +	waarvan niets bekend is.

Het opsporen van de teekens dezer vergelijkingen geschiedt het gemakkelijkst door de leerwijze van HORNER, bijv.:

$p = 1$

1 — 3 — 24 + 95 — 46 — 101
— 2 — 26 + 69 + 23 | — 78
— 1 — 27 + 12 | + 65
0 — 27 | + 15
1 | — 26
| 2

$$p=10 \quad \begin{array}{l} 1-3-24+95-46-101 \\ +7+46+555+5504+54939 \end{array}$$

Deze bewerking wordt niet voortgezet, omdat men klaarblijkelijk altijd + krijgt.

$$p=-1 \quad \begin{array}{l} 1-3-24+95-46-101 \\ -4-20+115-181+60 \\ -5-15+130-291 \\ -9-9+139 \\ -7-2 \\ -8 \end{array}$$

$$p=-10 \quad \begin{array}{l} 1-3-24+95-46-101 \\ -33+306-2965+29604-295939 \end{array}$$

Hier kan men de bewerking staken, omdat men klaarblijkelijk enkel variatiën zal vinden.

Er blijft ons nu slechts over te bepalen, van welken aard de twee wortels zijn, die zich nog tusschen 1 en 10 bevinden; zulks nu geschiedt door middel van het theorema van FOURIER, dat wij aanstonds door eenige voorbeelden zullen ophelderen.

Gebeurt het, dat in eenige afgeleide vergelijkingen nullen voorkomen, dan kan men het aantal variatiën niet bepalen; daarom leidt men in zoodanig geval door middel van den regel der dubbele teekens de vergelijkingen in $(\alpha-\delta)$ en $(\alpha+\delta)$ en handelt dan als te voren.

Is bijv. gegeven de vergelijking

$$x^7 - 2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Door ook hier de leerwijze van HORNER toe te passen, vindt men:

$$\begin{array}{ll} (-10) & +-+-+-+- \\ (-1) & +-+-+++-+ \\ (0) & +0-0-+-+ \\ (1) & +++++--+ \\ (10) & +++++++++ \end{array}$$

Dewijl hier in $f(x-0)$ twee termen ontbreken, zoeken wij de functiën van $(-\delta)$ en $(+\delta)$ en vinden dan:

(-10)	$+\ -\ +\ -\ +\ -\ +\ -$	
	$0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1$	een reëele wortel;
$(-\ 1)$	$+\ -\ +\ -\ +\ +\ -\ +$	
	$0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0$	geen wortels;
$(-\ \delta)$	$+\ -\ -\ +\ -\ +\ -\ +$	
	$0\ 1\ 0\ 1\ 2\ 2\ 2\ 2$	twee imaginaire wortels (§ 5, N°. 20);
$(+\ \delta)$	$+\ +\ -\ -\ -\ +\ -\ +$	
	$0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 2\ 2$	2 wortels, welke men nog niet nader kan bepalen.
$(\ 1)$	$+\ +\ +\ +\ +\ -\ -\ +$	
	$0\ 0\ 0\ 0\ 9\ 1\ 1\ 2$	2 wortels, welke men nog niet nader kan bepalen.
(10)	$+\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +$	

Tot derde voorbeeld moge dienen de vergelijking:

$$x^6 - 2x^5 - 10x^4 - 10x^3 - 61x^2 - 248x - 210 = 0.$$

Door toepassing van HORNERS leerwijze vinden wij achtereenvolgens:

(-10)	$+\ -\ +\ -\ +\ -\ +$	
	$0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 2\ 3$	drie wortels, waarvan één reëel en twee onbekend;
$(-\ 1)$	$+\ -\ +\ -\ -\ -\ -$	
	$0\ 0\ 1\ 2\ 2\ 2\ 2$	twee wortels, onbekend;
(0)	$+\ -\ -\ -\ -\ -\ -$	
	$0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0$	geen wortel;
(1)	$+\ +\ -\ -\ -\ -\ -$	
	$0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1$	een reëele wortel.
(10)	$+\ +\ +\ +\ +\ +\ +$	

7. Om nu den aard der wortels te bepalen, die zich paarsgewijze tusschen twee grenzen voordoen, beginnen wij met de indexreeks 0, 1, 2 te beschouwen, waarvan wij weten, dat zij tusschen de grenzen a en b geen reëelen wortel der vergelijking $f_2(x) = 0$, één reëelen wortel der vergelijking $f_1(x) = 0$, en geen of twee reëele wortels der vergelijking $f(x) = 0$ bevat. Op zoodanig geval is de stelling van N°. 5 toepasselijk.

Men bepaalt nu uit de bekende grenzen a en b en uit de bekende functiën $f(x)$ en $f_1(x)$ de waarde van

$$\frac{f(b)}{f_1(b)} - \frac{f(a)}{f_1(a)},$$

en is deze waarde gelijk aan of grooter dan $b - a$, dan ligt er geen reëele wortel der vergelijking $f(x) = 0$ tusschen deze grenzen. Is die waarde intusschen kleiner, dan *kunnen* tusschen a en b twee reëele wortels liggen. Om nu deze wortels te leeren kennen, substitueert men een getal c tusschen a en b; daardoor kunnen zich nu twee gevallen voordoen: van de reëele wortels bevindt er zich één tusschen a en c en één tusschen c en b, dat door het laatste cijfer 1 der indexreeks wordt aangewezen; of beide de wortels bevinden zich nog tusschen a en c, of tusschen c en b, 't geen kenbaar is aan de indexreeksen 0,0,0 en 0,1,2. Dat namelijk de index van $f_2(x)$ altoos 0 blijft, volgt uit § 22, 9 en 10; zijn dus de laatste indices in de beide intervallen niet 1, dan heeft men 0,0,0; 0,1,2 of 0,0,2, 0,1,0; de laatste waarde der indexreeks kan intusschen niet plaats grijpen volgens § 22, 12, derhalve heeft men altijd de indexreeksen 0,0,0 en 0,1,2, voor het geval, dat men de reëele wortels niet heeft kunnen scheiden. Deze bewerking behoeft men slechts te herhalen, d. i. men behoeft de grenzen slechts nauwer en nauwer te maken en men zal er eindelijk toe geraken, om de wortels te scheiden of tot het besluit komen, dat zij imaginair zijn. Om te onderzoeken, of er twee gelijke wortels tusschen de bepaalde grenzen liggen, zoekt men slechts den grootsten gemeenen deeler van $f(x)$ en $f_1(x)$ en stelt dezen $\varphi(x)$. Indien deze grootste gemeene deeler een reëelen wortel tusschen de grenzen a en b heeft, dan heeft $f(x)$ twee gelijke wortels tusschen diezelfde grenzen.

Het komt er nu slechts op aan deze beschouwing, die alleen geldt, wanneer de reeks der indices 0,1,2 is, meer algemeen te maken. Ingeval de laatste term der indexreeks, d. i. indien $\epsilon_n = \text{of} > 2$ en de termen voor $\epsilon_n = 2$ niet 0,1 zijn, zoekt men, van de rechter- naar de linkerzijde voortgaande, den eersten term der indexreeks, die 1 is.

Komt deze index overeen met $f_k(x)$, dan is hij de ι_{n-k} der indexreeks en de volgende term moet 2 zijn. Want ware de volgende 0, dan zoude er weêr een term $= 1$ moeten komen, en men had den eersten term niet genomen, 't geen ook 't geval zou zijn, indien de volgende term 1 was; dat men bovendien altijd een eersten term $= 1$ vinden moet, volgt daaruit, dat de index des eersten terms steeds 0 is. De term vóór ι_{n-k} kan nu slechts 0, 1 of 2 zijn. Is $\iota_{n-k-1} = 0$, dan vormen de indices ι_{n-k-1}, ι_{n-k}, ι_{n-k+1} de reeks 0,1,2. Is ι_{n-k-1} niet gelijk aan 0, dus $= 1$ of $= 2$, dan gaan er tusschen $x = a$ en $x = b$ twee variatiën verloren van f_{k-1} *). Voor de f_k gaat, omdat $\iota_{n-k} = 1$, tusschen a en b ééne variatie verloren. Dewijl nu $\iota_{n-k} = 1$ is, heeft de vergelijking $f_k(x) = 0$ een reëelen wortel, dien wij door α voorstellen; deze wortel ligt tusschen a en b en derhalve is:

$$f_k(\alpha) = 0.$$

Ware nu te gelijker tijd $f_{k+1}(\alpha) = 0$, dan zou $f_k(x) = 0$ twee gelijke wortels α hebben tusschen a en b, 't geen eene ongerijmdheid is, omdat $f_k(x) = 0$ slechts één reëelen wortel tusschen a en b kan hebben. Derhalve is $f_{k+1}(\alpha)$ niet gelijk aan 0 en daarom kan voor de f_k ééne variatie slechts op de volgende wijze verdwijnen:

$$\begin{array}{ll} \alpha - \delta & \ldots . \pm \mp \\ \alpha & \ldots . \pm 0 \\ \alpha + \delta & \ldots . \pm \pm , \end{array}$$

't geen men onmiddellijk vindt door den regel der dubbele teekens. Wanneer nu ook in de functie f_{k+1} voor $x = \alpha$ het aantal variatiën verminderde, of wanneer voor deze functie $\alpha + \delta$ minder variatiën bevatten dan $\alpha - \delta$, dan zoude in de

---

*) Sommigen gebruiken de verkorte schrijfwijze $f_n f_{k+1}$, om daardoor de $k+1$de afgeleide functie der n afgeleide functiën aan te wijzen.

functie f_k meer dan ééne variatie verdwijnen, 't geen klaarblijkelijk ongerijmd is. Voor de f_{k+1} zijn er dus voor $\alpha - \delta$ en $\alpha + \delta$ eveneveel variatiën, het laatste cijfer der indexreeks is dus voor f_{k+1} steeds 0, voor f_k is zij steeds 1, zoodat wij tusschen de grenzen $\alpha-\delta$ en $\alpha+\delta$, die wederom tusschen a en b liggen, gevonden hebben:

$$\iota_{n-k-1} = 0 \quad \text{en} \quad \iota_{n-k} = 1.$$

Stellen wij deze nauwere grenzen voor door a' en b', dan is ι_{n-k} tusschen a en a' en b' en b steeds gelijk aan 0; zijn dus, indien men van de linker- naar de rechterzijde voortgaat, niet alle indices gelijk aan 0, dan moet er ergens een index zijn, die gelijk is aan 1 en dat zal de eerste index zijn, die van de rechter- naar de linkerzijde voortgaande, gelijk aan 1 is, overeenstemmende met een term rechts van $f_k(x)$.

Tusschen de grenzen a' en b' heeft men zoo even gevonden:

$$\iota_{n-k-1} = 0 \quad \iota_{n-k} = 1;$$

nu is ι_{n-k} zelf de eerste index, die gelijk is aan één, of die index ligt nog verder ter rechter zijde; is ι_{n-k} de eerste term, die $= 1$, dan is ook

$$\iota_{n-k-1} = 0, \quad \iota_{n-k} = 1, \quad \iota_{n-k+1} = 2;$$

zoodat men nu op grond van het eerste lid onzer redeneering kan onderzoeken, of de aangewezen wortels der vergelijking, $f_{k-1}(x) = 0$, reëel zijn of ontbreken. Zijn zij reëel, dan kan men ze door eene tusschengevoegde waarde c' scheiden en de $f_{k-1}(x)$ heeft tusschen a' en c' en tusschen c' en b' een reëelen wortel. Hierdoor komt het lid $f_{k-1}(x)$ overeen met den index 1, welke vroeger met het lid $f_k(x)$ van de reeks der functiën overeenstemde, zoodat de eerste term 1 der indexreeks door deze handelwijze ééne plaats meer rechts is gekomen. Bevindt men echter, dat tusschen a' en b' geen reëele wortel der vergelijking $f_{k-1}(x) = 0$ liggen kan, of dat de wortels daartusschen ontbreken, dan handelt men als volgt: Omdat $\iota_{n-k} = 1$, ligt

tusschen a' en b' één, maar ook slechts één wortel der vergelijking $f_k(x) = 0$; is deze wortel $= \alpha$, dan is $f_k(\alpha) = 0$. Noch $f_{k+1}(\alpha)$, noch $f_{k-1}(\alpha)$ zijn gelijk aan 0, omdat wij weten, dat tusschen a' en b' geen reëele wortel kan liggen van $f_{k+1}(x) = 0$, dewijl $\iota_{n-k-1} = 0$, en ook geen van $f_{k-1}(x) = 0$. Hadden nu $f_{k+1}(\alpha)$ en $f_{k-1}(\alpha)$ ongelijke teekens, dan zou men voor $f_{k-1}(x)$ vinden:

$$\begin{array}{cc} \alpha - \delta & \pm \mp \mp \\ \alpha & \pm\ 0 \mp \\ \alpha + \delta & \pm \pm \mp, \end{array}$$

waaruit men ziet, dat voor de waarde α van x, welke $f_k(\alpha) = 0$ maakt, geene variatie verloren gaat. Daarom zullen onder de boven opgegeven voorwaarden de beide variatiën, die in de $f_{k-1}(x)$ voor $x = b'$ minder voorkomen dan voor a', slechts daardoor verloren kunnen gaan, dat de functie $f_{k-1}(x)$ tusschen de grenzen a' en b' twee malen verdwijnt, zoodat dan de vergelijking $f_{k-1}(x) = 0$, indien namelijk $f_{k+1}(\alpha)$ en $f_{k-1}(\alpha)$ ongelijke teekens hebben, tusschen de grenzen a' en b' twee reëele wortels zou hebben, 't geen strijdt tegen de veronderetelling. Daarom moeten $f_{k+1}(\alpha)$ en $f_{k-1}(\alpha)$ gelijke teekens hebben; derhalve is voor alle functiën:

$$f_{k-1}, f_{k-2}, f_{k-3}, f_1 \cdots f,$$

de rij der teekens (α) $\quad \pm\ 0\ \pm$,

waaruit men door middel van den regel der dubbele teekens besluit:

$$\begin{array}{cc} (\alpha - \delta) & \pm \mp \pm \\ (\alpha) & \pm\ 0\ \pm \\ (\alpha + \delta) & \pm \pm \pm \end{array}$$

Op grond van den regel van DE GUA volgt hieruit, dat de vergelijkingen

$$f_{k-1}(x) = 0, f_{k-2}(x) = 0, f_{k-3}(x) = 0, \ldots f(x) = 0$$

tusschen de grenzen a' en b' twee imaginaire wortels hebben. Daar tusschen a' en b' de index ι_{n-k} de eerste index is, welke van de rechter- naar de linkerhand gaande, $= 1$ is, volgen op den index ι_{n-k+1}, welke steeds $= 2$ is, slechts indices, die $=$ of > 2 zijn.

Men kan nu de volgende indices

$$\iota_{n-k+1},\quad \iota_{n-k+2},\quad \iota_{n-k+3},\ldots\ldots \iota_n$$

met twee eenheden verminderen, dan zullen de overblijvende verschillen het aantal wortels der overige vergelijkingen bepalen.

8. Eenige voorbeelden zullen het in het vorige N°. behandelde ophelderen.

a) Zij gegeven de vergelijking $f(x) = x^3 - 11x^2 + 35x - 49 = 0$.

$$\begin{array}{lrrrrl}
 & 1 & -11 & +35 & -49 & \\
p=1 & & -10 & +25 & \underline{-24} & \\
 & & -9 & \underline{+16} & & \\
 & & \underline{-8} & & & \\
 & 1 & -11 & +35 & -49 & \\
p=10 & & -1 & +25 & \underline{+201} & \\
 & & +9. & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lrrrr}
(0) & + & - & + & - \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
(1) & + & - & + & - \\
 & 0 & 1 & 2 & 3 \\
(10) & + & + & + & +
\end{array}
\left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\}
\begin{array}{l}\text{geen wortel;}\\ \text{drie wortels,}\\ \text{waarvan één}\\ \text{reëel, twee}\\ \text{onbekend.}\end{array}$$

Wij trachten één der wortels te scheiden en vinden, door $p = 4$ te nemen:

$$\begin{array}{rrrrl}
1 & -11 & +35 & -49 & \\
 & -7 & +7 & \underline{-21} & \\
 & -3 & \underline{-5} & & \\
 & +1 & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lrrrr}
(0) & + & - & + & - \\
(1) & + & - & + & - \\
 & 0 & 1 & 1 & 2 \\
(4) & + & + & - & - \\
 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
(10) & + & + & + & +
\end{array}
\left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\}
\begin{array}{l}\text{twee wortels,}\\ \text{onbekend;}\\ \\ \text{een reëelen}\\ \text{wortel.}\end{array}$$

Dewijl de laatste termen van de indexreeks tusschen (1) en (4) nog niet 0,1,2 zijn, trachten wij een nadere grens te vinden; nemen wij $p = 3$:

$$\begin{array}{rrrrl}
1 & -11 & +35 & -49 & \\
 & -8 & +11 & \underline{-16} & \\
 & -5 & \underline{-4} & & \\
 & \underline{-2} & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lrrrr}
(1) & + & - & + & - \\
 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
(3) & + & - & - & - \\
 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
(4) & + & + & - & -
\end{array}
\left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\}
\begin{array}{l}\text{twee wortels,}\\ \text{onbekend;}\\ \\ \text{geen wortel.}\end{array}$$

Nemen wij nu in $f(x) = x^3 - 11x^2 + 35x - 49$

en $f_1(x) = 3x^2 - 22x + 35$

$b = 3$ en $a = 1$, dan vinden wij $f(b) = -16$, $f_1(b) = -4$,

$f(a) = -24$, $f_1(a) = 16$;

derhalve is

$$\frac{f(b)}{f_1(b)} - \frac{f(a)}{f_1(a)} = 4 - (-1\tfrac{1}{2}) = 5\tfrac{1}{2} > 3 - 1;$$

de beide wortels zijn dus imaginair.

b) Nemen wij weder de eerste vergelijking van N°. 6, namelijk:

$$x^5 - 3x^4 - 24x^3 + 95x^2 - 46x - 101 = 0.$$

Wij vonden tusschen de grenzen (1) en (10)

(1)	+	+	−	+	+	−
	0	0	1	2	2	3
(10)	+	+	+	+	+	+

Zoeken wij nu, van de rechter- naar de linkerhand voortgaande, den eersten index, die gelijk is aan 1, dan vinden wij, dat deze overeenkomt met $f_3(x)$. Omdat men daarin nu de volgorde 0,1,2 reeds vindt, kunnen wij dadelijk beproeven, of $f_2(x)$ reëele wortels heeft of niet.

$f_2(1) = 30$, $f_3(1) = -156$

$f_2(10) = 15150$, $f_3(10) = 5136$;

derhalve:

$$\frac{f_2(b)}{f_3(b)} - \frac{f_2(a)}{f_3(a)} = \frac{15150}{5136} - \left(-\frac{30}{156}\right) < (b - a = 9).$$

De wortels kunnen dus reëel zijn. Om overtuigd te zijn, dat zij niet gelijk zijn, zoekt men den grootsten gemeenen deeler van $f_2(x) = 20x^3 - 36x^2 - 144x + 190$ en $f_3(x) = 60x^2 - 72x - 144$ en beproeft, of deze geen reëelen wortel heeft tusschen 1 en 10;

dit het geval niet zijnde, zoekt men de tusschenruimte tusschen 1 en 10 te scheiden en vindt:

(1)	+ + − + + −	
	0 0 0 1 0 0	geen wortel;
(2)	+ + − − + −	
	0 0 1 0 1 2	twee wortels, onbekend;
(3)	+ + + − − −	
	0 0 0 1 1 1	een reëelen wortel.
(10)	+ + + + + +	

Derhalve ligt tusschen 3 en 10 een reële wortel der vergelijking; $f_2(x)$ heeft bovendien een reëelen wortel tusschen 1 en 2 en een tusschen 2 en 10. Omdat zich nu tusschen 2 en 3 de indexreeks 0,1,2 bevindt, kunnen wij onze algemeene leerwijze toepassen en vinden dan:

$$f(2) = -21,\ f_1(2) = 30,\ f(3) = -32,\ f_1(3) = -43;$$

$$\frac{f(b)}{f_1(b)} - \frac{f(a)}{f_1(a)} = \frac{621}{430} > b - a = 1;$$

de beide wortels tusschen 2 en 3 zijn dus imaginair.

Het is wel waardig opgemerkt te worden, dat men de waarden der afgeleide functiën, voor zooverre die noodig zijn, om over het al of niet reëele der wortels te beslissen, door de leerwijze van HORNER vindt te gelijk met de teekens.

Men herinnere zich slechts hoe (vergelijk § 21, N°. 3)

$$\left.\begin{aligned} R &= F(p), \\ R_1 &= F_1(p), \\ R_2 &= \frac{F_2(p)}{1.2}, \\ R_3 &= \frac{F_3(p)}{1.2.3}, \\ &\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \text{ dus ook } \left\{\begin{aligned} F(p) &= R, \\ F_1(p) &= R_1, \\ F_2(p) &= 1.2.R_2, \\ F_3(p) &= 1.2.3\,R_3 \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right.$$

Passen wij deze opmerking toe op het voorgaande voorbeeld, dan is de bewerking als volgt:

$$
\begin{array}{lrrrrrr}
 & 1 & -3 & -24 & +95 & -46 & -101 \\
=2 & & -1 & -26 & +43 & +40 & \underline{-21} \\
 & & +1 & -24 & -5 & \underline{+30} & f(2) \\
 & & +3 & -18 & \underline{-41} & f_1(2) & \\
 & & +5 & -8 & \underline{f_2(2)} & & \\
 & & & & 1.2 & & \\
 & & +7 & & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lrrrrrr}
 & 1 & -3 & -24 & +95 & -46 & -101 \\
p=3 & & 0 & -24 & +23 & +23 & \underline{-32} \\
 & & 3 & -15 & -22 & \underline{-43} & \\
 & & 6 & +3 & \underline{-13} & & \\
 & & 9 & \underline{30} & & & \\
 & & 12 & & & &
\end{array}
$$

(2) $+ \; + \; - \; + \; + \; -$ (3) $+ \; + \; + \; - \; - \; -$

$f(2) = -21$, $f_1(2) = 30$ $f(3) = -32$, $f_1(3) = -43$

$f_2(2) = -82$, $f_3(2) = -48$ $f_2(3) = -26$, $f_3(3) = 180$

$f_4(2) = 168$, $f_4(3) = 288$

c) Zij nog gegeven de vergelijking:

$$x^6 - 6x^5 + x^4 + 48x^3 - 81x^2 + 54x + 81 = 0.$$

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrr}
) & + & - & + & + & - & + & - & & & & & \\
) & + & 0 & - & + & + & + & - & & & & & \\
-\delta & + & - & - & + & + & + & - & p=1 & & & & \\
+\delta & + & + & - & + & + & + & - & & & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrrrrr}
1 & -6 & +1 & +48 & -81 & +54 & -81 \\
 & -5 & -4 & +44 & -37 & +17 & \underline{-64} \\
 & -4 & -8 & +36 & -1 & \underline{+16} & \\
 & -3 & -11 & +25 & \underline{+24} & & \\
 & -2 & -13 & \underline{+12} & & & \\
 & -1 & \underline{-14} & & & & \\
 & 0 & & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrr}
 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & \\
-1) & + & - & + & - & - & + & - & p=-1 & & & & \\
 & & & & & & & & & & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrrrrr}
1 & -6 & +1 & +48 & -81 & +54 & -81 \\
 & -7 & +8 & +40 & -121 & +175 & \underline{-256} \\
 & -8 & +16 & +24 & -145 & \underline{+320} & \\
 & -9 & +25 & -1 & \underline{-144} & & \\
 & -10 & +35 & \underline{-36} & & & \\
 & -11 & \underline{+46} & & & & \\
 & \underline{-12} & & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrr}
 & & & & & & & & & & & & \\
) & + & + & + & + & + & + & + & p=10 & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & \\
-10) & + & - & + & - & + & - & + & & & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrrrrr}
1 & -6 & +1 & +48 & -81 & +54 & -81 \\
 & +4 & +41 & +458 & +4499 & +45044 & \underline{+450359} \\
 & 14 & +181 & +2268 & +27179 & \underline{+316834} & \\
 & 24 & +421 & +6478 & \underline{+81959} & & \\
 & 34 & +761 & \underline{+14088} & & & \\
 & 44 & \underline{+1201} & & & & \\
 & 54 & & & & &
\end{array}
$$

Rangschikken wij deze verschillende uitkomsten, dan vinden wij:

(-10)	$+\,-\,+\,-\,+\,-\,+$	
	$0\;0\;0\;0\;1\;1\;1$	een reëelen wortel;
(-1)	$+\,-\,+\,-\,-\,+\,-$	
	$0\;0\;0\;1\;0\;0\;0$	geen wortel;
0	$+\,-\,+\,+\,-\,+\,-$	
	$0\;0\;1\;0\;1\;2\;2$	twee wortels, onbekend;
$(1-\delta)$	$+\,-\,-\,+\,+\,+\,-$	
1	$+\;0\;-\,+\,+\,+\,-$	
$1+\delta$	$+\,+\,-\,+\,+\,+\,-$	
	$0\;0\;1\;2\;2\;2\;3$	drie wortels: één reëel,
(10)	$+\,+\,+\,+\,+\,+\,+$	twee onbekend.

Tusschen de grenzen 0 en $1-\delta$ vindt men de indexreeks 0,1,2; men heeft dus:

$$\frac{f_1(1)}{f_2(1)} - \frac{f_1(0)}{f_2(0)} = 1\tfrac{6}{15} + \tfrac{5}{16\,2} < 1 - 0.$$

$f_1(x)$ kan derhalve reëele wortels hebben; om te beoordeelen of $f_1(x)$ ook twee gelijke wortels heeft, zoekt men den grootsten gemeenen deeler van $f_1(x)$ en $f_2(x)$ en vindt daarvoor $x-3$; dewijl de vergelijking $x-3=0$ geen reëelen wortel heeft tusschen 0 en 1, heeft $f_1(x)$ tusschen die grenzen geene gelijke reëele wortels. Wij trachten derhalve de reëele wortels te scheiden en vinden:

		$1 - 6 + 1 + 48 - 81 + 54 - 8$
(0)	$+\,-\,+\,+\,-\,+\,-$ $p=\frac{1}{2}$	$-\tfrac{1}{2}\,{}^{1} - \tfrac{7}{4} + \tfrac{3\,7\,7}{8} - \tfrac{9\,1\,9}{16} + \tfrac{8\,0\,9}{32}$
	$0\;0\;1\;0\;0\;0\;0$	$-10 - 17 + 360 - 359$
$(\frac{1}{2})$	$+\,-\,-\,+\,-\,+\,-$	$-9 - 26 + 334$
	$0\;0\;0\;0\;1\;2\;2$	$-8 - 34$
$(1-\delta)$	$+\,-\,-\,+\,+\,+\,-$	-7
		$-\frac{6}{2}$

Tusschen de laatste grenzen vindt men 0,1,2; passen wij ons algemeen kenmerk weder toe, dan vinden wij:

$$\frac{f_1(1)}{f_2(2)} - \frac{f_1(\frac{1}{2})}{f_2(\frac{1}{1})} = \frac{1}{15} + \frac{135}{150} > 1 - \frac{1}{4};$$

derhalve zijn de hier aangewezen wortels van $f_1(x)$ imaginair. Verminderen wij nu de indices 2,2 met 2, dan vindt men 0,0, zoodat ook $f(x) = 0$ binnen deze grenzen geen reëelen wortel heeft. Tusschen de grenzen 1 en 10 vindt men ook de reeks 0,1,2 en verder is

$$\frac{f_3(10)}{f_4(10)} - \frac{f_3(1)}{f_4(1)} = \frac{6 \times 14088}{2401 \times 24} + \frac{6 \times 12}{24 \times 14} = \frac{3522}{2401} + \frac{3}{14} < 10 - 1.$$

De wortels kunnen dus reëel zijn en wij willen trachten ze te scheiden.

$(1+\delta)$	$++--++++-$	$1-6+1+48-81+54-81$
	$0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0$	$-4-7+34-13+28\|-25$
(2)	$++++--+-$	$-2-11+12+11\|+50$
	$0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 2\ 3$	$0-11-10\|-9$
(10)	$+++++++++$	$2-7\|-24$
		$4\|+1$
		$\|6$

De wortels liggen tusschen 2 en 10, wij substitueeren dus 3.

		$1-6+1+48-81+54-81$
		$-3-8+24-9+27\|0$
		$0-8\ \ 0-9\|0$
(3)	$++++0\,0\,0.$	$+3+1+3\|0$

Dewijl hier zoowel $f(x)$ als $f_1(x)$ en $f_2(x)$ gelijk aan 0 worden, is 3 een wortel van de vergelijking, die driemaal voorkomt. De opgegeven vergelijking heeft dus drie gelijke wortels 3.

9. Ofschoon het uit een theoretisch oogpunt onmisbaar is, om de limieten, waartusschen de imaginaire wortels eener vergelijking $f(x) = 0$ gelegen zijn, te kunnen bepalen, heeft men daaraan in de practijk weinig behoefte, daar het er doorgaans

slechts op aan komt, de positieve en negatieve reëele wortels eener vergelijking te bepalen. Past men, om deze op te sporen, de boven behandelde leerwijze onvoorwaardelijk toe, dan zal men, indien de wortels groot zijn, niet alleen groote bewerkingen moeten verrichten, maar men zal ook vaak in lastige herhalingen vervallen. Men stelle zich slechts voor, dat de wortel eener vergelijking 37,234..... zij. Na de teekens der vergelijking (10) opgemaakt te hebben, maakt men die op van de vergelijking (100), daartusschen ligt de begeerde wortel en nu zal men de grenzen al nader en nader moeten brengen, 't geen vermeden had kunnen worden, indien men aanstonds nadere grenzen van dien positieven wortel op had kunnen geven. Thans willen we eenige stellingen mededeelen, die ons daarbij kunnen helpen. Wij zullen daarbij slechts spreken van den grootsten positieven wortel. Wil men eene limiet hebben voor den kleinsten positieven wortel, dan zoeke men de limiet van den grootsten positieven wortel in de vergelijking op de omgekeerde waarde van de wortels der oorspronkelijke vergelijking. Wil men de beide limieten hebben voor de negatieve wortels, dan substitueert men $-y$ voor x en zoekt dan de limiet der positieve wortels in $f(y)=0$.

10. Stelling. *Indien in eene vergelijking van den $n$den graad γ de getallenwaarde van den grootsten negatieven coëfficiënt en $A_m x^{n-m}$ de eerste negatieve term is, dan is de grootste positieve wortel* $< 1 + \sqrt[m]{\gamma}$.

Bewijs. Wij stellen wederom vast, dat de vergelijking gebracht is tot hare algemeene gedaante:

$$x^n + A_1 x^{n-1} \ldots + A_{m-1} x^{n-m+1} - A_m x^{n-m} - A_{m+1} x^{n-m-1} \ldots - A_n = 0.$$

Nemen wij aan, dat alle termen, met $A_m x^{n-m}$ te beginnen, negatief zijn, dan zal de geheele $f(x)$ positief zijn, zoodra men voor x zoodanig getal substitueert, dat

$$x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots A_{m-1} x^{n-m+1} > A_m x^{n-m} + A_{m+1} x^{n-m-1} + \ldots A_n; \ldots (\alpha)$$

$f(x)$, na de substitutie van zoodanig getal geene afwisseling van teekens meer aanbiedende, zal er geen wortel boven de bedoelde waarde van x in de vergelijking aanwezig zijn.

Aan deze ongelijkheid zal nog zooveel te meer voldaan worden, indien wij voor de negatieve coëfficiënten de getallenwaarde van den grootsten substitueeren en uit het eerste lid alle termen, uitgezonderd den eersten, weglaten; dat is, als wij schrijven:

$$x^n > \gamma(x^{n-m} + x^{n-m-1} + \ldots + 1)$$

of $$x^n > \left\{ \gamma \frac{x^{n-m+1} - 1}{x - 1} < \gamma \frac{x^{n-m+1}}{x - 1} \right\}$$

of des te meer, indien $(x-1)^m > \gamma$,
waarbij stilzwijgend wordt aangenomen $x > 1$.

Hieruit nu volgt onmiddellijk:

$$x > \sqrt[m]{\gamma} + 1.$$

Wij hadden de limiet ook anders kunnen bepalen. Wij vinden namelijk, dat aan (α) zal voldaan worden, indien voldaan wordt aan de ongelijkheid:

$$x^n + x^{n-1} + \ldots . x^{n-m+1} > \gamma(x^{n-m} + x^{n-m-1} + \ldots . + 1)$$

$$x^{n-m+1}(x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots 1) > \left\{ \gamma \frac{x^{n-m+1} - 1}{x - 1} < \gamma \frac{x^{n-m-1}}{x - 1} \right\}$$

$$x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots 1 > \frac{1}{x - 1}$$

$$x^m - 1 > \gamma$$

$$x^m > \gamma + 1$$

$$x > \sqrt[m]{(\gamma + 1)},$$

welke limiet geen verschil van aanbelang oplevert met de eerst gevondene.

11. Stelling. *Indien gegeven is de vergelijking*

$$x^n - A_1 x^{n-1} - A_2 x^{n-2} - A_3 x^{n-3} - \ldots . - A_n = 0,$$

dan zal $f(x)$ positief zijn, zoodra men x gelijk neemt aan de grootste

$$\mu\left\{ nA_1,\ (nA_2)^{\frac{1}{2}},\ (nA_3)^{\frac{1}{3}} \ldots . (nA_n)^{\frac{1}{n}} \right\}.$$

Bewijs. Uit de gegeven vergelijking volgt:

$$x^n = A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + A_3 x^{n-3} + \ldots . A_n$$

of $$1 = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \ldots . \frac{A_n}{x^n}.$$

Zijn die breuken nu allen aan elkander gelijk, dan zijn zij ook allen gelijk aan $\frac{1}{n}$; zijn zij niet aan elkander gelijk, dan moeten sommige breuken grooter en sommige kleiner zijn dan $\frac{1}{n}$, anders kunnen zij te zamen niet gelijk aan 1 zijn. Nu is verder

$$\frac{nA_1}{x} = \frac{nA_1}{x},$$

$$\left(\frac{nA}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{(nA_2)^{\frac{1}{2}}}{x},$$

$$\left(\frac{nA_3}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{(nA_3)^{\frac{1}{3}}}{x},$$

. . . . . .

$$\left(\frac{nA_n}{x^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{(nA_n)^{\frac{1}{n}}}{x},$$

en deze getallen nu zullen òf gelijk zijn aan de eenheid, òf sommigen daarvan zullen grooter en anderen kleiner dan de eenheid zijn.

Hieruit volgt onmiddellijk:

$$x = {}^{\mu}\left\{nA_1,\ (nA_2)^{\frac{1}{2}} \ldots\ldots (nA_n)^{\frac{1}{n}}\right\}.$$

Neemt men dus x grooter dan de grootste gemiddelde **waarde**, dan zal $f(x)$ steeds positief blijven.

Aanmerking. Dit theorema is van CAUCHY.

12. Stelling. *Wanneer eenige termen eener vergelijking, van de hoogste macht van x te beginnen, allen positief zijn, en wij de som hunner coëfficiënten $= S$ stellen; wanneer verder γ de grootste negatieve coëfficiënt is, dan is $1 + \frac{\gamma}{S}$ een limiet voor den grootsten positieven wortel.*

Bewijs. Neemt men het ongunstigste geval, namelijk dat alle termen, die op den laatsten positieven volgen, negatief zijn, dan zal, even als in N°. 10, $f(x)$ steeds positief zijn, indien men neemt:

$$x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots A_{m-1} x^{n-m+1} > A_m x^{n-m} + A_{m+1} x^{n-m-1} \ldots A_n,$$

dus in geval $x > 1$ nog zooveel te meer, indien men heeft:

$$(1 + A_1 + \ldots A_{n-1})x^{n-m+1} > \gamma(x^{n-m} + x^{n-m-1} + \ldots 1)$$

of $$S x^{n-m+1} > \gamma \frac{x^{n-m+1}-1}{x-1}, \text{ dus } > \gamma \frac{x^{n-m+1}}{x-1};$$

of $$S(x-1) > \gamma;$$

d. i.: $$x > 1 + \frac{\gamma}{S}.$$

Ontbreken er k termen tusschen den laatsten positieven en den eersten negatieven, dan zal er slechts behoeven voldaan te worden aan de ongelijkheid:

$$Sx^{n-m+1} > \gamma \frac{x^{n-m-k+1}-1}{x-1},$$

waaraan des te meer voldaan zal worden, indien men voldoet aan de ongelijkheden:

$$S > \gamma \frac{x^{-k}}{x-1}, \quad S > \gamma \frac{1}{(x-1)^{k+1}};$$

dat is, indien $$x > 1 + \sqrt[k+1]{\frac{\gamma}{S}}.$$

13. Stelling. *Indien men de absolute waarde van elken negatieven coëfficiënt deelt door de som van alle onmiddellijk voorafgaande positieve coëfficiënten, dan is het grootste quotiënt, vermeerderd met de eenheid, een limiet voor den grootsten positieven wortel. Mochten meerdere negatieve coëfficiënten op elkander volgen, dan neemt men daarvan den grootsten.*

Bewijs. Zij wederom gegeven

$$\left.\begin{array}{l} +A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}-A_3x^{n-3}-A_4x^{n-4}+A_5x^{n-5}+A_6x^{n-6}-A_7x^{n-7}+\ldots \\ +A_mx^{n-m}+A_{m+1}x^{n-m-1}-A_{m+2}x^{n-m-2}-A_{m+3}x^{n-m-3}\ldots\ldots \\ +A_{n-2}x^2+A_{n-1}x-A_n. \end{array}\right\} = 0.$$

Op grond van de vorige stelling zal het polynomium

$$x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} - A_3x^{n-3} - A_4x^{n-4}$$

steeds positief blijven, indien men neemt:

$$x > 1 + \frac{A_4}{1+A_1+A_2}, \text{ indien } A_4 > A_3.$$

Zulks zal met het tweede polynomium het geval zijn, indien men heeft:

$$x > 1 + \frac{A_7}{A_5 + A_6}$$

enz.;

waaruit onmiddellijk volgt, dat het geheele polynomium positief zal zijn en positief zal blijven voor elke waarde van x, die grooter is dan de eenheid, vermeerderd met het grootste van al die quotiënten.

14. Laten wij de vorige stellingen toepassen, om de limieten voor de grootste en kleinste positieve en negatieve wortels te bepalen van de vergelijking:

$$x^6 - 4x^5 - 11x^4 + 31x^3 - 4x^2 - 11x + 30 = 0.$$

Volgens de stelling van N°. 10 heeft men,

dewijl $m = 1$ en $\gamma = 11$,

Lim. gr. p. w. $= 1 + 11 = 12$.

Volgens de stelling van N°. 11 heeft men:

$$\text{Lim. gr. p. w} = {}^{\mu}\{24, \sqrt{66}, \sqrt[4]{24}, \sqrt[5]{66}, \} = 24.$$

Volgens de stelling van N°. 12 vindt men, dewijl $S = 1$ en $\gamma = 11$:

$$\text{Lim. gr. p. w} = 1 + 11 = 12.$$

Volgens de stelling van N°. 13 wordt gevonden:

Lim. pos. w. v. x in $x^6 - 4x^5 - 11x^4$ is $1 + 11 = 12$,

» » in $31x^3 - 4x^2 - 11x$ is $1 + \frac{11}{4} < 12$;

de positieve bekende term blijft klaarblijkelijk buiten rekening.

De naaste grens van den grootsten positieven wortel is derhalve 12.

Stellen wij nu in de opgegeven vergelijking $x = -y$, dan gaat zij over in

$$y^6 + 4y^5 - 11y^4 - 31y^3 - 4y^2 + 11y + 30 = 0.$$

Volgens N°. 10 is de grens van den gr. positieven wortel, dewijl $m = 2$, $\gamma = 31$:

$$\text{Lim gr. p. w.} = 1 + \sqrt{31} < 7.$$

Volgens N°. 11 vinden wij:

$$\text{Lim gr. p. w.} = 9.$$

Volgens N°. 12 is, omdat $S=5$, $\gamma=31$:

$$\text{Lim gr. p. w.} = 1 + \tfrac{31}{5} < 8.$$

Volgens N°. 13 heeft men:

$$\text{Lim gr. p. w.} = 1 + \tfrac{31}{5} < 8.$$

De grootste positieve wortel van $f(y)=0$ is <7, derhalve zal de grootste negatieve wortel van $f(x)=0$ kleiner zijn dan 7 (absoluut genomen).

Om nu de limieten van de kleinste positieve en negatieve wortels te bepalen, stelt men de vergelijking samen op de omgekeerde waarden van de wortels der oorspronkelijke; daarvoor vindt men:

$$z^6 - \tfrac{11}{10} z^5 - \tfrac{2}{15} z^4 + \tfrac{31}{10} z^3 - \tfrac{11}{10} z^2 - \tfrac{2}{15} z + \tfrac{1}{10} = 0.$$

Hiervan kan men nu wederom de limieten van den grootsten positieven en negatieven wortel opsporen en vindt daardoor de grenzen van den kleinsten positieven en van den kleinsten negatieven wortel der oorspronkelijke vergelijking. Dit wordt intusschen aan den Lezer overgelaten.

15. Stelling. *Indien a_1, a_2, a_3 naar orde van grootte de reëele wortels zijn der vergelijking $f(x)=0$, dan heeft $f_1(x)$ minstens één reëelen wortel tusschen a_1 en a_2, een anderen tusschen a_2 en a_3, enz.*

Bewijs. Door den regel voor de dubbele teekens heeft men onmiddellijk, dewijl $f(a_1)$, $f(a_2)$, $f(a_3)=0$ zijn:

	$f_1 f$	$f_2 f$.		$f_1 f$	$f_2 f$.
$a-\delta$	+	−		−	+
a	+	0		−	0
$a+\delta$	+	+	of	−	−
$a_1-\delta$	−	+		+	−
a_1	−	0		+	0
$a_1+\delta$	−	−		+	+

$f(x)$ heeft + of − voor zich; daaruit volgen de teekens voor $(a-\delta)$ en $(a+\delta)$; $f(a+\delta)$ en $f(a_1-\delta)$ hebben hetzelfde teeken, omdat daartusschen geen wortel van $f(x)=0$ ligt; daaruit en uit $f(a_1)=0$ bepaalt men de teekens van $(a_1-\delta)$ en $(a_1+\delta)$, en ziet dan, dat $f_1(a)$ en $f_1(a_1)$ verschillende teekens hebben; tusschen a en a_1 ligt dus één wortel van $f_1(x)=0$.

§ 25. Theorema van Sturm.

1. Wij beginnen met aan te nemen, dat de vergelijking $f(x) = 0$ geene gelijke wortels heeft en voorts, dat $f(x)$ een polynomium is, gerangschikt volgens de afdalende machten van x. De eerste afgeleide functie van $f(x)$, die wij vroeger aanwezen door $f_1(x)$, willen wij nu voorstellen door $f'(x)$; deelen wij nu $f(x)$ door $f'(x)$, stellen wij het quotiënt $= q_1$, en de rest, negatief genomen, $= f''(x)$, dan is:

$$f(x) = q_1 f'(x) - f''(x).$$

Deelt men vervolgens $f'(x)$ door $f''(x)$, stelt men het quotiënt voor door q_2, de rest, negatief genomen, door $f'''(x)$, dan is:

$$f'(x) = q_2 f''(x) - f'''(x).$$

Deelt men nu $f''(x)$ door $f'''(x)$, stelt men het quotiënt voor door q_3, de rest, negatief genomen, door $f''''(x)$, dan is:

$$f''(x) = q_3 f'''(x) - f''''(x);$$

enz. enz.

totdat men eindelijk heeft:

$$f^{n-2}(x) = q_{n-1} f^{n-1}(x) - f^n(x).$$

2. Stelling. *De vorm $f^n(x)$ heeft eene constante waarde.*

Bewijs. Volgens de veronderstelling is $f(x)$ een polynomium van den $n$den graad, de eerste afgeleide functie is dus van den $(n-1)$len graad; het quotiënt en de rest moeten dus beiden van een lageren graad zijn dan $f(x)$ en $f'(x)$; in het algemeen zijn dus de functiën

$$f(x), f'(x), f''(x) \ldots\ldots f^{n-1}(x), f^n(x),$$

van den graad

$$n, n-1, n-2 \ldots\ldots 1, 0;$$

derhalve is $f^n(x)$ constant.

3. Stelling. *Wanneer men de functiën*

$$\begin{array}{ccc} f(x) & \text{en} & f'(x) \\ f'(x) & \text{en} & f''(x) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f^{n-1}(x) & \text{en} & f^n(x) \end{array},$$

twee aan twee, en wel paarsgewijze zoodanig neemt, dat de tweede functie van het eene paar de eerste functie is van het naast volgende, dan wordt geen dezer paren voor eene zelfde waarde van x te gelijk 0.

Bewijs. Waren namelijk voor $x = \alpha$ te gelijk

$$f(\alpha) = 0 \quad \text{en} \quad f'(\alpha) = 0,$$

dan zouden $f(\alpha)$ en $f_1(\alpha)$, omdat $f'(\alpha) = f_1(\alpha)$, ook 0 zijn en de vergelijking $f(x) = 0$ had dan minstens twee gelijke wortels, hetgeen strijdt tegen de veronderstelling van N°. 1.

Waren verder voor $x = \alpha$

$$f'(\alpha) = 0 \quad \text{en} \quad f''(\alpha) = 0,$$

dan zouden $f'(x)$ en $f''(x)$ deelbaar zijn door $x-a$. Maar omdat men heeft

$$f(x) = q_1 f'(x) - f''(x),$$

zou ook $f(x)$ deelbaar zijn door $x-\alpha$, (zie mijne *Deelbaarheid*, pag. 7); derhalve is α een wortel van de vergelijking $f(x) = 0$ en ook deze heeft wederom minstens twee gelijke wortels, enz enz.

4. Stelling. *Wanneer de term $f^k(x)$ van de reeks*

$$f(x), f'(x), f''(x) \ldots\ldots f^{n-1}(x), f^n(x)$$

voor eene zekere waarde van x nul wordt, dan verdwijnen voor die zelfde waarde noch $f^{k-1}(x)$, noch $f^{k+1}(x)$ en deze hebben het tegengestelde teeken.

Bewijs. Om het eerste gedeelte dezer stelling in te zien, vormen wij slechts de paren

$$\begin{array}{lll} f^{k-2}(x) & \text{en} & f^{k-1}(x), \\ f^{k-1}(x) & \text{en} & f^k(x), \\ f^k(x) & \text{en} & f^{k+1}(x), \end{array}$$

waaruit wij op grond van 't vorige nummer aanstonds zien, dat $f^{k-1}(x)$ en $f^{k+1}(x)$ niet voor die waarde van x nul kunnen zijn, welke f^k gelijk aan 0 maakt. Verder is:

$$f^{k-1}(x) = q_k\, f^k(x) - f^{k+1}(x);$$

maar voor $x = \alpha$ is $f^k(\alpha) = 0$, derhalve

$$f^{k-1}(\alpha) = -f^{k+1}(\alpha).$$

5. Stelling. *Geen der termen van de reeks*

$$f(x), f'(x), f''(x), \ldots\ldots f^{n-1}(x), f^n(x)$$

is voor elke willekeurige waarde van x gelijk aan 0.

Bewijs. Ware voor elke willekeurige waarde van x, $f^k(x)$ gelijk aan 0, dan zou men hebben, omdat

$$f^{k-2}(x) = q_{k-1}\, f^{k-1}(x) - f^k(x),$$
$$f^{k-2}(x) = q_{k-1}\, f^{k-1}(x),$$

zoodat voor elke willekeurige waarde van x, $f^{k-2}(x)$ deelbaar zou zijn door $f^{k-1}(x)$.

Maar omdat

$$f^{k-3}(x) = q_{k-2}\, f^{k-2}(x) - f^{k-1}(x)$$

of $$f^{k-3}(x) = (q_{k-1} \times q_{k-2} - 1)\, f^{k-1}(x),$$

is ook $f^{k-3}(x)$ deelbaar door $f^{k-1}(x)$, enz. Zoo terug redeneerende, vinden wij eindelijk, dat ook $f(x)$ en $f'(x)$ of $f(x)$ $f_1(x)$ een zelfden deeler hebben; dat dus de vergelijking $f(x) = 0$ minstens twee gelijke wortels moet hebben, hetgeen strijdt tegen de veronderstelling van N°. 1.

6. Stelling. *Indien $f^k(\alpha)$ niet gelijk is aan* 0, *dan zullen noch $f^k(\alpha - \delta)$, noch $f^k(\alpha + \delta)$ gelijk aan* 0 *zijn. Bovendien behoudt $f^k(x)$ voor $x = \alpha - \delta$, $x = \alpha$ en $x = \alpha + \delta$ hetzelfde teeken.*

Bewijs. Dewijl δ een positief oneindig klein getal voorstelt en bij eene oneindig kleine aangroeiing van 't argument, ook

de functie met oneindig kleine waarden toeneemt of afneemt, zullen in 't algemeen

$$f^k(\alpha-\delta),\ f^k(\alpha),\ f^k(\alpha+\delta)$$

oneindig weinig van elkander verschillen en dus, omdat $f^k(\alpha)$ niet gelijk aan 0 is, ook niet gelijk zijn aan 0; bovendien volgt daaruit nog, dat de drie functiën gelijke teekens hebben.

7. Stelling. *Wanneer $f(\alpha)$ niet gelijk is aan 0, dan hebben de drie reeksen*

$$f(\alpha-\delta),\ f'(\alpha-\delta),\ f''(\alpha-\delta),\ \ldots\ldots f^{n-1}(\alpha-\delta),\ f^n(\alpha-\delta),$$
$$f(\alpha)\ ,\ f'(\alpha)\ ,\ f''(\alpha)\ ,\ \ldots\ldots f^{n-1}(\alpha)\ ,\ f^n(\alpha),$$
$$f(\alpha+\delta),\ f'(\alpha+\delta),\ f''(\alpha+\delta),\ \ldots\ldots f^{n-1}(\alpha+\delta),\ f^n(\alpha+\delta),$$

een zelfde aantal variatiën.

Bewijs. Wanneer geen enkele term ontbreekt van de reeks

$$f(\alpha),\ f'(\alpha),\ f''(\alpha)\ldots\ldots f^{n-1}(\alpha),\ f^n(\alpha),$$

dan berust het bewijs geheel op de voorgaande stelling; is echter één der termen bijv. $f^k(\alpha)$ gelijk aan nul, dan hebben $f^{k-1}(\alpha)$ en $f^{k+1}(\alpha)$ ongelijke teekens en geen van beiden zijn gelijk aan nul. Men heeft dus:

$$\left.\begin{array}{l} f^{k-1}(\alpha-\delta),\ f^{k-1}(\alpha) \text{ en } f^{k-1}(\alpha+\delta) \\ f^{k+1}(\alpha-\delta),\ f^{k+1}(\alpha) \text{ en } f^{k+1}(\alpha+\delta) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{zijn niet} = 0 \text{ en heb-} \\ \text{ben gelijke teekens.} \end{array}$$

Daaruit volgt verder, dat ten opzichte van de reeksen:

$$f^{k-1}(\alpha-\delta),\ f^k(\alpha-\delta),\ f^{k+1}(\alpha-\delta),$$
$$f^{k-1}(\alpha)\ ,\ f^k(\alpha)\ ,\ f^{k+1}(\alpha),$$
$$f^{k-1}(\alpha+\delta),\ f^k(\alpha+\delta),\ f^{k+1}(\alpha+\delta),$$

slechts de volgende gevallen kunnen plaats hebben:

$$\begin{array}{cccc} \pm\pm\mp & \pm\mp\mp & \pm\pm\mp & \pm\mp\mp \\ \pm(\pm)\mp & \pm(\pm)\mp & \pm(\pm)\mp & \pm(\pm)\mp \\ \pm\pm\mp & \pm\mp\mp & \pm\mp\mp & \pm\pm\mp \\ \\ \pm\pm\mp & \pm\mp\mp & \pm\pm\mp & \pm\mp\mp \\ \pm(\mp)\mp & \pm(\mp)\mp & \pm(\mp)\mp & \pm(\mp)\mp \\ \pm\pm\mp & \pm\mp\mp & \pm\mp\mp & \pm\pm\mp. \end{array}$$

Slaat men deze volgorde van teekens nauwkeurig gade, dan ziet men, dat van het eerste tot het derde teeken steeds ééne variatie en ook niet meer dan ééne variatie voorkomt. Zulks waar zijnde voor drie willekeurige termen, is de stelling in het algemeen bewezen.

8. Stelling. *Wanneer de functie $f(x)$ voor geene enkele waarde van x tusschen p en q, waarbij $p < q$ wordt verondersteld, gelijk aan 0 wordt, dan bevatten de reeksen*

$$f(p), f'(p), f''(p) \ldots\ldots f^{n-1}(p), f^n(p)$$
$$f(q), f'(q), f''(q) \ldots\ldots f^{n-1}(q), f^n(q)$$

een zelfde aantal variatiën.

Bewijs. Aangezien wij in 't algemeen op den voorgrond hebben gesteld, dat de functiën, die wij zouden behandelen, continue zijn en zulks dus ook hier het geval moet wezen, zoo zullen op grond van de vorige stelling in de volgende reeksen

$$\begin{array}{l} f(p) \quad , f'(p) \quad , \ldots . f^{n-1}(p) \quad , f^n(p) \quad , \\ f(p+\delta) \ , f'(p+\delta) \ , \ldots . f^{n-1}(p+\delta) \ , f^n(p+\delta) \ , \\ f(p+2\delta), f''(p+2\delta), \ldots . f^{n-1}(p+2\delta), f^n(p+2\delta), \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{array}$$

$\omega = \infty : f(p+\omega\delta), f'(p+\omega\delta) \ldots . f^{n-1}(p+\omega\delta), f^n(p+\omega\delta),$
$\lim . \omega\delta = q - p : f(q), f'(q) \quad \ldots . f^{n-1}(q) \quad , f^n(q) \quad ,$

de verticaal onder elkander geplaatste termen hetzelfde teeken behouden, waardoor de stelling bewezen is.

9. Stelling. *Wanneer $f(\alpha) = 0$, dan heeft de reeks*

$$f(\alpha-\delta), f'(\alpha-\delta), f''(\alpha-\delta) \ldots\ldots f^{n-1}(\alpha-\delta), f^n(\alpha-\delta)$$

altijd ééne variatie meer, dan de reeks

$$f(\alpha+\delta), f'(\alpha+\delta), f''(\alpha+\delta) \ldots\ldots f^{n-1}(\alpha+\delta), f^n(\alpha+\delta).$$

Bewijs. Indien $f(\alpha) = 0$, dan kan $f'(\alpha)$ niet gelijk zijn aan 0, omdat anders de vergelijking $f(x) = 0$ minstens twee gelijke wortels zou hebben, derhalve hebben de reeksen

(A) $f'(\alpha-\delta), f''(\alpha-\delta), f'''(\alpha-\delta) \ldots f^{n-1}(\alpha-\delta), f^n(\alpha-\delta),$
en (B) $f'(\alpha+\delta), f''(\alpha+\delta), f'''(\alpha+\delta) \ldots f^{n-1}(\alpha+\delta), f^n(\alpha+\delta)$

een zelfde aantal variatiën.

Dewijl nu verder $f'(\alpha)$ niet gelijk aan 0 is, is zulks ook niet het geval met $f'(\alpha-\delta)$ en $f'(\alpha+\delta)$. Vroeger [§ 21, 20] hebben wij intusschen bewezen, dat

$$f(\alpha-\delta)=f(\alpha)-\delta f_1(\alpha-\theta\delta)$$
$$f(\alpha+\delta)=f(\alpha)+\delta f_1(\alpha+\theta'\delta),$$

waarin θ en θ' twee positieve getallen zijn, kleiner dan de eenheid. Omdat nu

$$f_1(\alpha-\theta\delta)=f'(\alpha-\theta\delta) \quad \text{en} \quad f_1(\alpha+\theta\delta)=f'(\alpha+\theta'\delta)$$

en $f(\alpha)$ gelijk is aan 0, is ook:

$$f'(\alpha-\delta)=-\delta f'(\alpha-\theta\delta) \quad \text{en} \quad f(\alpha+\delta)=\delta f'(\alpha+\theta'\delta),$$

waaruit men ziet, dat $f(\alpha-\delta)$ en $f'(\alpha-\theta\delta)$ tegengestelde, $f(\alpha+\delta)$ en $f'(\alpha+\theta'\delta)$ dezelfde teekens hebben. Dewijl nu θ en θ' positieve getallen zijn, kleiner dan de eenheid, zoo hebben $f'(\alpha-\theta\delta)$ en $f'(\alpha-\delta)$, zoowel als $f'(\alpha+\theta'\delta)$ en $f'(\alpha+\delta)$ hetzelfde teeken, zoodat dan eindelijk

$f(\alpha-\delta)$ en $f'(\alpha-\delta)$ tegengestelde, maar
$f(\alpha+\delta)$ en $f'(\alpha+\delta)$ gelijke teekens hebben.

In de reeks

$$f(\alpha-\delta), f'(\alpha-\delta), f''(\alpha-\delta); \ldots . f^{n-1}(\alpha-\delta), f^n(\alpha-\delta)$$

heeft men dus tusschen $f(\alpha-\delta)$ en $f'(\alpha-\delta)$ ééne variatie, die in de reeks

$$f(\alpha+\delta), f'(\alpha+\delta), f''(\alpha+\delta), \ldots . f^{n-1}(\alpha+\delta), f^n(\alpha+\delta)$$

niet gevonden wordt, enz.

10. Stelling. *Indien $q > p$ en noch p, noch q wortels zijn der vergelijking $f(x)=0$, dan liggen er tusschen p en q zoovele reële wortels van de vergelijking $f(x)=0$, als de reeks*

$$f(q), f'(q), f''(q) \ldots . f^{n-1}(q), f^n(q)$$

minder variatiën heeft dan de reeks

$$f(p), f'(p), f''(p) \ldots . f^{n-1}(p), f^n(p).$$

Bewijs. Door op den voorgrond te stellen, dat de functie tusschen p en q continue is, wordt het bewijs dezer stelling terug gebracht tot de voorgaande. Het wordt daarom overgelaten aan den Lezer.

Aanmerking. De laatste stelling, van zoo veel gewicht om te bepalen hoeveel reëele wortels eener vergelijking tusschen bepaalde grenzen gelegen zijn, is bekend onder den naam van *Theorema van* STURM, dat door dezen geleerde den 23 Mei 1829 voor het eerst in de *Académie des Sciences* te Parijs is medegedeeld. Later is het voorgekomen in het *Bulletin des sciences math., phys. et chim.* van FÉRUSSAC, Deel XI, pag. 419; dewijl het hierin zonder bewijs werd medegedeeld, leverde VON ETTINGSHAUSEN het eerste bewijs. Later komt een bewijs voor in CRELLE's *Journal*, welk bewijs hier om zijne eenvoudigheid op den voet gevolgd is. — Vergelijk ook GRUNERT S. z. KLÜGEL's W. i. v.; HUTTON *A Course* etc. e. a.

11. Het is nu verder gemakkelijk om de grenzen te bepalen, binnen welke zich de reëele wortels eener vergelijking bevinden. Wij willen zulks duidelijk maken en kiezen daartoe het volgende

Voorbeeld. *Het aantal en de ligging der wortels te vinden van de vergelijking*

$$x^3 - 4x^2 - 6x + 8 = 0$$

$f(x) = x^3 - 4x^2 - 6x + 8$

$f'(x) = 3x^2 - 8x - 6$

$(x^3 - 4x^2 - 6x + 8) : (3x^2 - 8x - 6)$ Om gebrokens te vermijden, vermenigvuldige men het deeltal met 3.

$3x^3 - 12x^2 - 18x + 24$

$3x^3 - 8x^2 - 6x$

$-4x^2 - 12x + 24$ Vermenigvuldig met $\frac{1}{4}$.

$-3x^2 - 9x + 18$

$-3x^2 - 8x + 6$

$-17x + 12$ — derhalve $f''(x) = 17x - 12$

$(3x^2 - 8x - 6) : (17x - 12)$ Vermenigvuldig met 17.

$51x^2 - 136x - 102.$

$51x^2 - 36x$

$-100x - 102$ Vermenigvuldig met $\frac{1}{2}7$.

$-850x - 867$

$-850x - 600$

-267 derhalve $f'''(x) = 267 =$ constante waarde.

Wij hebben dus:

$$f(x) = x^3 - 4x^2 - 6x + 8 = x^3\left(1 - \frac{4}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{8}{x^3}\right)$$

$$f'(x) = 3x^2 - 8x - 6 = x^2\left(3 - \frac{8}{x} - \frac{6}{x^2}\right)$$

$$f''(x) = 17x - 12 = x\left(17 - \frac{12}{x}\right)$$

$$f'''(x) = 267.$$

Aangezien alle reëele wortels gelegen zijn tusschen $+\infty$ en $-\infty$, stellen wij x beurtelings gelijk aan deze waarden, waarbij men, zoo als uit de tweede schrijfwijze ten duidelijkste blijkt, alleen de hoogste macht van x in iedere functie in rekening behoeft te brengen. Wij komen dan tot het volgende resultaat

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	
$x = +\infty$	+	+	+	+	geene variatiën
$x = -\infty$	−	+	−	+	3 variatiën.

De vergelijking heeft dus drie reëele wortels, welker grenzen wij nu nog nader moeten beperken.

$x = 0$	+	−	−	+	2 variatiën
$x = 1$	−	−	+	+	1 "
$x = 2$	−	−	+	+	1 "
$x = 3$	−	−	+	+	1 "
$x = 4$	−	+	+	+	1 "
$x = 5$	−	+	+	+	1 "
$x = 6$	+	+	+	+	0 "
$x = 0$	+	−	−	+	2 variatiën
$x = -1$	+	+	−	+	2 "
$x = -2$	−	+	−	+	3 "

De opgegeven vergelijking heeft dus één reëelen wortel tusschen 0 en 1, één tusschen 5 en 6 en één tusschen -1 en -2.

12. Vraagstuk. *Hoevele reëele wortels heeft de vergelijking:*

$$x^4 + x^3 - x^2 - 2x + 4 = 0 \text{ ?}$$

Door op de bepaalde wijze te handelen, vonden wij:

$$f(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x + 4$$
$$f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2$$
$$f''(x) = x^2 + 2x - 6$$
$$f'''(x) = -x + 1$$
$$f''''(x) = 3.$$

Voor $x = \infty$, vinden wij: $+ + + - +$ twee variatiën.
Voor $x = -\infty$, vinden wij: $+ - + + +$ twee variatiën.

Het verschil in variatiën gelijk aan 0 zijnde, zijn alle wortels der opgegeven vergelijking imaginair.

13. Wanneer men de verschillende functiën $f'(x).f''(x)...f''''(x)$ berekend heeft, en men dan bevindt, dat $f^n(x) = 0$ wordt, dan is natuurlijk $f^{n-1}(x)$ de grootste gemeene deeler van $f(x)$ en $f'(x)$ *), waaruit dan volgt, dat $f(x)$ twee gelijke wortels heeft. Zijn $f^n(x)$ en $f^{n-1}(x)$ beiden gelijk aan 0, dan heeft $f(x)$ drie gelijke wortels, enz. Nadat men deze gelijke wortels uit de vergelijking verwijderd heeft, kan men op de gewone wijze voortgaan.

Mocht men twee wortels of meer binnen zeer nauwe grenzen vinden, dan kan men de wortels dier vergelijking met een zeker getal vermenigvuldigen en dan dezelfde bewerking toepassen; men kan ook de wortels met de gevondene gelijke gedeelten verminderen. Van het laatste geval willen wij nog een voorbeeld bijbrengen.

Vraagstuk. *Welke zijn de grenzen van de wortels van de vergelijking:*

$$x^3 + 11x^2 - 102x + 181 = 0 \text{ ?}$$

Wij vinden, door op de bekende wijze te handelen:

$$f(x) = x^3 + 11x^2 - 102x + 181$$
$$f'(x) = 3x^2 + 22x - 102$$
$$f''(x) = 122x - 393$$
$$f'''x = +$$

*) Vergelijk mijne *Deelbaarheid*, N°. 9.

Substitueeren wij hierin:

$x = 3$, dan vinden wij $+ - - +$ twee variatiën
$x = 4$, " $+ + + +$ geene variatiën.

De twee positieve wortels liggen nu tusschen 3 en 4. Om ze te scheiden, veranderen wij de gevondene functiën in functiën, waarin x met 3 verminderd wordt en vinden dan:

$$f(y) = y^3 + 20y^2 - 9y + 1$$
$$f'(y) = 3y^2 + 40y - 9$$
$$f''(y) = 122y - 27$$
$$f'''(y) = +$$

Door de volgende substitutie vindt men:

$y = 0$ $+ - - +$ twee variatiën;
$y = 0{,}1$ $+ - - +$ "
$y = 0{,}2$ $+ - - +$ "
$y = 0{,}3$ $+ + + +$ geene variatiën.

De wortels van de opgegeven vergelijking liggen dus tusschen 3,2 en 3,3. Dewijl ze nog niet gescheiden zijn, veranderen wij de functiën van y in functiën van z, door y met 0,2 te verminderen en vinden dan:

$$f(z) = z^3 + 20{,}6z^2 - 0{,}88z + 0{,}008$$
$$f'(z) = 3z^2 + 41{,}2z - 0{,}88$$
$$f''(z) = 122z - 2{,}6$$
$$f'''(z) = +$$

Verder heeft men:

$z = 0$: $+ - - +$
$z = 0{,}01$: $+ - - +$ twee variatiën,
$z = 0{,}02$: $- - - +$ ééne variatie,
$z = 0{,}03$: $+ + + +$ ééne variatie.

De positieve wortels zijn dus tot in twee decimalen 3,21 en 3,22; de som der wortels $= 11$ zijnde, is de overblijvende negatieve wortel $= -17{,}4$.

§ 26. Over het opsporen van de meetbare wortels eener vergelijking.

1. *Wanneer de vergelijking*

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + A_3 x^{n-3} \ldots + A_{n-1} x + A_n = 0,$$

waarin alle coëfficiënten geheele getallen zijn, een geheel getal α tot wortel heeft, dan moeten de quotiënten

$$\frac{A_n}{\alpha} + A_{n-1}, \quad \frac{\frac{A_n}{\alpha} + A_{n-1}}{\alpha} + A_{n-2}, \quad \frac{\frac{\frac{A_n}{\alpha} + A_{n-1}}{\alpha} + A_{n-2}}{\alpha} + A_{n-3}, \text{ enz.}$$

allen geheele getallen zijn; en wanneer men deze bewerking voortgezet heeft, totdat de coëfficiënt van den tweeden term gebruikt is geworden, — de coëfficiënten der ontbrekende termen door nullen aanvullende, — dan zal dit laatste quotiënt — 1 zijn.

Bewijs. Nemen wij, om dit te bewijzen, de algemeene vijfdemachtsvergelijking:

$$x^5 + A_1 x^4 + A_2 x^3 + A_3 x^2 + A_4 x + A_5 = 0,$$

dan kan men daaruit achtereenvolgens afleiden, omdat α een wortel dier vergelijking is:

$$A_5 = -\alpha^5 - A_1\alpha^4 - A_2\alpha^3 - A_3\alpha^2 - A_4\alpha$$

$$\frac{A_5}{\alpha} = -\alpha^4 - A_1\alpha^3 - A_2\alpha^2 - A_3\alpha - A_4$$

$$\frac{\frac{A_5}{\alpha} + A_4}{\alpha} = -\alpha^3 - A_1\alpha^2 - A_2\alpha - A_3$$

$$\frac{\frac{\frac{A_5}{\alpha} + A_4}{\alpha} + A_3}{\alpha} = -\alpha^2 - A_1\alpha - A_2$$

$$\frac{\frac{\frac{\frac{A_5}{\alpha}+A_4}{\alpha}+A_3}{\alpha}+A_2}{\alpha}=-\alpha-A_1$$

$$\frac{\frac{\frac{\frac{A_5}{\alpha}+A_4}{\alpha}+A_3}{\alpha}+A_2}{\alpha}+A_1}{\alpha}=-1$$

waardoor de stelling bewezen is. Men ziet uit deze bewerking tevens, dat het bewijs algemeen is en op alle mogelijke vergelijkingen kan toegepast worden.

2. De stelling van het voorgaande N°., in verband met het geleerde van § 5, N°. 15, geeft ons nu een geschikt middel aan de hand, om de meetbare wortels eener vergelijking op te sporen. Wij zagen daar namelijk, dat het product van alle wortels absoluut genomen, juist den bekenden term oplevert; omgekeerd zal een deeler van den laatsten term een wortel kunnen zijn; hij zal een wortel zijn, indien hij aan de stelling van 't vorige N°. voldoet. Wij moeten derhalve, om de meetbare wortels eener vergelijking op te sporen, nagaan, welke deelers van den bekenden term aan de in N°. 1 gestelde voorwaarde voldoen. Of $+1$ en -1 wortels eener opgegeven vergelijking zijn, onderzoekt men gemakshalve door substitutie.

Kiezen wij ter opheldering van het gezegde de vergelijking

$$x^4 - 2x^3 - 19x^2 + 8x + 60 = 0.$$

De positieve wortels dezer vergelijking zijn < 20, de negatieve < 6, derhalve behoeven wij slechts de deelers van 60 te aan deze limieten op te schrijven, nadat wij ons door substitutie overtuigd hebben, dat $+1$ noch -1 wortels der vergelijking zijn. Wij schrijven dus in eene horizontale lijn:

2,	3,	4,	5,	6,	10,	12,	15,	— 2,	— 3,	— 4,	— 5
30	20	15	12	10	6	5	4	—30	—20	—15	—12
19	14		4	3				+11	+ 4		
0			— 3					+ 4	+ 5		
-1			— 1					— 1	— 1		

In de eerste rij schrijft men alle deelers binnen de bepaalde limieten; in de tweede de quotiënten van den bekenden term en de opgeschreven deelers; bij deze quotiënten telt men den coëfficiënt van den voorlaatsten term en schrijft het quotiënt van deze som en den daar bovenstaanden deeler in de derde rij; deelingen, die niet opgaan, worden weggelaten, omdat zij nimmer meer een quotiënt —1 zouden kunnen opleveren, enz. Op deze wijze voortgaande, vindt men eindelijk vier quotiënten —1, welke ons aanwijzen, dat 2, 5, —2 en —3 wortels zijn van de opgegeven vergelijking.

Wanneer de limiet van den grootsten wortel nog een groot aantal factoren toelaat, dan kan men dit aantal, door de waarde van $f(x)$ te berekenen voor $x = 1$ of $x = -1$, aanzienlijk verminderen; $f(1)$ toch is de bekende term van de vergelijking, waarvan $x - 1$ en $f(-1)$ van de vergelijking, waarvan $x + 1$ wortels zijn. De deelers van den bekenden term van $f(x)$, met 1 verminderd, moeten dus deelers zijn van $f(1)$; die zelfde deelers, met 1 vermeerderd, moeten deelers zijn van $f(-1)$; zijn zij dit niet, dan kunnen zij ook geene wortels der opgegeven vergelijking zijn.

Neemt men bijv. de vorige vergelijking, dan is $f(1) = 48$ en $f(-1) = 36$.

2	3	4	5	6	10	12	15	— 2	— 3	— 4	— 5	deelers van 60.
1	2	3	4						— 3	— 4	— 6	deelers van 48.
3	4		6					— 1	— 2	— 3	— 4	deelers van 36.

Indien men nu deze drie rijen nagaat, dan ziet men daaruit, dat alleen 2, 3, 5, —2, —3, —5 factoren van den bekenden term zijn, welke een wortel der vergelijking kunnen wezen en met deze deelers handelt men nu, gelijk wij reeds hebben aangetoond.

3. Stelling. *Indien gegeven is*

$$f(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_{n-1} x + A_n$$

en deze functie voor zekere waarde van x *(bijv.* a*) gelijk aan* 0 *wordt, dan zijn*

$$\frac{A_n}{a},\quad \frac{\frac{A_n}{a} + A_{n-1}}{a},\quad \frac{\frac{\frac{A_n}{a} + A_{n-1}}{a} + A_{n-2}}{a},\quad \text{enz.}$$

met het tegengestelde teeken genomen en in omgekeerde volgorde de coëfficiënten van $\varphi(x) = \frac{f(x)}{x-a}$.

Bewijs. Nemen wij bijv. de algemeene derdemachtsvergelijking

$$x^3 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3 = 0$$

en vermenigvuldigen wij die met $x - a = 0$, dan heeft men de vergelijking:

$$f(x) = x^4 + (A_1 - a)x^3 + (A_2 - A_1 a)x^2 + (A_3 - A_2 a)x - A_3 a = 0,$$

van welke vergelijking $x = a$ een wortel is. Passen wij nu op deze vergelijking de bewerking toe van het vorige N°., dan heeft men:

a	Zijnde met het tegengestelde teeken juist de coëfficiënten van het quotiënt $\frac{f(x)}{x-a}$.
$-A_3$	
$-A_2$	
$-A_1$	
-1	

4. Heeft men op de bovenbehandelde wijze de geheele wortels eener vergelijking bepaald, dan valt het gemakkelijk, de irrationeele en imaginaire wortels te vinden door middel eener vierkantsvergelijking, indien hun getal niet grooter is dan twee of door middel van de rechtstreeksche oplossing der vierdemachtsvergelijkingen, indien hun aantal vier mocht zijn.

Wij willen nog een enkel voorbeeld uitwerken. Zij gegeven de vergelijking

$$x^4 + x^3 - 28x^2 - 16x + 120 = 0.$$

Voor limiet der positieve wortels vinden wij $1 + \sqrt{28}$ en voor limiet der negatieve 29. Het beginsel van het vorige N°.

toepassende, vinden wij, dat wij de bewerking van N°. 1 slechts hebben toe te passen op de factoren

2,	3,	— 2	— 5,
+ 60	+ 40	— 60	— 24
+ 22	+ 8	+ 38	+ 8
— 3		— 5	+ 4
— 1		+ 2	— 1

Wortels der vergelijking zijn dus 2 en — 5, terwijl bovendien

$$\frac{x^4 + x^3 - 28x^2 - 16x + 120}{x - 2} = x^3 + 3x^2 - 22x - 60$$

en $\frac{x^4 + x^3 - 28x^2 - 16x + 120}{x + 5} = x^3 - 4x^2 - 8x + 24$,

waaruit door aftrekking volgt:

$$\frac{(x+5-x+2)(x^4+x^3-28x^2-16x+120)}{(x-2)(x+5)} = 7x^2 - 14x - 84$$

of $$\frac{x^4 + x^3 - 28x^2 - 16x + 120}{(x-2)(x+5)} = x^2 - 2x - 12.$$

Stellen wij dit quotiënt gelijk aan 0, dan vinden wij, dat aan de vierkantsvergelijking $x^2 - 2x - 12 = 0$ voldaan wordt door $x = 1 \pm \sqrt{13}$,
zoodat nu de vier wortels der vergelijking gevonden zijn.

---

§ 27. Verschillende methoden ter benadering der irrationeele reëele wortels eener getallen-vergelijking.

1. Wij willen hier achtereenvolgens eenige methoden leeren kennen, om de irrationeele wortels eener vergelijking te leeren benaderen, en nemen daartoe de benaderingsleerwijzen van NEWTON, LAGRANGE, FOURRIER, HORNER en RUTHERFORD; na deze methoden verklaard te hebben, zullen wij die door één of meer voorbeelden ophelderen.

Alvorens echter daartoe over te gaan, moeten wij nog het een

en ander in het midden brengen over onmeetbare wortels, die in eene vergelijking kunnen voorkomen. (Vergel. verder § 21, 17.)

Indien de vergelijking $F(x) = 0$, k gelijke wortels a_1, l gelijke wortels a_2 heeft, enz., dan hebben $F(x)$ en $F_1(x)$ tot grootsten gemeenen deeler

$$(x-a_1)^{k-1}(x-a_2)^{l-1}\ldots\ldots;$$

terwijl $F(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$ tot grootsten gemeenen deeler hebben:

$$(x-a_1)^{k-2}(x-a_2)^{l-2}\ldots\ldots; \text{ enz.}$$

Stelt men derhalve den grootsten gemeenen deeler van $F(x)$ en $F_1(x)$ gelijk aan $\varphi(x)$, dan heeft de vergelijking $F(x) : \varphi(x) = 0$ geene gelijke wortels meer.

Is er nu eene vergelijking gegeven, waarvan de coëfficiënten meetbare getallen zijn, dan moeten er minstens twee paren gelijke onmeetbare wortels zijn of er zijn er geen; want is a_1 een onmeetbare wortel, dan is ook $(x-a_1)$ onmeetbaar en verder elke macht van $(x-a_1)$; komt deze wortel nu k-malen voor, dan is $\varphi(x) = (x-a_1)^{k-1}$ de onmeetbare gr. gem. deeler van twee meetbare functiën $F(x)$ en $F_1(x)$, dit is eene ongerijmdheid, enz.

Zijn a_1 en a_2 beide onmeetbaar, dan kan het product $(x-a_1)(x-a_2)$ meetbaar zijn; komen er dan twee gelijke onmeetbare wortels a_1, dan moeten er noodzakelijk twee andere gelijke onmeetbare wortels a_2 zijn, enz. In 't algemeen is de vergelijking dan minstens van den $2k$den graad.

Op gelijke wijze toont men aan:

dat eene vergelijking drie onmeetbare wortels kan hebben, welke allen evenveel malen voorkomen;

dat eene vergelijking vier onmeetbare wortels kan hebben, waarvan het eene paar k-malen, het andere paar l-malen voorkomt;

dat eene vergelijking vijf onmeetbare wortels kan hebben, waarvan drie k-malen en twee l-malen voorkomen; enz.

Gelijke redeneeringen gelden ook voor gelijke imaginaire wortels, mits ook hier de coëfficiënten meetbaar zijn.

2. A. Benaderingsmethode van Newton.

Na al het voorgaande zal van deze methode geene afzon-

derlijke theoretische verklaring noodig zijn en wij zullen haar daarom aanstonds toepassen op een voorbeeld en wel op hetzelfde, waardoor de groote NEWTON zijne methode heeft duidelijk gemaakt. Zij namelijk gevraagd de wortels te vinden der vergelijking

$$x^3 - 2x - 5 = 0.$$

Volgens den vinder komt het er slechts op aan een wortel te vinden tot in tiende deelen nauwkeurig. Om dat doel te bereiken, substitueerde hij achtereenvolgens de getallen 1, 2, 3, om door eene verandering van teeken twee op elkaâr volgende getallen te vinden, waartusschen de wortel gelegen is; dewijl nu $f(x)$ voor 2 negatief en voor 3 positief wordt, ligt de wortel tusschen 2 en 3 en wij kunnen hem stellen te zijn $2 + p$. Leiden wij nu de vergelijking af in $2 + p = x$, dan vinden wij $p^3 + 4p^2 + 10p - 1 = 0$, waarin p een gebroken is; p^2 zal dus reeds kleiner zijn dan p, p^3 zal kleiner zijn dan p^2. Veronderstellen wij, dat p hoogstens een tiende van 2 is, dan zoude p^2 al een honderdste en p^3 een duizendste deel van 2 zijn: men kan dus de tweede en hoogere machten van p verwaarloozen en vindt daardoor eene eenigszins benaderde waarde van p. Wij nemen derhalve $10p - 1 = 0$ en $p = \frac{1}{10} + q$. Brengen wij deze waarde van p over in $F(p) = 0$, dan vinden wij:

$$q^3 + 6{,}3\,q^2 + 11{,}23q + 0{,}061 = 0.$$

Hierin wederom de hoogere machten van q verwaarloozende, komt er

$$11{,}23q + 0{,}061 = 0,$$

waaruit men vindt $q = -0{,}0054$, enz.

De groote moeilijkheid van deze oplossingsmethode bestaat in het nauwkeurig bepalen van de eerste twee of drie cijfers, daar deze eenmaal nauwkeurig bepaald zijnde, de verwaarloosde tweede- en derde-machten van geen invloed meer kunnen zijn op de volgende cijfers. Om zulks eenigszins met zekerheid te verrichten, vermenigvuldigt men de vergelijking met de reeks 1, 100, 10000, 1000000, dan heeft men de vergelijking

$$y^3 - 20000y - 5000000 = 0,$$

welke natuurlijk een wortel zal hebben tusschen 200 en 300. Men tracht deze grenzen te vernauwen door achtereenvolgens 250, 225, 215, 210 in $f(y)$ te substitueeren en vindt eindelijk, dat de vergelijking een wortel heeft tusschen 209 en 210; de oorspronkelijke vergelijking heeft dus een wortel $2{,}09+q$. Met deze benaderde waarde kan men gerustelijk voortgaan. Leidt men nu de vergelijking af in $2{,}09+q$, dan vindt men uit de oorspronkelijke:

$$q^3+6{,}27\,q^2+11{,}1043\,q-0{,}050621=0,$$

waaruit men drie cijfers voor q benaderen kan. Wij vinden namelijk

$$q=0{,}00455+r,$$

derhalve $x=2{,}09455+r$ enz.

Tot zooverre NEWTON. Latere schrijvers hebben deze methode nader willen verklaren; zij hebben gevallen gevonden, waarin NEWTON's leerwijze geen wortel gaf, maar zij hebben daarbij ook bijna allen over het hoofd gezien, dat NEWTON het kennen der eerste decimalen als eene voorwaarde stelde voor verdere benaderingen. De tegenwoordig gebruikelijke notatiën en bewerking volgende, komt de methode van NEWTON neêr op het volgende: Wanneer gevonden is, dat een wortel x gelegen is tusschen a en $a+1=b$, dan stelt men $x=a+x_1$ en zoekt de vergelijking in $x-a=x_1$. Voor deze vergelijking, gerangschikt volgens de opklimmende machten van x_1, vindt men:

$$f(a)+f_1(x)\,x_1+\frac{f_2(x)}{1.2}\,x_1^2+\ldots\ldots\,x_1^n=0.$$

Is a nu een grens van x, die zeer dicht bij den waren wortel gelegen is, dan kan men de tweede en hoogere machten van x_1 verwaarloozen, om hare waarde nader te bepalen; nauwkeurigheidshalve is het aan te bevelen bij eene eerste en tweede benadering de tweede machten van x_1 ook in aanmerking te nemen. Stellen wij nu ter benadering

$$f(a)+f_1(a)\,x_1=0 \text{ of } f(a)+f_1(a)\,x_1+\frac{f_2(a)}{1.2}\,x_1^2=0,$$

dan zullen wij eene waarde voor x_1 vinden, die bij a gevoegd eene nadere grens voor den wortel vertegenwoordigt. Bij de

vierkantsvergelijking kan men slechts van die waarde gebruik maken, die een zelfde teeken heeft als a. Deze benaderde waarde $= a_1$ stellende, gaat men daarmede voort, gelijk men met a gehandeld heeft, tot men den wortel nauwkeurig genoeg benaderd heeft.

Men had ook de grens b kunnen gebruiken. Men stelle daartoe $x = b - x_1$ en vindt dan door verwaarloozing van de hoogere machten van x_1

$$f(b) - f_1(b)\,x_1 = 0 \text{ of } f(b) - f_1(b)\,x_1 + \frac{f_2(b)}{1.2}x_1^2 = 0,$$

waaruit x_1 berekend kan worden. Wil men inderdaad benaderen, dan moeten, indien a, a_1, a_2, $a_3 \ldots b_3$, b_2, b_1, b de achtereenvolgende grenzen van x voorstellen,

$$a < a_1 < a_2 < a_3 \ldots < x \ldots < b_3 < b_2 < b_1 < b;$$

verwaarloost men dus de tweede en hoogere machten van x_1, dan vindt men:

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f_1(a)}, \qquad b_1 = b - \frac{f(b)}{f_1(b)},$$

$$a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f_1(a_1)}, \qquad b_2 = b_1 - \frac{f(b_1)}{f_1(b_1)},$$

$$a_3 = a_2 - \frac{f(a_2)}{f_1(a_2)}, \qquad b_3 = b_2 - \frac{f(b_2)}{f_1(b_2)},$$

. . . .

waarin $f_1(a)$ en $f(a)$ tegengestelde, $f_1(b)$ en $f(b)$ dezelfde teekens moeten hebben. Zonder ons nu te verdiepen in de gevallen, waarin deze methode slechts met moeite aangewend kan worden, verwijzen wij hier naar het behandelde in § 24 N°. 4. Mochten de achtereenvolgende grenzen door deze toepassing van de leerwijze van NEWTON verkregen, niet nauwer en nauwer worden, dan hebben wij slechts het daar geleerde in aanmerking te nemen, om altijd tot het begeerde resultaat te komen.

Wij willen het laatstgezegde eveneens toepassen op onze vergelijking

$$x^3 - 2x - 5 = 0.$$

Voor $x = 2$ vindt men $f(2) = -1$ en voor $x = 3$ is $f(3) = 16$;

de vergelijking heeft dus een wortel tusschen 2 en 3. Stellen wij nu $a = 2 + a_1$, dan hebben wij

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f_1(a)} = 2 - \frac{f(2)}{f_1(2)} = 2 + \frac{1}{10} = 2{,}1;$$

$$a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f_1(a_1)} = 2{,}1 - \frac{0{,}061}{11{,}23}.$$

Voor $a_1 = 2{,}1$ vinden wij, dat $f(a_1)$ positief wordt; voor $a = 2$ was $f(a)$ negatief: de vergelijking heeft dus een wortel tusschen 2 en 2,1; 2,1 is hier de grootste grens en men heeft te schrijven:

$$b_1 = b - \frac{f(b)}{f_1(b)} = 2{,}1 - \frac{0{,}061}{11{,}23} = 2{,}1 - 0{,}0054 = 2{,}0946.$$

Dewijl voor $b_1 = 2{,}0946$, $f(x) = 0{,}0005\ldots.$ positief is, is de wortel gelegen tusschen 2 en 2,0946; wij vinden dus:

$$b_2 = b_1 - \frac{f(b_1)}{f_1(b_1)} = 2{,}0946 - \frac{0{,}000541550536}{11{,}16204748} =$$

$$= 2{,}0946 - 0{,}00004852\ldots = 2{,}09455148.$$

Wij hadden in het bovenstaande voorbeeld ook volgens de grens b kunnen benaderen. Stellen wij namelijk de eerste waarde des wortels $= 3$, dan is

$$b_1 = b - \frac{f(b)}{f_1(b)} = 3 - \frac{16}{25} = 3 - 0{,}64 = 2{,}36;$$

$$b_2 = b_1 - \frac{f(b_1)}{f_1(b_1)} = 2{,}36 - \frac{3{,}424256}{14{,}7088} = 2{,}36 - 0{,}23 = 2{,}13;$$

$$b_3 = b_2 - \frac{f(b_2)}{f_1(b_2)} = 2{,}13 - \frac{0{,}403597}{11{,}6107} = 2{,}13 - {,}0347 =$$

$$= 2{,}0953\ldots. \text{ enz.};$$

welke wortel reeds tot in twee decimalen nauwkeurig is.

Nemen wij tot een tweede voorbeeld de vergelijking

$$2x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 4x + 10 = 0,$$

dan schrijven wij daarvoor:

$$x^4 + x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 - 2x + 5 = 0,$$

of na vermenigvuldiging met de reeks 1, 2, 4, 8, 16,

$$y^4 + 2y^3 - 18y^2 - 16y + 80 = 0.$$

Schrijft men de vergelijking in $y - 3$, dan heeft men:

$$1 + 14 + 54 + 38 + 5;$$

de vergelijking in $y - 2$ is:

$$1 + 10 + 18 - 32 + 8.$$

In de continue aangroeiing van 2 tot 3 gaan twee variatiën verloren; de vergelijking heeft dus tusschen die beide grenzen twee wortels, welke op grond van § 24, N°. 5, 6, reëel kunnen zijn, en die wij dus trachten te scheiden. Wij verminderen nu de wortels der oorspronkelijke vergelijking met $2\frac{1}{2}$ en vinden dan voor de rij der teekens:

$$\begin{array}{lll} 2: & + + + - + & \\ & 0\ 0\ 0\ 0\ 1 & \} \text{ één reëelen wortel} \\ 2\frac{1}{2}: & + + + - - & \\ & 0\ 0\ 0\ 1\ 1 & \} \text{ één reëelen wortel.} \\ 3: & + + + + + & \end{array}$$

Benaderen wij nu die beide wortels volgens hunne gemeenschappelijke grens, dan is voor den grootsten wortel

$$a = 2\tfrac{1}{2} \text{ en } a_1 = a - \frac{f(a)}{f_1(a)},$$

terwijl men voor den kleinsten wortel heeft

$$b = 2\tfrac{1}{2} \text{ en } b_1 = b - \frac{f(b)}{f_1(b)}.$$

$f(a)$ en $f(b)$, zoowel als $f_1(a)$ en $f_1(b)$, hebben hier dezelfde waarde; de breuken $\frac{f(a)}{f_1(a)}$ en $\frac{f(b)}{f_1(b)}$ hebben dus ook hetzelfde teeken, waaruit volgt, dat de grens $2\frac{1}{2}$ slechts gebruikt kan worden voor de benadering van één wortel en wel voor den grootsten of kleinsten, naar gelang $\frac{f(a)}{f_1(a)}$ negatief of positief is. Voor de benadering van den anderen wortel gebruike men de andere grens. De verdere bewerking laten wij aan den Lezer.

Men zou ook door de vergelijking te vermenigvuldigen met de reeks

$$1, 1000, 1000000, 1000000000, 1000000000000$$

de wortels kunnen scheiden en aanstonds eene benaderde waarde

vinden, die ons door eenvoudige deeling nog verscheidene decimalen nauwkeurig zou doen vinden. — Deze bewerking, ofschoon schijnbaar omslachtig, kan door middel van tafels voor de kwadraat- en kubiekgetallen voor derde- en vierdemachtsvergelijkingen zeer gemakkelijk verricht worden.

Aanmerking. Met het bovenstaande kan men vergelijken: NEWTON's *Arith. univ.* ed. *Castillionei;* SAUNDERSON's *Élem. d' Algèbre;* BOSSUT's *Cours de math.*, II. *Traité d' Algèbre;* vooral Dr. RICHARD BALTZER's *Verhandelingen*, voorkomende in het *Archief der Wisk.*

3. B. Benaderingsleerwijze van LAGRANGE.

Deze methode veronderstelt, even als die van NEWTON, dat men de grenzen gevonden heeft, waartusschen zich één, maar ook niet meer dan één wortel bevindt, en dat deze grenzen hoogstens ééne eenheid verschillen. Noemt men die grenzen a en $a+1$, dan kan men stellen $x = a + \frac{1}{x_1}$. Vermindert men dus de wortels der opgegeven vergelijking met a, dan vindt men de vergelijking in $\frac{1}{x_1}$, waarin $\frac{1}{x_1}$ noodzakelijk kleiner moet zijn dan 1. Leidt men nu hieruit de vergelijking af op de omgekeerde waarden van x_1, dan zal deze één wortel bevatten > 1 en men kan door substitutie wederom de grenzen van dien wortel op eene eenheid na bepalen. Zijn die grenzen a_1 en $a_1 + 1$, dan kan men stellen $x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}$ en de vergelijking afleiden in $x_1 - a_1$ of $\frac{1}{x_2}$, waarin $\frac{1}{x_2} < 1$. De vergelijking samenstellende op de omgekeerde waarden van x_2, zal deze vergelijking één wortel bevatten, die noodzakelijk grooter is dan 1. Hiervan de limieten tot twee op elkaâr volgende gehecle getallen beperkende, kan men wederom stellen

$$x_2 = a_2 + \frac{1}{x_3} \text{ enz.}$$

Is de gezochte wortel onmeetbaar, dan zal deze bewerking nergens afbreken; is de wortel een eindig gebroken, dan zal zij ergens moeten ophouden.

Door substitutie der gevondene waarden vinden wij achtereenvolgens:

$$x = a + \frac{1}{x_1}, \quad x = a + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{x_2}}, \quad x = a + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{x_3}}},$$

enz.

zoodat de getallenwaarde van den wortel uitgedrukt is in eene *kettingbreuk*, welker eigenschappen later een voorwerp onzer beschouwing zullen zijn. Voorloopig zij het genoeg op te merken, dat men de waarde van zoodanige breuk door terugwerking zeer gemakkelijk kan bepalen, want:

$$x = a + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{x_3}}} = a + \frac{1}{a_1 + \frac{x_3}{a_2 x_3 + 1}} = a + \frac{a_2 x_3 + 1}{a_1 a_2 x_3 + a_1 + x_3} =$$

$$= \frac{a a_1 a_2 x_3 + a a_1 + a x_3 + a_2 x_3 + 1}{a_1 a_2 x_3 + a_1 + x_3}.$$

Laat ons deze leerwijze toepassen op de vergelijking:

$$x^4 + 6x^3 - 19x^2 + 36x - 45 = 0.$$

1	+ 6	— 19	+ 36	— 45
	7	— 12	+ 24	— 21
	8	— 4	+ 20	
	9	+ 5		
	10			

21	— 20	— 5	— 10	— 1
	+ 1	— 4	— 14	— 15
	+ 22	+ 18	+ 4	
	+ 43	+ 61		
	+ 64			

15	— 4	— 61	— 64	— 21
	26	— 9	— 82	— 185
	56	+ 103	+ 124	
	86	+ 275		
	116			

Deze vergelijking heeft een reëelen wortel tusschen 1 en 2; wij leiden dus de vergelijking af in $x - 1$ of $\frac{1}{x_1}$. Wij verminderen daartoe de wortels met 1 en vinden, de vergelijking op de omgekeerde waarde des wortels samenstellende:

$$21x_1^4 - 20x_1^3 - 5x_1^2 - 10x_1 - 1 = 0,$$

welke wederom een wortel heeft tusschen 1 en 2.

Leidt men nu de vergelijking af in $x_1 - 1$ en schrijft men dan wederom de vergelijking op de omgekeerde

waarde des wortels, dan heeft men:

$$15x_2^4 - 4x_2^3 - 61x_2^2 - 64x_2 - 21 = 0,$$

welke vergelijking één wortel heeft tusschen 2 en 3.

Leidt men daarna de vergelijking af in $x_2 - 2$, enz.

Wij hebben nu gevonden

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \text{enz.}}} = 1\tfrac{1}{2}.$$

Zetten wij de bewerking ver genoeg voort, 't geen bij deze vergelijking aanleiding zal geven tot zeer langwijlige berekeningen, dan vindt men:

$$x = 1{,}720153.....$$

4. C. Benaderingsleerwijze van Fourrier.

De methode van Fourrier is eigenlijk niets anders, dan de leerwijze van Newton, die tot eene grootere volmaaktheid is gebracht; wij willen ze hier in haar geheel behandelen. Gelijk de beide vorige methoden eischt zij, dat twee grenzen worden aangewezen, waartusschen slechts één reëele wortel aanwezig is; bovendien mag de vergelijking geene gelijke reëele wortels meer bevatten, welke men dus eerst door 't zoeken van den grootsten gemeenen deeler van $F(x)$ en $F_1(x)$ of $F(x)$ en $F_2(x)$ enz. moet opsporen. De veronderstelling, dat er slechts één wortel tusschen a en b ligt, doet dadelijk besluiten, dat als die wortel $= \alpha$ is, $f_1(\alpha)$ niet 0 kan zijn, dewijl dan $f(x) = 0$ twee gelijke wortels tusschen a en b zou hebben. De beide laatste termen van de indexreeks kunnen dus slechts zijn 0,1 of 1,1. Wij kunnen echter tusschen a en b steeds nauwere grenzen a_n en b_n aannemen zoodanig, dat daar tusschen wel de wortel α van $f(x) = 0$ blijft liggen, maar dat de wortel van $f_1(x) = 0$ daar buiten ligt. In die veronderstelling zijn de beide teekens der indexrij 0,1. Dit aangenomen, kunnen de laatste drie teekens volgens het vroeger aangetoonde slechts zijn 1,0,1 of 0,0,1. Indien $f_2(\alpha) = 0$ mocht zijn, dan zouden $f(x) = 0$ en $f_2(x) = 0$ tusschen a en b een zelfden wortel hebben, die door 't zoeken van den grootsten gemeenen deeler bepaald kan worden; is $f_2(\alpha)$ niet gelijk aan 0, dan kan men de grenzen van α zoo dicht bij elkander

brengen, dat zich tusschen a_m en b_m geen wortel meer bevindt van $f_2(a)$ en men dus de indexreeks 0,0,1 heeft in alle gevallen. Op dergelijke wijze blijvende doorredeneeren, vindt men, dat men ook kan aannemen, dat de laatste vier termen der indexreeks zijn 0,0,0,1, enz.

De laatste termen der indexreeks 0,0,1 zijnde, heeft men dus de teekens

+ + —	— — +	+ — +	— + —
+ + +	— — —	+ — —	— + +

Zijn nu a, a_1, a_2, a_3, ... de kleinste, b, b_1, b_2, b_3 ... de grootste grenzen, dan heeft men [vergel. § 24, N°. 4], *wanneer de laatste teekens door twee gelijke teekens worden voorafgegaan:*

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f_1(b)} \qquad b_1 = b - \frac{f(b)}{f_1(b)}$$

$$a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f_1(b_1)} \qquad b_2 = b_1 - \frac{f(b_1)}{f_1(b_1)}$$

$$a_3 = a_2 - \frac{f(a_2)}{f_1(b_2)} \qquad b_3 = b_2 - \frac{f(b_2)}{f_1(b_2)}$$

. . . . . .

en wanneer de laatste teekens door eene variatie worden voorafgegaan:

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f_1(a)} \qquad b_1 = b - \frac{f(b)}{f_1(a)}$$

$$a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f_1(a_1)} \qquad b_2 = b_1 - \frac{f(b_1)}{f_1(a_1)}$$

$$a_3 = a_2 - \frac{f(a_2)}{f_1(a_2)} \qquad b_3 = b_2 - \frac{f(b_2)}{f_1(a_2)}$$

. . . . . .

Wanneer men zoo ver gekomen is, dat de indexreeks 0,0,0,1 tot laatste termen heeft, dan berekent men in het eerste geval de grens $b_n = b_{n-1} - \frac{f(b_{n-1})}{f_1(b_{n-1})}$ en in het tweede geval de grens $a_n = a_{n-1} - \frac{f(a_{n-1})}{f_1(a_{n-1})}$, waaruit wij dus zien, dat wij altijd bij

die grens moeten berekenen, *welke voor* $f(x)$ en $f_2(x)$ *gelijke voorteekens heeft.*

Het berekenen van ééne grens is natuurlijk veel gemakkelijker dan van de beide grenzen; intusschen kan men dan niet meer beoordeelen, in hoe verre de wortel nauwkeurig gevonden is, en moeten wij in dat geval een regel opsporen om die nauwkeurigheid te beoordeelen. Daarvoor dient de volgende

Stelling. *Wanneer de laatste vier termen der indexreeks* 0,0,0,1 *zijn en, zonder op de teekens te letten,* A *de kleinste grootheid is van* $f_1(a)$ *en* $f_1(b)$; B *daarentegen de grootste van* $f_2(a)$ *en* $f_2(b)$, *terwijl verder* $b_m - a_m = v_m$, *dan zijn van den tweeden term te beginnen de getallen*

$$v,\ v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4,\ v_5, \ldots\ldots$$

kleiner dan de respectieve termen der reeks:

$$v,\ v^2 \cdot \frac{B}{2A},\ v_1^2 \cdot \frac{B}{2A},\ v_2^2 \cdot \frac{B}{2A},\ v_3^2 \cdot \frac{B}{2A}, \ldots.$$

of ook dan de respectieve termen der reeks

$$v,\ v^2 \cdot \frac{B}{2A},\ v^4 \cdot \left(\frac{B}{2A}\right)^3,\ v^8 \cdot \left(\frac{B}{2A}\right)^7,\ v^{16} \cdot \left(\frac{B}{2A}\right)^{15} \ldots.$$

Bewijs. Gaat aan het laatste teeken eene permanentie vooraf, dan is (volgens § 24, N°. 3, 4)

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f_1(b)} \quad \text{en} \quad b_1 = b - \frac{f(b)}{f_1(b)},$$

derhalve door aftrekking

$$b_1 - a_1 = b - a - \frac{f(b) - f(a)}{f_1(b)}$$

of

$$v_1 = v - \frac{f(b) - f(a)}{f_1(b)}.$$

Maar volgens § 21, N°. 20, is

$$f(a) = f(b - v) = f(b) - v f_1(b) + \tfrac{1}{2} v^2 f_2(b - \theta v),$$

dus ook

$$\frac{v^2 f_2(b - \theta v)}{2 f_1(b)} = v - \frac{f(b) - f(a)}{f_1(b)}$$

of

$$v_1 = v^2 \frac{f_2(b - \theta v)}{2 f_1(b)}.$$

Hoe nader men nu b_m aan a_m brengt, zoo veel te meer zal v afnemen, zoodat men zal vinden:

$$f_2(b-\theta v) = f_2(b) - \theta v f_3(b-\theta\theta_1 v);$$

$f_3(x)$ behoudt tusschen a en b hetzelfde teeken, volgens de veronderstelling; $f_3(x)$ zal dus voortdurend toe- of afnemen tusschen de grenzen a en b. Geven wij nu aan A en B de in de stelling aangewezen waarde, dan is:

$$\frac{f_2(b-\theta v)}{2f_1(b)} < \frac{B}{2A}.$$

Derhalve is $v_1 < v^2 \cdot \frac{B}{2A}$ en evenzoo

$$v_2 < v_1^2 \cdot \frac{B}{2A}$$

$$v_3 < v_2^2 \cdot \frac{B}{2A}$$

of wat het zelfde is

$$v_1 < v^2 \frac{B}{2A},\ v_2 < v^4 \left(\frac{B}{2A}\right)^3,\ v_3 < v^8 \left(\frac{B}{2A}\right)^7 \ldots\ldots$$

Wordt het laatste teeken voorafgegaan door eene variatie, dan komt het bewijs op hetzelfde neêr; dit blijve voor den Lezer. Intusschen zij het hier nog opgemerkt, dat $b - \theta v > a$, omdat $\theta < 1$ (§ 21, N°. 20); dat dus $b - \theta v$ eene gemiddelde waarde is tusschen b en $b - v$, d. i. tusschen b en a.

Stelt men nu den benaderden wortel achtereenvolgens voor door γ, γ_1, γ_2, γ_3 ..... dan zijn, indien men zich van ééne grens bedient,

$$\gamma_1 = \gamma - \frac{f(\gamma)}{f_1(\gamma)},\ \gamma_2 = \gamma_1 - \frac{f(\gamma_1)}{f_1(\gamma_1)},\ \gamma_3 = \gamma_2 - \frac{f(\gamma_2)}{f_1(\gamma_2)}, \ldots.$$

de achtereenvolgende benaderingsformulen, waarin $\gamma_m = a_m$ of $= b_m$, naar gelang $\frac{f(a)}{f_2(a)}$ of $\frac{f(b)}{f_2(b)}$ een positief quotiënt levert.

Is nu verder $v \leqq \left(\frac{1}{10}\right)^m$ en $\frac{B}{2A} \leqq \left(\frac{1}{10}\right)^k$,

dan is van den tweeden term af elke term der reeks

$$\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \ldots\ldots$$

kleiner dan de overeenkomstige term van de reeks

$$\left(\frac{1}{10}\right)^n, \left(\frac{1}{10}\right)^{2m+k}, \left(\frac{1}{10}\right)^{4m+3k}, \left(\frac{1}{10}\right)^{8m+7k} \ldots\ldots$$

De onnauwkeurigheid, die men dus begaat, wanneer men γ als eene benaderde waarde van den wortel aanmerkt, is dus ten minste niet grooter dan het eerste lid der opgegeven reeks. Hierdoor kan dus altijd de graad van onnauwkeurigheid beoordeeld worden. Bovendien ziet men, dat de hier bedoelde methode alleen benadert, indien de reęks

$$m,\ 2m+k,\ 4m+3k,\ 8m+7k,\ 16m+15k$$

divergeert, 't geen altijd plaats zal hebben, indien $2m+k > m$, want in dat geval heeft men in de eerste plaats $m+k > 0$, dus positief, en vervolgens

$$m = m$$
$$2m+k = m+(m+k)$$
$$4m+3k = 2m+k+2(m+k)$$
enz.

Is dus $m \overline{\overline{>}} 1-k$, dan heeft men $m+k \overline{\overline{>}} 1$ dus > 0, waaruit men ziet, dat de grenzen a, b, altijd zoo nauw moeten genomen worden, dat $m \overline{\overline{>}} 1-k$, alvorens men de opgegeven benaderingsmethode toe kan passen; maar dan ook is men zeker, dat men de wortels

$$\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5 \ldots\ldots$$

nauwkeurig vindt tot in decimalen van de

m-, $3m+k$-, $4m+3k$-, $8m+7k$-, $16m+15k$-de orde.

Dewijl nu intusschen $\gamma_1 = \gamma - \frac{f(\gamma)}{f_1(\gamma)}$ en men, om γ_1 nauwkeurig te berekenen, $2m+k$ decimalen noodig heeft en deze niet altijd volkomen nauwkeurig kunnen berekend worden, deelt men $f_1(\gamma)$ op $f(\gamma)$ tot aan het $2m+k$de decimaalcijfer en verhoogt dit met ééne eenheid. Wij willen aantoonen, dat dit quotiënt tot op eene eenheid van de $2m+k$de orde nauwkeurig is.

Zij $< \gamma_1 < \alpha$, α de gezochte wortel en G de gevonden waarde voor $-\frac{f(\gamma)}{f_1(\gamma)}$, wanneer dit quotiënt met ééne eenheid der $2m+k$de orde verhoogd is, dan is

$$-\frac{f(\gamma)}{f_1(\gamma)} = G - \delta,$$

waarin δ natuurlijk kleiner wordt, hoe verder men de benadering voortzet, maar steeds negatief blijft; hier is hare waarde

$$\delta \leq \left(\frac{1}{10}\right)^{2m+k}.$$

Verder is $\gamma_1 = \gamma + G - \delta,$

dus $\alpha - \gamma_1 = \alpha - (\gamma + G) + \delta.$

Nu heeft men $\alpha - \gamma_1 < \left(\frac{1}{10}\right)^{2m+k}$; derhalve

$$\alpha - (\gamma + G) + \delta < \left(\frac{1}{10}\right)^{2m+k}$$

en ook $$\alpha - (\gamma + G) < \left(\frac{1}{10}\right)^{2m+k} - \delta.$$

Is nu in de eerste plaats $\gamma + G < \alpha$, dus $\alpha - (\gamma + G)$ een positief getal, dan is $\left(\frac{1}{10}\right)^{2m+k} - \delta$ ook positief. Derhalve heeft men:

$$\left(\frac{1}{10}\right)^{2m+k} - \delta < \left(\frac{1}{10}\right)^{2m+k}$$

en dus ook:

$$\alpha - (\gamma + G) < \left(\frac{1}{10}\right)^{2m+k},$$

waaruit men ziet, dat $\gamma + G$ tot op eene eenheid van de $2m+k$de orde nauwkeurig berekend is.

De bewijzen voor de gevallen, voortvloeiende uit de veronderstellingen $\gamma + G > \alpha$, $\gamma > \gamma_1 > \alpha$ en de daaruit voortkomende gevallen $\gamma - G \geqq \alpha$ en $\gamma - G < \alpha$, laten wij aan den Lezer. Intusschen verdient hier opgemerkt te worden, dat, ofschoon de wortel nauwkeurig gevonden wordt tot in eenheden

der $2m+k^{de}$ orde, men niet aanstonds beslissen kan, of de gevonden waarde te groot of te klein is.

Passen wij nu het geleerde toe op de vergelijking

$$x^3 - 2x - 5 = 0,$$

die slechts één reëelen wortel heeft tusschen de grenzen 1 en 10. Uit de gegeven vergelijking kan men aanstonds afleiden:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 2x - 5 \\ f_1(x) &= 3x^2 - 2 \\ f_2(x) &= 6x \\ f_3(x) &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lcccc} (1) & + & + & + & - \\ & 0 & 0 & 0 & 1 \\ (10) & + & + & + & + \end{array}$$

zoodat de begeerde wortel ligt tusschen 1 en 10 en men in de indexreeks te gelijkertijd de volgorde 0,0,0,1 heeft. Daaruit volgt nu:

$$a=1,\ b=10,\ f_1(a)=1\ f_1(b)=298,\ f_2(a)=6,\ f_3(b)=60,$$

$$v=9,\quad A=1,\quad B=60,\quad \frac{B}{2A}=30;$$

$$v<\left(\frac{1}{10}\right)^{-1}\frac{B}{2A}<\left(\frac{1}{10}\right)^{-2},\ m=-1,\ k=-2,$$

$$1-k=3,\quad m<1-k.$$

De voorwaarde $m>1-k$ is dus nog niet vervuld.

Deelen wij den afstand tusschen 1 en 10 door 2 en gaan wij dan weêr op de voorgaande wijze te werk, dan vinden wij

$$a=2,\ b=10,\ f_1(a)=10,\ f_1(b)=298,\ f_2(a)=12,\ f_2(b)=60,$$

$$v=8,\ A=10,\ B=60,\ \frac{B}{2A}=3,$$

$$v<\left(\frac{1}{10}\right)^{-1},\ \frac{B}{2A}<\left(\frac{1}{10}\right)^{-1},\ m=-1\quad k=-1,$$

$$1-k=2\quad m<1-k$$

aan de voorwaarde $m>1-k$ is dus nog niet voldaan.

Nemen wij nu 2,1 om den afstand tusschen 2 en 10 te deelen, dan heeft men:

$$\begin{array}{ll} (2) & + + + - \\ (2{,}1) & + + + + \end{array}$$

en bij gevolg

$$a=2,\ b=2{,}1,\ f_1(a)=10,\ f_1(b)=11{,}23,\ f_2(a)=12,\ f_2(b)=12{,}6;$$

$$v=0{,}1,\ A=10,\ B=12{,}6,\ \frac{B}{2A}=0{,}63;$$

$$v=\left(\frac{1}{10}\right),\ \frac{B}{2A}<\left(\frac{1}{10}\right)^0,\ m=1,\ k=0,$$

$$1-k=1 \qquad m=1-k.$$

Aan de voorwaarde $m \geqq 1-k$ voldaan wordende, kan men nu met het benaderen van den wortel een aanvang maken. Men heeft namelijk $a=2$ en $b=2{,}1$ en, dewijl $f(b)$ en $f_1(b)$ gelijke teekens hebben, $\gamma=2{,}1$ nauwkeurig tot in decimalen der eerste orde. Dewijl nu $2m+k=2$, ontwikkelen wij

$$\frac{f(\gamma)}{f_1(\gamma)}=\frac{0{,}061}{11{,}23}$$

tot in decimalen der tweede orde en vermeerderen de laatste decimaal met eene eenheid, dan vinden wij $G=0{,}01$ en dus

$$\gamma_1=\gamma-G=2{,}09.$$

Thans blijft ons over om te beproeven of de wortel 2,09, die nauwkeurig is tot in twee decimalen, grooter of kleiner is dan de ware wortel.

Om dat te doen, berekenen wij de waarde van de functie voor $x=2{,}09$; volgens de methode van HORNER vinden wij: *)

---

*) FOURRIER was met HORNER's methode niet bekend. Hij had eene eigene berekening. Heeft men bijv. in eene vierde graads functie

$$f(\gamma),\ f_1(\gamma),\ f_2(\gamma),\ f_3(\gamma),\ f_4(\gamma).$$

Vermenigvuldigt men deze reeks, van den tweeden term te beginnen, met s, dan vindt men:

$$sf_1(\gamma),\ sf_2(\gamma),\ sf_3(\gamma),\ sf_4(\gamma).$$

Leidt men hieruit achtereenvolgens af:

$$\begin{array}{rrrrr} & 1 & +0 & -2 & -5 \\ d=2 & & +2 & +2 & \lfloor -1 \\ & & +4 & \lfloor +10 & \\ & & 6 & & \end{array}$$

$$1 + 6 + 10 - 1$$

$p = 0{,}09$: $6{,}09 + 10{,}5481 - 0{,}050671$

$$F(2{,}09) = -0{,}050671.$$

Dewijl nu $F(2{,}09)$ en $f(b)$ van teeken verschillen, is $2{,}09 < \alpha$ en wij gaan voort met benaderen:

$$a = 2{,}09, \quad b = 2{,}60, \quad m = 2,$$

$$A = 11{,}1043, \quad B = 12{,}6, \quad \frac{B}{2A} = 0{,}5 \ldots\ldots \text{ dus } k <= 0.$$

Omdat $f(b)$ en $f_2(b)$ gelijke voorteekens hebben, is $\gamma = 2{,}10$ en omdat $2m + k = 4$, heeft men tot in vier decimalen nauwkeurig

$$G = 0{,}0055,$$

dus $$\gamma_1 = \gamma - G = 2{,}1 - 0{,}0055 = 2{,}0945.$$

Voor $f(2{,}0945)$ vindt men $-0{,}000574591375$, dewijl dus $f(2{,}0945)$ en $f(b)$ van teeken verschillen, is $2{,}0945 < \alpha$. Men kan nu stellen:

$$a = 2.0945 \text{ en } b = 2{,}0946.$$

Verder is $m = 4$. Men berekent vervolgens k, door achtereenvolgens

$$f(a),\ f_1(a),\ f_2(a) \text{ en } f(b),\ f_1(b) \text{ en } f_2(b)$$

te berekenen en heeft dan de volgende bewerking:

$$f(x-2) = x_1^3 + 6x_1^2 + 10x_1 - 1 = 0.$$

$$\tfrac{1}{2}\varepsilon^2 f_2(\gamma),\ \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 f_2(\gamma),\ \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 f_4(\gamma)$$
$$\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\varepsilon^2 f_3(\gamma),\ \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\varepsilon^2 f_4(\gamma)$$
$$\frac{1}{2.3.4}\varepsilon^4 f_4(\gamma)$$

waaruit door samentelling van de eerste termen al dezer reeksen, door de samentelling der tweede termen, door de samentelling der derde termen enz. gevonden wordt

$$f(\gamma+\varepsilon),\ f_1(\gamma+\varepsilon),\ f_2(\gamma+\varepsilon),\ f_3(\gamma+\varepsilon),\ f_4(\gamma+\varepsilon).$$

Verminderen wij nu de wortels dezer vergelijking met 0,0945, dan vinden wij:

$$x_2^3 + 12{,}567\, x_2^2 + 11{,}16079075\, x_2 - 0{,}000574691375;$$

verminderen wij haar nog met 0,0001, dan komt er:

$$x_3^3 + 12{,}5676\, x_3^2 + 11{,}16204748\, x_3 + 0{,}000341550536.$$

$$f_1(a) = 11{,}16079075 \qquad f_1(b) = 11{,}16204748$$
$$f_2(a) = 12{,}567 \qquad f_2(b) = 12{,}5676;$$

derhalve $A = 11{,}16079075$ en $B = 12{,}5676$

$$\frac{B}{2A} = 0{,}5 < \left(\frac{1}{10}\right)^0, \text{ dus } k = 0;$$

dewijl $f(b)$ en $f_2(b)$ gelijke voorteekens hebben, heeft men, omdat $2m + k = 8$ is

$$\frac{f(\gamma)}{f_1(\gamma)} = \frac{0{,}000341550536}{11{,}16204748} = 0{,}00004852$$

en $$\gamma_1 = \gamma - G = 2{,}09455148,$$

nauwkeurig tot in acht decimalen.

Aanmerking. Wij staken hier de bewerking, omdat wij bij de toepassing van HORNER's methode daarmede de leerwijze van FOURRIER willen verbinden, om daardoor eene gecombineerde leerwijze te vinden, die aan de spoedige berekening van HORNER de nauwkeurigheid paart van FOURRIER.

De hier gebruikte vergelijking is beroemd in de geschiedenis van de oplossing der hoogere machtsvergelijkingen. NEWTON gebruikte haar het eerst, om daaraan zijne leerwijze te toetsen; LAGRANGE gebruikte haar eveneens voor zijne leerwijze in zijn *Traité de la résolution des équations numériques*; FOURRIER vond den wortel, door zijne voorgangers slechts in zeven decimalen nauwkeurig gevonden, nauwkeurig tot in twee en dertig, namelijk:

2,09455 14815 42326 59148 23865 40579 30.

5. D. Benaderingsleerwijze van HORNER.

Nadat men de grenzen der wortels heeft opgespoord, zoodat men eindelijk twee op elkaâr volgende getallen gevonden heeft,

waartusschen een wortel gelegen is, d. i. indien men heeft $a < \alpha < a + 1$, waarin α den wortel en a en $a + 1$ zijne grenzen voorstellen, dan kan men dien wortel met a verminderen; daardoor verkrijgt men eene vergelijking, welker wortel gelegen is tusschen 0 en 1. Men zoekt nu tusschen welke twee op elkaâr volgende tiende deelen de wortel gelegen is; noemt men die a_1 en $a_1 + 1$, dan kan men den wortel dezer vergelijking met a_1 verminderen en bekomt eene vergelijking, die een wortel heeft tusschen 0,0β en 0, welken wortel men wederom met de honderdste deelen kan verminderen, enz.

De achtereenvolgende benaderingen voorstellende door γ, γ_1, γ_2, γ_3, ... heeft men

$$\gamma_1 = \gamma + a,\ \gamma_2 = \gamma + (a + a_1),\ \gamma_3 = \gamma + (a + a_1 + a_2),$$
$$\gamma_4 = \gamma + (a + a_1 + a_2 + a_3),\ \text{enz.}$$

Het komt er dus voornamelijk op aan, om de achtereenvolgende getallen a, a_1, a_2 enz. te bepalen.

Is de laatste term der vergelijking $f(x) = 0$ negatief en zijn de andere termen positief, dan zal zulks met de laatste termen van $f(x_1)$, $f(x_2)$... ook het geval moeten zijn. Zoodra men dus dien laatsten term positief ziet worden, is dit een bewijs, dat men een cijfer van den wortel te groot heeft genomen. — Verder gaat men hierbij te werk als bij de methode van NEWTON. Zijn $F_1(a)$ en $F(a)$ de coëfficiënten van de beide laatste termen van $f(x-a) = 0$, dan kan men met verwaarloozing van alle overige termen stellen:

$$F_1(a)\, x_1 + F(a) = 0,$$
$$x_1 = -\frac{F(a)}{F_1(a)}.$$

Is nu echter $F(a) > F_1(a)$ of wordt $F(a)$ en dus ook A_n der oorspronkelijke vergelijking voorafgegaan door meerdere variatiën, dan kan men door deze handelwijze in het eerste geval nooit, in het tweede geval somtijds, het juiste cijfer vinden en men moet dan zijne toevlucht zoeken tot achtereenvolgende substitutiën van 0,1, 0,2, 0,3, enz. Beter is het de vergelijking te vermenigvuldigen met eene reeks, waarvan 1 de eerste term, 100 of 1000 de reden is en zoo doende door beproeving twee of

drie decimalen te vinden, zullende men na zoodanige handelwijze om een cijfer der duizendste deelen enz. te vinden, gerustelijk de tweede en hoogere machten van x_1 kunnen verwaarloozen.

Mochten zich twee reëele wortels tusschen een paar grenzen bevinden, dan moet men trachten die te scheiden, hetgeen door substitutie altijd mogelijk zal zijn.

Een en ander willen wij thans door eenige voorbeelden opheldéren. Wij nemen daartoe in de eerste plaats de vergelijking $x^3 - 2x - 5 = 0$, welke, zooals ons bekend is, een positieven wortel heeft tusschen 2 en 3.

1	0	−2	−5 $x = 2{,}09455$
	2	4	+4
	2	+2	* −1
	4	4	0,949329
	* 6	* 10(b) (z)	† −0,050671
	0,09	0,5481	44517584
	6,09	10,5481 (b)	§ −0,006153416
	0,18	81	5578824625
	† 6,27(c)	† 11,1043(c)	** −0,000574591375
	0,004	25096	558055246375
	6,274	11,129396	†† −0,000016536128625
	8	16	
	§ 6,282	§ 11,154508	
	0,0005	314125	
	6,2825	11,15764925	
	10	25	
	** 6,2835	** 11,16079075	
	0,00005	3141775	
	6,28355	11,1611049275	
	10	25	
	†† 6,28365	†† 11,1614191075	

(a) Men begint den wortel met 2 te verminderen, daarbij gebruik makende van de verkortingen, waarvan men zich bij de worteltrekking bedient [zie mijne *Theorie der Algem. Rekenk.* I, pag. 196] en vindt dan voor $f(x-2) = 0$

$$x_1^3 + 6x_1^2 + 10x_1 - 1 = 0,$$

welke vergelijking nu een wortel moet hebben tusschen 0 en 1. Verwaarloost men dus de hoogere machten van x_1, dan vindt men $x_1 = 0{,}1$ en daarmede den wortel verminderende, heeft men

$$\begin{array}{rrrr} 1 & +\,6 & +\,10 & -\,1 \\ & 0{,}1 & 0{,}61 & 1{,}061 \\ \hline & 6{,}1 & +\,10{,}61 & +\,0{,}061 \end{array}$$

waardoor de laatste term positief wordt en dus aanwijst, dat de wortel te groot is; wij nemen daarvoor dus 0 tiendedeelen en een weinig minder, bijv. 0,09.

(*b*) Het respectievelijk achteruit springen van een, twee, drie decimalen zal den Lezer, die nauwkeurig op het decimaalteeken let, duidelijk zijn, waarom wij dienaangaande in geene nadere verklaring treden.

(*c*) Zoo handelende, vindt men voor $f(x - 2{,}09) = 0$,

$$x_2^3 + 6{,}27x_2^2 + 11{,}1043x_2 - 0{,}050671 = 0,$$

welke vergelijking een wortel bevat, welks eerste cijfer van waarde op de plaats der duizendste deelen staat, en dat gevonden wordt door

0,050671 te deelen door 11,1043.

Op de boven beschreven wijze voortgaande, vindt men nu achtereenvolgens de afgeleide vergelijkingen:

$$x_3^3 + 6{,}282x_3^2 + 11{,}154508x_3 - 0{,}006153416 = 0,$$
$$x_4^3 + 6{,}2835x_4^2 + 11{,}16079075x_4 - 0{,}000574591375 = 0,$$
$$x_5^3 + 6{,}28365x_5^2 + 11{,}1614191075x_5 - 0{,}000016536128625 =$$

Passen wij hierop nu de methode van FOURRIER toe, dan vindt men:

$$f_1(a) = 11{,}1614191075 \qquad f_2(a) = 12{,}5673$$

$$\begin{array}{rrrr} 1 & +\,6{,}28365 & +\,11{,}1614191075 & -\,0{,}000016536128625 \\ & 6{,}28366 & 628366 & 111614819441 \\ \hline & 2 & 11{,}1614819441 & +\,0{,}000095078690816 \\ \hline & 6{,}28368 & 1 & \\ \hline & & 11{,}1615447808 & \end{array}$$

$$f_1(b) = 11{,}1615447808 \qquad f_2(b) = 12{,}56736.$$

Derhalve $A = 11{,}1614191075$ en $B = 12{,}56736$.

$$\frac{B}{2A} = \frac{12{,}56\ldots}{22{,}32\ldots} < \left(\frac{1}{10}\right)^0, \text{ dus is } k = 0, \text{ en } 2m + k = 10.$$

Omdat verder $f(b)$ en $f_2(b)$ gelijke teekens hebben, heeft men

$$\frac{f(\gamma)}{f_1(\gamma)} = \frac{0{,}000095078690816}{11{,}1615447808} = 0{,}0000085185$$

nauwkeurig tot in tien decimalen, zoodat

$$\gamma_1 = \gamma - G = 2{,}09456 - 0{,}0000085185 = 2{,}0945514815.$$

Wil men nu de benadering voortzetten tot op twintig decimalen, dan nemen wij de afgebroken bewerking weder op en werken de gevonden decimalen bij:

6,2836534	11,1614253911 51	— 0,000016536128625
8	1	11161425391151
6,28365428	11,1614316748 03	05374703233849
16	251346136	44645736753057 44
6,283654441	11,16143418826436	09101295585432 56
2	16	89291497635345 7792
6,2836544435	11,1614367017258 8	01721458218979 8208
10	5026923424	11161437713394225641
	11,1614372044182224	06053144476403982359
	64	55807188614098536523 75
		—0,000000000472425614994128706625
	11,1614377071105712	
	6283654441	
	11,1614377133942256 41	
	1	
	11,1614377196778800 83	
	31418272217 5	
	11,1614377228197073047 5	
	25	
	11,1614377259615345267 5	

Hieruit volgt de vergelijking:

$$x_{10}^2 + 6{,}2836544445x_{10}^2 + 11{,}1614377259615345267 5x_{10} - 0{,}000000000472425614994128706625$$

6,2836544446	11,1614377265898999721 1	11161437726589899971 21
2		+0,000000000643718157664861290496
6,2836544448	11,1614377272182654156 8	

$$f_1(a) = 11{,}16143\ldots\ldots \qquad f_2(a) = 12{,}58\ldots\ldots$$
$$f_1(b) = 11{,}1614\ldots\ldots \qquad f_2(b) = 12{,}58\ldots\ldots$$
$$A = 11{,}16143\ldots\ldots \qquad B = 12{,}58\ldots\ldots$$
$$\frac{B}{2A} = \frac{12{,}58\ldots\ldots}{22{,}32\ldots\ldots} < \left(\frac{1}{10}\right)^6.$$

Derhalve heeft men $k = 0$, $2m + k = 20$ en omdat $f(b)$ en $f_2(b)$ hetzelfde teeken hebben

$$G = \frac{f(\gamma)}{f_1(\gamma)} = \frac{0{,}00000000064371815766486129 0496}{11{,}161437727218265415 68} =$$
$$= 0{,}00000\ 00000\ 57673\ 40852,$$

welk quotiënt tot in eenheden der twintigste decimaal nauwkeurig is. Wij hebben dus

$$\gamma_1 = \gamma - G = 2{,}09455\ 14815\ 42326\ 59148.$$

Werkt men nu de laatst gevonden tien cijfers bij, dan zal men door deeling nog twintig decimalen nauwkeurig kunnen vinden.

Aanmerking. De te verrichten deelingen mogen oogenschijnlijk groot zijn, zij, die met de *division ordonnée* van FOURRIER bekend zijn, (zie mijne *Theorie der Algemeene Rekenkunde* I, § 16, pag. 172) kunnen ze met zeer veel gemak spoedig verrichten. Bovendien kan men zich ook nog van de verkorte deeling (zie hetzelfde werk, § 16, pag. 171) bedienen, om door eene eenvoudige deeling een aantal decimalen van den wortel te bekomen. Daarbij dient intusschen nauwkeurig gelet te worden op de onnauwkeurigheid, die men begaat, door het weglaten der achtereenvolgende cijfers.

6. *Men vraagt de reëele wortels van de vergelijking:*

$$x^3 - 7x + 7 = 0.$$

Vermindert men hierin achtereenvolgens de wortels met

$$2,\ 1,\ -1,\ -2\ldots\ldots$$

dan vindt men voor de teekens:

(0)	+ 0 − +	(−1)	+ − − +
(1)	+ + − +	(−2)	+ − + +
(2)	+ + + +	(−3)	+ − + +
		(−4)	+ − + −

De vergelijking heeft twee wortels tusschen 1 en 2 en één tusschen −3 en −4. Daar de beide positieve wortels volgens

den regel van FOURRIER of STURM blijken bestaanbaar te zijn, trachten wij ze te scheiden.

(1)	+	+	−	+
	0	0	0	1
(1,5)	+	+	−	−
	0	0	0	1
(2)	+	+	+	+

Er ligt dus één wortel tusschen 1 en 1,5 en één tusschen 1,5 en 2.

Vermenigvuldigen wij, om de eerste twee decimalen van de wortels der vergelijking te vinden, de termen respectievelijk met 1, 100, 10000, 1000000, dan vindt men één wortel der nieuwe vergelijking tusschen 135 en 136, één tusschen 169 en 170 en één tusschen −304 en −305. Tot in twee decimalen zijn dus die wortels 1,35, 1,69, −3,04.

Om de wortels verder te benaderen, volgen wij HORNER's methode.

1 + 0	− 7	+ 7 $x = 1{,}356895867$.
1	1	− 6
1	− 6	+ 1
2	1	− 0,903
3,3	− 4	+ 0,097
6	99	− 86625
3,95	− 3,01	+ 10375
10	9	− 9048984
4,056	− 1,93	1326016
12	1975	1184430
4,0|68	− 1 7325	141586
	25	132923
	− 1,5325	8663
	24336	7382
	− 1,508164	1281
	36	1181
	− 1,48379|2	100
	325|4 (a)	89
	− 1,48053|8	11
	− 1,4772|8	10
	3|6	1
	− 1,4769|2	
	− 1,4765	

(a) Wij beginnen hier de bewerking, even als in de derde-

machtsworteltrekking te verkorten, door in de eerste kolom twee, in de tweede één cijfer weg te laten. Het is echter nauwkeurigheidshalve goed, steeds een der weggeschrapte cijfers van den deeler in rekening te brengen. Over de nauwkeurigheid der beide laatste decimalen kan men geen uitspraak doen.

Om den tweeden wortel te benaderen, handele men als volgt:

1 + 0	− 7	+ 7	1,692021471
1	1	− 6	
1	− 6	+ 1	
2	1	− 1,104	
3,6	− 4	− 0,104	
1,2	2,16	100809	
4,89	− 1,84	3191	
18	36	3156888	
5,072	+ 0,68	34112	
4	4401	31774	
5,0|76	1,1201	2338	
	81	1589	
	1,5683	749	
	10144	635	
	1,578444	114	
	4	111	
	1,5885|9|2	3	
	1		
	1,5887		

Stelt men nu verder $x = -y$, dan krijgen de wortels der vergelijking tegengestelde teekens en men vindt voor den derden wortel

$$-3{,}0489173396.$$

7. Alvorens over te gaan tot de benadering van een wortel uit eene vierdemachtsvergelijking, moeten wij hier nog een paar gewichtige aanmerkingen maken.

1°. Eene derdemachtsvergelijking heeft altijd één reëelen wortel, hetzij positief, hetzij negatief; zoodra men dien berekend heeft, kan men aanstonds beoordeelen, of de beide andere wortels imaginair zijn of niet, en wel door het volgende hulpmiddel.

Indien α de gevonden wortel van de derdemachtsvergelijking is, dan zijn de coëfficiënten van de vierkantsvergelijking, die de beide overige wortels bevat, elk met α verminderd;

$$1,\ \tfrac{1}{2}F_2(\alpha) \text{ en } F_1(\alpha);$$

want volgens de veronderstelling is $F(\alpha) = 0$.

Hieruit nu volgt, dat men heeft de vierkantsvergelijking:

$$x^2 + \tfrac{1}{2} F_2(\alpha) x + F_1(\alpha) = 0.$$

Is hierin $F_1(\alpha)$ negatief, dan heeft deze vergelijking altijd reëele wortels; is $F_1(\alpha)$ positief, dan heeft de vergelijking imaginaire wortels, indien

$$F_1(\alpha) > \{\tfrac{1}{4} F_2(\alpha)\}^2.$$

Opdat de wortels reëel zijn, moet men dus hebben:

$$\tfrac{1}{16} (F_2(\alpha))^2 > F_1(\alpha).$$

Stelt men nu eene derdemachtsfunctie voor door

$$F(\alpha) = \alpha^3 + A_1\alpha^2 + A_2\alpha + A_3,$$

dan is $F_1(\alpha) = 3\alpha^2 + 2A_1\alpha + A_2$

$$F_2(\alpha) = 6\alpha + 2A_1$$

en men heeft dan, opdat de wortels reëel zijn:

$$36\alpha^2 + 24A_1\alpha + 4A_1^2 > 48\alpha^2 + 32A_1\alpha + 16A_2$$

$$4A_1^2 - 9\alpha^2 - 6A_1\alpha - 15A_2 > 3\alpha^2 + 2A_1\alpha + A_2$$

$$4A_1^2 - 3\alpha(3\alpha + A_1) - 3A_1\alpha - 15A_2 > 3\alpha^2 + 2A_1\alpha + A_2$$

$$4A_1^2 - 3\alpha \times \tfrac{1}{2} F_2(\alpha) - 3A_1\alpha - 15A_2 > F_1(\alpha).$$

2°. Eene tweede opmerking betreft de wortels, waarvan eenige achtereenvolgende cijfers van de hoogste orden gelijk zijn. Heeft, om dit door een voorbeeld duidelijk te maken, eene vergelijking de wortels 2,3784192.... en 2,3784237...., waarvan de eerste vier decimalen dezelfde zijn, dan zal het scheiden dezer wortels op de opgegeven wijze (§ 24, N°. 7) aan vele bezwaren onderhevig zijn. Maar gebruik makende van de stelling van § 24, N°. 15, zal $f_1(x) = 0$ een wortel hebben tusschen 2,37841... en 2,37842...; berekent men dus den wortel van $f_1(x) = 0$ en $f(x) = 0$, dan zal men de beide wortels der vergelijking $f(x) = 0$ gemakkelijk scheiden, om daarna elk afzonderlijk te berekenen. Een en ander is zoo duidelijk, dat er wel geen afzonderlijk voorbeeld ter opheldering vereischt zal worden.

Ten slotte willen wij thans nog de wortels benaderen van eene vierdemachtsvergelijking. De Lezer zal daaruit zeer gemakkelijk zien, hoe voor hoogere graden gehandeld moet worden. Kiezen wij daartoe het volgende

Voorbeeld. *Men vraagt den negatieven wortel te benaderen van de vergelijking*

$$x^4 + x^3 + x^2 + 3x - 100 = 0.$$

Volgens § 5, N°. 5 heeft deze vergelijking altijd een reëelen negatieven en een reëelen positieven wortel. Na eenige substitutiën zullen wij vinden, dat de negatieve wortel gelegen is tusschen — 3 en — 4. Wij substitueeren nu $-y$ voor x en het zoeken van den negatieven wortel wordt zoodoende teruggebracht tot het opsporen van een positieven tusschen 3 en 4. Daartoe heeft men de volgende bewerking:

3,43357786336599

1				
— 1	+ 1	— 3	—100	
3	6	21	54	
+ 2	7	18	— 46	
3	15	66	41,6896	
5	22	84	— 4,3104	
6	9	20,224	3,84456501	
11,4	46	104,224	— 0,46583499	
4	4,56	22,112	0,390491222121	
11,8	50,56	126,336	— 75343767879	
8	4,72	1,816167	65189289046	
12,63	55,28	128,152167	— 10154478833	
3	16	1,827561	9128951421	
12,66	60,16	129,979728	— 1025527412	
6	3789	184012707	912928254	
12,723	60,5389	130,163740707	— 112599158	
3	3793	184127241	104335040	
12,726	60,9187	130,3478679483	— 8264118	
6	9	3071014|5	7825130	
12,732	61,2994	130,3785780913	— 438988	
	38169	3071332|5	391256	
	61,3375 69	130,4092914|2	— 47732	
	38178	43003|1	39126	
	61,3757 47	130,4135917|3	— 8606	
	9	43003|1	7825	
	61,4139|34	130,417892|0	— 781	
	63|6	430|0	652	
	61,4202	130,418322	— 129	
	63|6	430	117	
	61,42665	130,41875|2	— 12	
	61|43|30	4|8	11	
		130,4188|0	1	
		|4		

Voor den positieven wortel zal men vinden 2,8028512181582... De beide andere wortels zijn imaginair.

---

§ 28. Over het opsporen van de reëele en imaginaire wortels der getallen-vergelijkingen.

1. Zij gegeven de algemeene vergelijking

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0 \ldots (\alpha)$$

Verminderen wij de wortels dezer vergelijking met p, dat is nemen wij

$$y = x - p \quad \text{of} \quad x = y + p,$$

dan gaat de vergelijking (α) over in

$$y^m + B_1 y^{m-1} + B_2 y^{m-2} + \ldots B_{m-1} y + B_m = 0 \ldots (\beta)$$

waarin (vergel. § 21, 2, bladz. 232):

$$\left.\begin{aligned}
B_1 &= mp + A_1 \\
B_2 &= \frac{m(m-1)}{1.\,2} p^2 + (m-1) A_1 p + A_2 \\
B_3 &= \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\,2.\,3} p^3 + \frac{(m-1)(m-2)}{1.\,2.} A_1 p^2 + (m-2) A_2 p + A_3 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
B_{m-1} &= m p^{m-1} + (m-1) A_1 p^{m-2} + (m-2) A_2 p^{m-3} + \ldots + A_{m-1} \\
B_m &= p^m + A_1 p^{m-1} + A_2 p^{m-2} + \ldots A_{m-1} p + A_m.
\end{aligned}\right\} (\gamma)$$

Stellen wij nu, dat de opgegeven vergelijking gedeeltelijk bestaanbare, gedeeltelijk imaginaire wortels heeft, dan kunnen wij deze voorstellen door:

$$p + \sqrt{-q},\ p - \sqrt{-q},\ r_1,\ r_2 \ldots\ldots$$

Het eerste lid der vergelijking (α) bestaat dan uit het product van de factoren

$$\left\{x - (p + \sqrt{-q})\right\}\left\{x - (p - \sqrt{-q})\right\}(x - r_1)(x - r_2)\ldots;$$

indien wij het product der reëele eerste-machtsfactoren gelijk stellen aan

$$x^{m-2} + \alpha_1 x^{m-3} + \alpha_2 x^{m-4} + \ldots \alpha_{m-2} \ldots\ldots (1),$$

vinden wij voor het product van alle factoren

$$x^m + (\alpha_1 - 2p)x^{m-1} + (\alpha_2 - 2\alpha_1 p + p^2 + q)x^{m-2} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \{\alpha_{m-3}(p^2+q) - 2p\alpha_{m-2}\}x + \alpha_{m-2}(p^2+q),$$

welk product gelijk moet zijn aan 0.

Dewijl de vergelijking, die wij thans verkregen hebben, identiek moet zijn met de vergelijking (α), is:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \alpha_1 - 2p \\ A_2 &= \alpha_2 - 2\alpha_1 p + p^2 + q \\ A_3 &= \alpha_3 - 2\alpha_2 p + \alpha_1(p^2+q) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{m-2} &= \alpha_{m-2} - 2p\alpha_{m-3} + \alpha_{m-4}(p^2+q) \\ A_{m-1} &= -2p\alpha_{m-2} + \alpha_{m-3}(p^2+q) \\ A_m &= \alpha_{m-2}(p^2+q), \end{aligned}\right\} (\delta)$$

en deze waarden substitueerende in de vergelijkingen (γ), vinden wij:

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= (m-2)p + \alpha_1 \\ B_2 &= \frac{(m-2)(m-3)}{1.\ 2}p^2 + (m-3)\alpha_1 p + \alpha_2 + q \\ B_3 &= \frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{1.\ 2.\ 3}p^3 + \frac{(m-3)(m-4)}{1.\ 2}\alpha_1 p^2 + \\ &\quad + (m-4)\alpha_2 p + \alpha_3 + B_1 q \\ B_4 &= \frac{(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}p^4 + \frac{(m-3)(m-4)(m-5)}{1.\ 2.\ 3}\alpha_1 p^3 + \\ &\quad + \frac{(m-4)(m-5)}{1.\ 2}\alpha_2 p^2 + (m-5)\alpha_3 p + \alpha_4 + B_3 q - q^2 \end{aligned}\right\} (\varepsilon)$$

$$B_5 = \frac{(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)(m-6)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}p^5 + \frac{(m-3)(m-4)(m-5)(m-6)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}\alpha_1 p^4 \times$$
$$+ \frac{(m-4)(m-5)(m-6)}{1.\ 2.\ 3}\alpha_2 p^3 + \frac{(m-5)(m-6)}{1.\ 2}\alpha_3 p^2 + (m-6)\alpha_4 p +$$
$$+ \alpha_5 + B_3 q - B_1 q^2$$

$$B_6 = \frac{(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)(m-6)(m-7)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}p^6 + \frac{(m-3)(m-4)(m-5)(m-6)(m-7)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}\alpha_1 p^5$$
$$+ \frac{(m-4)(m-5)(m-6)(m-7)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}\alpha_2 p^4 + \frac{(m-5)(m-6)(m-7)}{1.\ 2.\ 3}\alpha_3 p^3 +$$
$$+ \frac{(m-6)(m-7)}{1.\ 2}\alpha_4 p^2 + (m-7)\alpha_5 p + \alpha_6 + B_4 q - B_2 q^2 + q^3$$

enz.

Gemakkelijk is hieruit de samenhang te zien tusschen de coëfficiënten van de afgeleide functie, wier wortels met het bestaanbaar gedeelte van de imaginaire wortels der primitieve vergelijking verminderd zijn. — Het is door middel dezer afgeleide waarden, dat wij nu achtereenvolgens de imaginaire wortels eener vergelijking willen opsporen.

2. Over het vinden der imaginaire wortels in derdemachtsvergelijkingen.

Nemen wij de algemeene vergelijking van den derden graad

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0, \quad \ldots\ldots \quad (A)$$

dan kunnen wij de wortels voorstellen door $p + \sqrt{-q}$, $p - \sqrt{-q}$ en r; r is altijd reëel; de beide andere wortels zullen zulks zijn, indien q negatief is.

Dewijl het product (1) slechts uit één factor bestaat, heeft men $\alpha_2 = \alpha_3 = \text{enz.} = 0$, zoodat uit de vergelijkingen (s) onmiddellijk wordt afgeleid, door daarin $m = 3$ te stellen:

$$B_1 = p + \alpha_1, \quad B_2 = q, \quad B_3 = B_1 q \ldots\ldots \quad (B)$$

Uit de tweede en derde vergelijking q elimineerende, heeft men:

$$B_1 B_2 - B_3 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (C)$$

Substitueert men in de vergelijkingen (γ) $m = 3$, dan vindt men:

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= 3p + a \\ B_2 &= 3p^2 + 2ap + b \\ B_3 &= p^3 + ap^2 + bp + c \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (D);$$

deze waarden overbrengende in de vergelijking (C), vindt men:

$$p^3 + ap^2 + \frac{a^2 + b}{4} p + \frac{ab - c}{8} = 0 \ldots\ldots (E)$$

zijnde eene vergelijking, welke ons het meetbare gedeelte der beide wortels $p \pm \sqrt{-q}$ leert vinden.

Door de waarden van de vergelijkingen (D) te substitueeren in de tweede en derde vergelijking van (B), vinden wij nog:

$$3p^2 + 2ap + b = q \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (F)$$

$$p^3 + ap^2 + bp + c = q(3p + a) \ldots\ldots\ldots \quad (G)$$

en indien men de vergelijkingen (E) en (G) van elkander aftrekt:

$$\left\{\frac{9c - ab}{8} - \frac{a^2 - 3b}{4} p\right\} : (3p + a) = q \ldots (H),$$

zoodat wij het bestaanbare gedeelte des wortels gevonden hebbende, het imaginaire gedeelte onmiddellijk kunnen vinden.

Door p tusschen de vergelijkingen (F) en (G) te elimineeren, vindt men:

$$q^3+\frac{a^2-3b}{2}q^2+\frac{(a^2-3b)^2}{16}q+\frac{4(a^2-3b)(b^2-3ac)-(9c-ab)^2}{192}=0 \ldots (I)$$

Gemakshalve is het raadzaam den tweeden term uit de opgegeven vergelijking te verdrijven: daardoor toch wordt $a=0$ en de vergelijkingen (E), (F), (H) en (I) gaan over in

$$p^3+\frac{b}{4}p-\frac{c}{8}=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (E_1)$$

$$3p^2+b=q \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (F_1)$$

$$\frac{3c}{8p}+\frac{b}{4}=q \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (H_1)$$

$$q^3-\frac{3b}{2}q^2+\frac{9b^2}{16}q-\frac{4b^3+27c^2}{64}=0 \ldots\ldots (I_1)$$

Vergelijken wij de opgegeven vergelijking

$$x^3+bx+c=0$$

met de vergelijking (E_1)

$$p^3+\frac{b}{4}p-\frac{c}{8}=0,$$

dan zien wij, dat de wortels der laatste vergelijking de helften zullen zijn van die der eerste vergelijking, indien men dezen bovendien tegengestelde teekens geeft.

Een en ander willen wij toepassen op een voorbeeld; kiezen wij daartoe de vergelijking

$$x^3-2x-5=0,$$

waarvan wij in § 27, N°. 5 gevonden hebben den bestaanbaren wortel 2,0945514815.

Noemen wij dezen wortel r, dan is

$$p=-\frac{r}{2}=-1,04727574075$$

en $q=\frac{b}{4}+\frac{3c}{8p}=-0,5+\frac{15}{8,378205926}=1,2903594.$

Dewijl q positief is, zijn de beide wortels imaginair, zoodat men voor de wortels der opgegeven vergelijking vindt:

$$x_1 = 2{,}0945514815$$
$$x_2 = -1{,}04727574075 + \sqrt{} -1{,}2903594$$
$$x_3 = -1{,}04727574075 - \sqrt{} -1{,}2903594,$$

waarvan de som naar behooren gelijk is aan 0; de som der producten twee aan twee gelijk aan —1,99999.... en hun product is gelijk aan 4,99999...., ten bewijze dat zij de wortels der opgegeven vergelijking zijn.

Laat tot een tweede voorbeeld gevraagd worden de wortels van de vergelijking:

$$x^3 - 7x + 7 = 0.$$

Deze vergelijking heeft een negatieven wortel

$$x_1 = -3{,}0489173396; \quad (\S\,27, \text{N}^0.\,6)$$

zoodat men voor p vindt:

$$p = -\frac{r}{2} = +1{,}5244586698$$

en voor q

$$q = -\frac{7}{4} + \frac{21}{12{,}1956693584} = -0{,}028077285.$$

Dewijl q hier negatief is, zijn de beide andere wortels ook bestaanbaar en men heeft

$$p \pm \sqrt{} - q = 1{,}524458 \pm 0{,}167562 =$$
$$1{,}692020 \quad \text{of} \quad 1{,}356896.$$

3. Vergelijkingen van den vierden graad.

Stellen wij in de vergelijkingen (s) van N°. 1 $m = 4$, dan vinden wij:

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= 2p + \alpha_1 && (\alpha)\\ B_2 &= p^2 + \alpha_1 p + \alpha_2 + q && (\beta)\\ B_3 &= B_1 q + \alpha_3 && (\gamma)\\ B_4 &= B_2 q - q^2 + \alpha_3 p + \alpha_4 && (\delta) \end{aligned}\right\} (1)$$

Uit de vergelijkingen (γ) en (δ) volgt nog:

$$B_1 B_2 B_3 - B_1^2 B_4 - B_3^2 = 0 \ldots . \quad (2)$$

door op te merken, dat in de vergelijking (1) van N°. 1 alle coëfficiënten na α_2 gelijk aan nul zijn. Nemen wij nu ter oplos-

sing eene vergelijking van den vierden graad, waaruit de tweede term verdreven is, bijv.

$$x^4 + bx^2 + cx + d = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

dan geven de vergelijkingen (γ) van N°. 1

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= 4p \\ B_2 &= 6p^2 + b \\ B_3 &= 4p^3 + 2bp + c \\ B_4 &= p^4 + bp^2 + cp + d \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

deze waarden in (2) substitueerende, vindt men:

$$p^6 + \frac{b}{2}p^4 + \frac{b^2 - 4d}{16}p^2 - \frac{c^2}{64} = 0, \quad \ldots \quad (5)$$

welke vergelijking ons p^2 doet vinden en altijd één bestaanbaren positieven wortel zal hebben; zoodat men voor p twee absoluut gelijke, maar in teeken verschillende wortels heeft.

Uit de vergelijking (γ) van (1) volgt

$$q = \frac{B_3}{B_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

en door substitutie van de waarden, die wij in (4) gevonden hebben

$$q = p^2 + \frac{b}{2} + \frac{c}{4p} \quad \ldots\ldots, \quad (7)$$

Wij zullen geen voorbeeld hiervan uitwerken, doch we moeten hierbij opmerken, dat, indien de vergelijking (5) drie bestaanbare positieve wortels heeft, men wel beslissen kan, welke waarde men voor p^2 nemen moet. De gevondene waarden moeten in dat geval beproefd worden aan de coëfficiënten der opgegeven vergelijking.

Zoo heeft bijv. de vergelijking

$$x^4 - 13167\,x^2 + 140979\,x + 32099672 = 0$$

tot afgeleide vergelijking

$$p^6 - 6583{,}5\,p^4 + 2810700{,}0625\,p^2 - 310508451{,}5625 = 0,$$

waarvan de wortels zijn:

$$225;\ 6133{,}499989\ldots;\ 225{,}00001\ldots;$$

van welke bij proefneming zal blijken, dat alleen de eerste aan de opgegeven vergelijking voldoet.

4. Om eene vergelijking van den vijfden graad op te lossen, waaruit men den tweeden term verdreven heeft, bijv. de vergelijking

$$x^5 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

vinden wij door soortgelijke substitutie als in de vorige gevallen:

$$\left.\begin{aligned} B_4 &= B_2 q - q^2 \\ B_5 &= B_3 q - B_1 q^2 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

waaruit door eliminatie van q volgt:

$$(B_1 B_2 - B_3)(B_2 B_4 - B_3 B_5) = (B_1 B_4 - B_5)^2 \quad . \quad (3)$$

en eindelijk:

$$p^{10} + \frac{2b}{4} p^8 + \frac{c}{8} p^7 + \frac{3(b^2-d)}{16} p^6 + \frac{2bc-11e}{32} p^5 +$$
$$+ \frac{l(b^2-2d)-c^2}{64} p^4 + \frac{c(b^2-4d)-4be}{128} p^3 +$$
$$+ \frac{a(b^2-4d)-c(bc-7e)}{256} p^2 - \frac{e(b^2-4d)+c^2}{512} p -$$
$$- \frac{c(cd-be)+e^2}{1024} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Uit deze vergelijking de waarde van p gevonden hebbende, spoort men die van q op uit de vergelijkingen (2), daarbij slechts die gebruikende, welke aan de beide vergelijkingen te gelijk voldoet. Om deze waarde van q te bepalen, trekt men de beide vergelijkingen van elkander af en vindt dan

$$q = \frac{B_1 B_4 - B_5}{B_1 B_2 - B_3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

5. Het is gemakkelijk in te zien, hoe men verder voor alle graden van hooge machtsvergelijkingen moet handelen, om alle wortels dier vergelijkingen op te sporen.

Evenwel worden de bewerkingen weldra zoo langwijlig, dat zij practisch onmogelijk zijn. Ik acht het dan ook niet noodig, nog een voorbeeld van eene vijfdemachtsvergelijking bij te brengen.

Aanmerking. De methode, die in de voorgaande N°'s is medegedeeld, is van Dr. WILLIAM RUTHERFORD en komt voor in de *Wis- en Natuurkundige uitspanningen*,

Leeuwarden, T. SWARTS. De daarin voorkomende verhandeling geeft voorbeelden van opgeloste vergelijkingen tot den vijfden graad.

---

§ 29. Over wederkeerige vergelijkingen.

1. Men noemt eene vergelijking *wederkeerig*, wanneer de coëfficiënten harer termen in omgekeerde orde met dezelfde teekens terugkomen; indien zij dus is van de gedaante:

$$Ax^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots\ldots + A_2x^2 + A_1x + A = 0.$$

Is hierin n even, dan heeft zij, indien α_1, α_2, α_3 ..... wortels der vergelijking zijn, ook $\frac{1}{\alpha_1}$, $\frac{1}{\alpha_2}$, $\frac{1}{\alpha_3}$ ..... tot wortels, 't geen onmiddellijk blijkt door $\frac{1}{y}$ voor x te substitueeren; is n oneven, dan heeft men één wortel $x = -1$, terwijl de overige wortels voorkomen, als in eene evene machtsvergelijking. Hebben de overigens gelijke coëfficiënten van de termen x^m en x^{n-m} tegengestelde teekens, en ontbreekt daarenboven bij eene evene machtsvergelijking de middelste term, dan is deze vergelijking deelbaar door $x^2 - 1$; terwijl er bij analooge veronderstelling bij eene onevene machtsvergelijking een wortel $+1$ voorkomt. Zoodanige vergelijkingen noemt men eveneens wederkeerig. — Indien men de onevenmachts wederkeerige vergelijkingen deelt door $x \pm 1$, dan worden zij teruggebracht tot evene machtsvergelijkingen, zoodat ons slechts overblijft zoodanige vergelijking op te lossen.

2. Laat ter oplossing gegeven zijn de vergelijking

$$Ax^{2n} + A_1x^{2n-1} + \ldots + A_nx^n + A_{n-1}x^{n-1} + \ldots A_1x + A = 0,$$

dan kan men daarvoor schrijven:

$$A\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) + A_1\left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right) + \ldots + A_{n-1}\left(x + \frac{1}{x}\right) + A_n = 0.$$

Stelt men nu $x + \frac{1}{x} = y$, dan is:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = y^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2,$$

of $$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Verder is $\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=x^3+\frac{1}{x^3}+3\left(x+\frac{1}{x}\right)$,

of $$x^3+\frac{1}{x^3}=y^3-3y \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

En in het algemeen:

$$x^n+\frac{1}{x^n}=y^n-ny^{n-2}+\frac{n(n-3)}{1.\ 2}y^{n-4}-\frac{n(n-4)(n-5)}{1.\ 2.\ 3}y^{n-6}$$
$$+\frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}y^{n-8}-\ldots\ldots$$

welke formule gemakkelijk bewezen wordt, door de vormen

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^n, \quad \left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-2}, \quad \left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-4}, \ldots\ldots$$

te ontwikkelen en in elkander te substitueeren. Dit bewijs wordt overgelaten aan den Lezer.

Uit het voorgaande zien wij dus, dat de wederkeerige vergelijkingen van den graad n door eene eenvoudige herleiding teruggebracht worden tot den graad $\frac{1}{2}n$ of $\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}$, naar gelang n even of oneven is en men in het laatste geval te voren gedeeld heeft door $x\pm 1$.

Een enkel voorbeeld tot opheldering.

Zij gegeven de vergelijking

$$2x^5-3x^4+2x^3-2x^2+3x-2=0,$$

dan vindt men na deeling door $x-1$:

$$2x^4-x^3+x^2-x+2=0,$$

waarvoor men ook schrijven kan:

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0,$$

en door hierin $x+\frac{1}{x}=y$ te stellen:

$$2y^2-4-y+1=0,$$

d. i. $$y^2-\tfrac{1}{2}y-\tfrac{3}{2}=0;$$

waaruit $$y=\tfrac{3}{2} \text{ of } -1,$$

zoodat men eindelijk x kan berekenen door de vergelijking

$$x = \frac{y \pm \sqrt{(y^2 - 4)}}{2}.$$

---

§ 30. Over de ontbinding van rationeele gebrokens in meer eenvoudige.

1. Wij nemen aan, dat teller en noemer van het gebroken $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ geheele rationeele polynomia zijn, gerangschikt volgens de afdalende of opklimmende machten van hetzelfde argument x en onderling ondeelbaar. Is nu het polynomium in den teller van hoogeren graad dan dat van den noemer, dan kan men den teller door den noemer deelen en men krijgt een gemengden vorm zoodanig, dat de teller van het daarbij behoorend gebroken van lageren graad is dan de noemer. Verder hebbe men hierbij in 't oog te houden, dat elk polynomium van den n^{den} graad ontbindbaar is in n tweetermige vormen van den eersten graad, die òf reëel zijn, òf waaronder zich geconjungeerde imaginaire vormen bevinden, wier product wederom reëel is. (Men vergelijke § 5, N°. 8, 10.)

2. Stelling. *Indien $\varphi(x) = 0$, n gelijke wortels a heeft, dan is*

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A}{(x-a)^n} + \frac{F(x)}{(x-a)^{n-1}\psi(x)},$$

waarin $F(x)$ een geheel polynomium is en $\psi(x)$ geene factoren $(x-a)$ bevat.

Bewijs.
$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A}{(x-a)^n} + \frac{f(x) - A\psi(x)}{(x-a)^n \psi(x)};$$

opdat nu de tweede term de $(n-1)^{de}$ macht van $(x-a)$ in den noemer bevatte, moet $f(x) - A\psi(x)$ door $(x-a)$ deelbaar zijn en $f(x) - A\psi(x) = 0$ een wortel a hebben. Men heeft dus:

$$f(a) - A\psi(a) = 0,$$

waaruit
$$A = \frac{f(a)}{\psi(a)}.$$

Omdat $f(x)$ en $\varphi(x)$ onderling ondeelbaar zijn, is $f(a)$ niet gelijk aan 0, evenmin is zulks het geval met $\psi(a)$; derhalve is A eindig en geen nul.

Neemt men nu $F(x)$ zoodanig, dat

$$f(x) - A\psi(x) = (x-a)\,F(x),$$

't geen altijd mogelijk is, dan is de stelling bewezen.

3. Stelling. *Indien men heeft*

$$\varphi(x) = (x-a)^m\,(x-b)^n \ldots\ldots (x-p)^q,$$

dan kan de rationeele breuk $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ *ontbonden worden in:*

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = {} & \frac{A}{(x-a)^m} + \frac{A_1}{(x-a)^{m-1}} + \ldots\ldots \frac{A_{m-1}}{x-a} \\ & + \frac{B}{(x-b)^n} + \frac{B_1}{(x-b)^{n-1}} + \ldots\ldots \frac{B_{n-1}}{x-b} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \frac{P}{(x-p)^q} + \frac{P_1}{(x-p)^{q-1}} + \ldots\ldots \frac{P_{q-1}}{x-p} \\ & + F(x)\end{aligned}$$

waarin $A,\ A_1, \ldots\ldots B,\ B_1, \ldots\ldots$ *eindig en constant zijn en* $F(x)$ *eene geheele functie is.*

Bewijs. Stellen wij even als in de vorige stelling:

$$\varphi(x) = (x-a)^m\,\psi(x),$$

dan is:

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{(x-a)^m\psi(x)} &= \frac{A}{(x-a)^m} + \frac{\Phi(x)}{(x-a)^{m-1}\psi(x)}, \\ \frac{\Phi(x)}{(x-a)^{m-1}\psi(x)} &= \frac{A_1}{(x-a)^{m-1}} + \frac{\Phi'(x)}{(x-a)^{m-2}\psi(x)}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\Phi^{m-2}(x)}{(x-a)\psi(x)} &= \frac{A_{m-1}}{x-a} + \frac{\Phi^{m-1}(x)}{\psi(x)},\end{aligned}$$

waarin $A,\ A_1 \ldots\ldots A_{m-1}$ constant en bepaald zijn, terwijl $\Phi(x),\ \Phi'(x), \ldots\ldots \Phi^{m-1}(x)$ geheele functiën zijn. Op grond van de vorige stelling kan A geen nul zijn; maar, omdat eenig polynomium $\Phi(x),\ \Phi'(x)\ldots\ldots$ deelbaar kan zijn door $x-a$,

kunnen de getallen A_1, A_2 ..... gelijk aan nul zijn. Door substitutie van de gevondene waarden in elkander, vinden wij:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A}{(x-a)^n} + \frac{A_1}{(x-a)^{n-1}} + \frac{A_2}{(x-a)^{n-2}} + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{A_{n-1}}{x-a} + \frac{\Phi^{n-1}(x)}{\psi(x)}.$$

Maar $$\frac{\Phi^{n-1}(x)}{\psi(x)} = \frac{\Phi^{n-1}(x)}{(x-b)^n \omega(x)},$$

derhalve ook:

$$\frac{\Phi^{n-1}(x)}{\psi(x)} = \frac{B}{(x-b)^n} + \frac{B_1}{(x-b)^{n-1}} + \ldots \frac{B_{n-1}}{x-b} + \frac{\psi^{n-1}(x)}{\omega(x)},$$

enz. enz.

waaruit de gestelde formule volgt.

4. Stelling. *Indien $x^2 + px + q$ het product is van twee geconjungeerde imaginaire factoren van het reëele polynomium $\varphi(x)$ en n het aantal malen aanwijst, dat het trinomium $x^2 + px + q$ als deeler voorkomt, dan heeft men:*

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n} + \frac{F(x)}{(x^2+px+q)^{n-1}\psi(x)},$$

waarin P en Q standvastigen zijn en $F(x)$ een geheel reëel polynomium is.

Bewijs.

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n} + \frac{f(x)-(Px+Q)\psi(x)}{(x^2+px+q)^n \psi(x)};$$

hierin bepale men P en Q zoodanig, dat de tweede term van het tweede lid deelbaar worde door $x^2 + px + q$. Hiertoe neme men x gelijk aan de wortels van de vergelijking

$$x^2 + px + q = 0:$$

want alsdan is, indien die wortels zijn $a + b\sqrt{-1}$ en $a - b\sqrt{-1}$:

$$f(a \pm b\sqrt{-1}) - \{P(a \pm b\sqrt{-1}) + Q\} \times \psi(a \pm b\sqrt{-1}) = 0,$$

waaruit gevonden wordt:

$$P(a \pm b\sqrt{-1}) + Q = \frac{f(a \pm b\sqrt{-1})}{\psi(a \pm b\sqrt{-1})} = A \pm B\sqrt{-1};$$

derhalve:

$$Pa + Q = A \quad \text{en} \quad Pb = B,$$

omdat A en B eindige, bepaalde reëele grootheden zijn, daar $\psi(x)$ niet door x^2+px+q gedeeld kan worden.

Hieruit volgt verder:

$$P=\frac{B}{b} \text{ en } Q=\frac{Ab-Ba}{b};$$

zoodat wij eindelijk kunnen stellen:

$$\frac{f(x)-(Px+Q)\psi(x)}{x^2+px+q}=F(x),$$

waardoor de stelling bewezen is.

5. Stelling. *De rationeele breuk* $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ *kan, indien* $\varphi(x)=(x^2+px+q)^n\psi(x)$, *ontbonden worden op de volgende wijze:*

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n}+\frac{P_1x+Q_1}{(x^2+px+q)^{n-1}}+\ldots\ldots$$
$$+\frac{P_{n-1}x+Q_{n-1}}{x^2+px+q}+\frac{F^{n-1}(x)}{\psi(x)},$$

waarin P, Q, P_1 Q_1 ..... *reëel en constant zijn, terwijl* $F^{n-1}(x)$ *ook een geheel reëel polynomium is.*

6. Stelling. *Indien* $\varphi(x)$ *ontbonden is in hare reëele factoren van den eersten en tweeden graad, zoodat men heeft:* $\varphi(x)=(x-a)^m(x-b)^n\ldots.(x^2+hx+k)^k(x^2+l_x+p)^p\ldots..$, *dan is in het algemeen:*

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\Phi(x)+\frac{A}{(x+a)^m}+\frac{A_1}{(x-a)^{m-1}}+\ldots.\frac{A_{m-1}}{x-a}+$$
$$+\frac{B}{(x-b)^n}+\frac{B_1}{(x-b)^{n-1}}+\ldots.\frac{B_{n-1}}{x-b}+$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{Hx+K}{(x^2+hx+k)^k}+\frac{H_1x+K_1}{(x^2+hx+k)^{k-1}}+\ldots.\frac{H_{k-1}x+K_{k-1}}{x^2+hx+k}$$
$$+\frac{Lx+P}{(x^2+lx+p)^p}+\frac{L_1x+P_1}{(x^2+lx+p)^{p-1}}+\ldots.\frac{L_{p-1}x+P_{p-1}}{x^2+lx+p}$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Aanmerking. De bewijzen der beide laatste stellingen zijn verder zoo eenvoudig, dat ik ze gerustelijk aan den Lezer durf overlaten.

7. De stellingen, die wij in de vorige N°s. bewezen hebben, stellen ons in staat, zoodra wij den noemer in zijne reëele eerste- en tweede-machtsfactoren ontbonden hebben, elk reëel gebroken in meer eenvoudige te splitsen. Wij willen ze thans op eenige voorbeelden toepassen.

Vraagstuk. *Men vraagt het rationeel gebroken*

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{4x^3 - 2bx}{x^4 - 13x^2 + 36}$$

in eenvoudiger gebrokens te ontbinden.

Wij stellen om dit te doen den noemer gelijk aan 0 en vinden dan voor x de waarden 2, -2, 3 en -3, zoodat men voor den noemer ook schrijven kan:

$$(x-2)(x+2)(x-3)(x+3).$$

Wij hebben derhalve:

$$\frac{4x^3 - 26x}{x^4 - 13x^2 + 36} = \frac{A}{x-2} + \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{x-3} + \frac{A_3}{x+3},$$

welke vergelijking, daar het tweede lid slechts een andere vorm voor het eerste is, identiek is. Men heeft dus ook identiek:

$$\begin{aligned} 4x^3 - 26x \equiv\ & A(x+2)(x-3)(x+3) + \\ & + A_1(x-2)(x-3)(x+3) + \\ & + A_2(x-2)(x+2)(x+3) + \\ & + A_3(x-2)(x+2)(x-3). \end{aligned}$$

Dewijl deze vergelijking voor alle waarden van x moet doorgaan, stellen wij achtereenvolgens $x = +2$, $x = -2$, $x = +3$ en $x = -3$, daardoor vinden wij:

$$-20A = -20,\quad 20A_1 = 20,\quad 30A_2 = 30,\quad -30A_3 = -30,$$

zoodat wij eindelijk hebben:

$$\frac{4x^3 - 26x}{x^4 - 13x^2 + 36} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+3}.$$

8. Vraagstuk. *Men vraagt het rationeele gebroken*

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{2x^5 + 4x^4 - 5x^3 - 12x^2 + 148x - 44}{x^4 + 2x^3 + x^2 - 12x + 36}$$

in eenvoudiger gebrokens te splitsen.

Dewijl hier de teller van hoogeren graad is dan de noemer, deelen wij dezen laatsten op den eersten en vinden dan:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = 2x + \frac{-7x^3 + 12x^2 + 76x - 44}{x^4 + 2x^3 + x^2 - 12x + 36}.$$

Sporen wij nu de wortels op van de vergelijking

$$x^4 + 2x^3 + x^2 - 12x + 36 = 0,$$

dan vinden wij, dat zij twee gelijke wortels 2 en twee gelijke wortels —3 heeft; zoodat ons nog overblijft het gebroken

$$\frac{-7x^3 + 12x^2 + 76x - 44}{(x-2)^2 (x+3)^2}$$

in eenvoudigere gebrokens te splitsen. Daartoe stellen wij identiek:

$$\frac{-7x^3-12x^2+76x-44}{(x-2)^2 (x+3)^2} = \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{A_1}{x-2} + \frac{B}{(x+3)^2} + \frac{B_1}{x+3},$$

waaruit wij vinden:

$$-7x^3+12x^2+76x-44 = \begin{cases} A\,(x+3)^2 + \\ A_1(x-2)(x+3)^2 \\ B\,(x-2)^2 + \\ B_1(x-2)^2\,(x+3) \end{cases} \quad \ldots\ldots (A$$

Stellen wij in de vergelijking (A), die voor alle waarden van x doorgaat, $x = 2$, dan vinden wij:

$$A(x+3)^2 = 100$$
$$\text{of} \qquad A = 4.$$

Trekken wij nu de vergelijking $4x^2 + 24x + 36 = A(x+3)^2$ van (A), dan vinden wij:

$$-7x^3 + 8x^2 + 52x - 80 = \begin{cases} A_1(x-2)(x+3)^2 + \\ B\,(x-2)^2 + \\ B_1(x-2)^2\,(x+3) \end{cases}$$

en na deeling door $(x-2)$,

$$-7x^2 - 6x + 40 = \begin{cases} A_1(x+3)^2 + \ldots\ldots\ldots (B) \\ B\,(x-2) + \\ B_1(x-2)\,(x+3). \end{cases}$$

Dewijl deze vergelijking wederom identiek is, stellen wij daarin $x = 2$ en vinden:

$$A_1(x+3)^2 = 0, \text{ dus } A_1 = 0.$$

Trekken wij de laatste vergelijking van (B), dan komt er:

$$-7x^2 - 6x + 40 = B(x-2) + B_1(x-2)(x+3),$$

en na deeling door $x-2$:

$$-7x - 20 = B + B_1(x+3).$$

Stelt men hierin $x = -3$, dan vindt men $B = 1$ en door aftrekking:

$$-7x - 21 = B_1(x+3),$$

waaruit ten laatste door deeling gevonden wordt:

$$B_1 = -7.$$

Derhalve is:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{2x^5 + 4x^4 - 5x^3 - 12x^2 + 148x - 44}{x^4 + 2x^3 + x^2 - 12x + 36} =$$

$$= 2x + \frac{4}{(x-2)^2} + \frac{1}{(x+3)^3} - \frac{7}{x+3}.$$

9. Vraagstuk. *Men vraagt in eenvoudiger gebrokens te splitsen het rationeel gebroken:*

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{8x^3+21x^2-15x-16}{(x^2-2x+5)(3x^2+x+2)}.$$

Wanneer wij de factoren van den noemer gelijk aan 0 stellen en daarna x oplossen, zien wij, dat beide factoren uit imaginaire eerste-machtsfactoren bestaan; wij stellen derhalve:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{8x^3+21x^2-15x-16}{(x^2-2x+5)(3x^2+x+2)} = \frac{Px+Q}{x^2-2x+5} + \frac{P_1x+Q_1}{3x^2+x+2}.$$

Hieruit volgt de identieke vergelijking:

$$8x^3 + 21x^2 - 15x - 16 = (Px+Q)(3x^2+x+2) + (P_1x+Q_1)(x^2-2x+5),$$

of na ontwikkeling:

$$8x^3+21x^2-15x-16 = \begin{cases} 3Px^3+(P+3Q)x^2+(2P+Q)x+2Q \\ P_1x^3+(Q_1-2P_1)x^2+(5P_1-2Q_1)x+5Q_1 \end{cases}$$

welke vergelijking aanleiding geeft tot de vier volgende vergelijkingen:

$$3P + P_1 = 8,\quad P + 3Q + Q_1 - 2P_1 = 21,$$
$$2P + Q + 5P_1 - 2Q_1 = -15,\quad 2Q + 5Q_1 = -16,$$

waarin P, P_1, Q en Q_1 de onbekenden zijn.

Deze vergelijkingen oplossende, vindt men:

$$P = 5,\quad Q = 2,\quad P_1 = -7 \text{ en } Q_1 = -4;$$

zoodat men eindelijk heeft:

$$\frac{8x^3+21x^2-15x-16}{(x^2-2x+5)(3x^2+x+2)} = \frac{5x+2}{x^2-2x+5} - \frac{7x+4}{3x^2+x+2}.$$

Aanmerking. De wijze, waarop wij de coëfficiënten door eene identieke vergelijking berekend hebben, noemt men *leerwijze der onbepaalde coëfficiënten.* Het gebruik daarvan berust zoo geheel en al op de bepaling van identieke vergelijkingen, dat ik het niet noodig achtte, daaraan een afzonderlijk hoofdstuk te wijden.

10. Vraagstuk. *Men vraagt in enkelvoudige gebrokens te splitsen:*

$$\frac{x^{11}+16x^{10}+105x^9+298x^8+831x^7+1931x^6+3999x^5+6467x^4+9371x^3+10800x^2+8905x+5020.}{(x^2-x+5)^3(x^2+2x+2)^2(x+1)^2}$$

Voor dit gebroken kan men stellen:

$$\frac{x^{11}+\ldots}{\ldots} = \frac{Ax+B}{(x^2-x+5)^3} + \frac{Cx+D}{(x^2-x+5)^2} + \frac{Ex+F}{x^2-x+5} + \frac{Gx+H}{(x^2+2x+2)^2} + \frac{Kx+L}{x^2+2x+2} + \frac{M}{(x+1)^2} + \frac{N}{x+1};$$

daaruit volgt identiek:

$$\left.\begin{array}{l} x^{11}+16x^{10}+105x^9+298x^8+ \\ 831x^7+1931x^6+3999x^5+ \\ 6467x^4+9371x^3+10800x^2+ \\ 8905x+5020. \end{array}\right\} = \begin{array}{l} (Ax+B)(x^2+2x+2)^2(x+1)^2+ \\ +(Cx+D)(x^2-x+5)(x^2+2x+2)^2(x+1)^2 \\ +(Ex+F)(x^2+2x+2)^2(x^2-x+5)^2(x+1)^2 \\ +(Gx+H)(x^2-x+5)^3(x+1)^2+(Kx+L) \\ (x^2+2x+2)(x^2-x+5)^3(x+1)^2+ \\ +M(x^2-x+5)^3(x^2+2x+2)^2+ \\ N(x^2-x+5)^3(x^2+2x+2)^2(x+1). \end{array}$$

Werken wij de laatste producten uit en rangschikken wij die volgens de afdalende machten van x, dan zal men evenveel vergelijkingen verkrijgen, als er onbepaalde coëfficiënten zijn.

De verdere bewerking laten wij aan den Lezer; de vergelijkingen oplossende, zal hij vinden:

$$= \frac{x+2}{(x^2+2x+x)^2} + \frac{3x+7}{x^2+2x+2} + \frac{5}{(x^2-x+5)^2} - \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{4}{x+1}.$$

11. Stelling. *Eene rationeele breuk, wier noemer uit reëele eerstemachtsfactoren bestaat, kan slechts op ééne wijze in een geheelen vorm en in eenvoudige breuken gesplitst worden.*

Bewijs. Veronderstellen wij, dat $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ op twee wijzen in een geheelen vorm en in gebrokens gesplitst kan worden, dan zou men hebben:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A}{(x-a)^m} + \ldots \frac{B}{(x-b)^n} + \ldots + F(x) = \frac{A_1}{(x-a)^{m'}} + \ldots$$
$$+ \frac{B_1}{(x-b)^{n'}} + \ldots . F_1(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

Nemen wij nu aan, dat $m > m'$ maar respectievelijk de hoogste machten zijn, waartoe $(x-a)$ in de beide ontbindingen voorkomt, dan vindt men:

$$\frac{A}{(x-a)^m} = -\frac{A'}{(x-a)^{m-1}} - \ldots . - \frac{B}{(x-b)^n} \ldots . - F(x) +$$
$$+ \frac{A_1}{(x-a)^{m'}} + \ldots . \frac{B_1}{(x-b)^{n'}} + \ldots . F_1(x),$$

en door dit tweede lid tot den zelfden noemer te herleiden:

$$\frac{A}{(x-a)^m} = \frac{\Phi(x)}{(x-a)^{m-1}\,\psi(x)} \quad \text{of} \quad A = (x-a)\,\frac{\Phi(x)}{\psi(x)},$$

waarin $\Phi(x)$ en $\psi(x)$ polynomia zijn en $\psi(x)$ niet deelbaar is door $(x-a)$.

Uit de tweede vergelijking volgt, dat A gelijk is aan 0, omdat zij eene constante voorstelt en voor $x = a$ nul wordt. A kan niet gelijk aan 0 zijn, derhalve is m niet grooter dan m'. — Neemt men nu aan, dat $m' > m$, dan komt men op analoge wijze tot het besluit, dat $A_1 = 0$ is, enz.; derhalve is $m = m'$. Bewijl nu $m = m'$ is, volgt uit de vergelijking (A):

$$\frac{A - A_1}{(x-a)^m} = \frac{\Phi'(x)}{(x-a)^{m-1}\,\psi(x)},$$

waarin $\psi(x)$ geen factor $(x-a)$ bevat. Deze vergelijking is identiek, derhalve is ook:

$$A = A_1.$$

Trekt men nu de gelijke eerste termen van beide leden der

vergelijking (A), dan bewijst men analoog de gelijkheid van

$$\frac{M_1}{(x-a)^{m-1}} \quad \text{en} \quad \frac{M'_1}{(x-a)^{m'-1}};$$

derhalve enz.

12. Stelling. *Een rationeel gebroken, waarvan de noemer bestaat uit het product der reëele factoren*

$(x^2+px+q)^n \times (x^2+p'x+q')^{n'} \times \ldots (x-a)^m (x-b)^{\mu} \ldots (x-s)^{\nu}$,

kan slechts op ééne wijze gesplitst worden in de som van gebrokene van de vormen

$$\frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n}, \quad \frac{P'x+Q'}{(x^2+px+q)^{n-1}}, \ldots\ldots \frac{A}{(x-a)^m} \ldots\ldots$$

Bewijs. Voor de eenvoudige gebrokens, waarin de noemer een vorm van den eersten graad of eene macht van zoodanigen vorm voorstelt, hebben wij in het vorige N°. bewezen, dat er slechts ééne ontbinding mogelijk is. Nemen wij nu aan, dat er twee ontbindingen voor de andere gebrokens mogelijk zijn, dan is, indien n en n' de hoogste machten zijn en $n > n'$:

$$\frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n} + \frac{P'x+Q'}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \ldots\ldots = \frac{P_1x+Q_1}{(x^2+px+q)^{n'}} +$$

$$+ \frac{P'_1x+Q'_1}{(x^2+px+q)^{n'-1}} + \ldots\ldots \quad (B)$$

en na herleiding:

$$\frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n} = \frac{\Phi(x)}{(x^2+px+q)^{n-1}\psi(x)},$$

waarin $\psi(x)$ geen factor (x^2+px+q) bevat.

Uit de laatste vergelijking volgt onmiddellijk de identieke vergelijking

$$Px+Q = (x^2+px+q)\,\frac{\Phi(x)}{\psi(x)},$$

die voor alle waarden van x moetende doorgaan, ook waar moet zijn voor de waarden van x uit de vergelijking

$$x^2+px+q = 0.$$

Dewijl echter deze beide waarden in 't algemeen niet kunnen voldoen aan de vergelijking $Px+Q=0$, kan n niet grooter zijn dan n'; eveneens bewijzende dat n niet kleiner kan zijn dan n',

heeft men $n = n'$. Dewijl $n = n'$, volgt uit de vergelijking (B):

$$\frac{(P-P_1)x+(Q-Q_1)}{(x^2+px+q)^n} = \frac{\Phi'(x)}{(x^2+px+q)^n\psi(x)}$$

enz. Op gelijke wijze doorredeneerende als in het voorgaande N°., vinden wij:

$$P = P_1 \text{ en } Q = Q_1.$$

Hierdoor gevonden hebbende, dat de coëfficiënten van de breuken met de hoogste machten in den noemer gelijk zijn, trekt men deze van de veronderstelde gelijkheid af; enz.

Derhalve is er slechts ééne ontwikkeling mogelijk.

13. Indien wij de som bepalen van $\frac{1}{x-a_1}$ en $\frac{1}{x-a_2}$, dan vinden wij:

$$\frac{1}{x-a_1}+\frac{1}{x-a_2} = \frac{2x-(a_1+a_2)}{x^2-(a_1+a_2)x+a_1a_2} = \frac{2x-A}{x^2-Ax+B} = \frac{f_1(x)}{f(x)}$$

Verder is:

$$\frac{1}{x-a_1}+\frac{1}{x-a_2}+\frac{1}{x-a_3} = \frac{2x-A}{x^2-Ax+B}+\frac{1}{x-a_3} =$$

$$= \frac{3x^2+2A_1x+B_1}{x^3+A_1x^2+B_1x+C} = \frac{f_1(x)}{f(x)}$$

Deze herleidingen voortzettende, vindt men voor k breuken:

$$\frac{1}{x-a_1}+\frac{1}{x-a_2}+\ldots\frac{1}{x-a_k} = \frac{kx^{k-1}+(k-1)A_1x^{k-2}+\ldots A_{k-1}}{x^k+A_1x^{k-1}+\ldots A_{k-1}x+A_k} = \frac{f_1(x)}{f(x)}.$$

Telt men bij de beide leden dezer vergelijking een nieuw gebroken $\frac{1}{x-a_{k+1}}$, dan vindt men door eene eenvoudige herleiding:

$$\frac{1}{x-a_1}+\ldots\frac{1}{x-a_k}+\frac{1}{x-a_{k+1}} = \frac{(k+1)x^k+kB_1x^{k-1}+\ldots B_k}{x^{k+1}+B_1x^k+\ldots B_kx+B_{k+1}} = \frac{f_1(x)}{f(x)}$$

Geldt deze herleiding dus voor k breuken der opgegeven gedaante, dan is zij ook waar voor $k+1$ breuken. Zij is geldig voor 3 breuken, dus ook voor vier, enz. Hieruit volgt door omkeering de

Stelling. *Indien een rationeel gebroken de gedaante heeft*

van $\frac{f_1(x)}{f(x)}$ *en* $f(x)$ *een polynomium is van den* n^{den} *graad, dan kan deze breuk gesplitst worden in* n *enkelvoudige van de gedaante* $\frac{1}{x-a_n}$.

Stellen wij dus:

$$\frac{f_1(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-a_1} + \frac{1}{x-a_2} + \ldots \frac{1}{x-a_n},$$

dan is:

$$\begin{aligned} f_1(x) = &(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_n) \\ &+(x-a_1)(x-a_3)\ldots(x-a_n) \\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+(x-a_1)(x-a_2)\ldots\ldots(x-a_{n-1}). \end{aligned}$$

Deze vergelijking identiek zijnde, heeft men onmiddellijk:

$$f_1(a_1) = (a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n),$$
$$f_1(a_2) = (a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots(a_2-a_n),$$

enz.

Stelt men nu in het algemeen:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \ldots\ldots \frac{A_n}{x-a_n},$$

dan is:

$$f(x) = A_1(x-a_2)\ldots(x-a_n) + A_2(x-a_1)\ldots(x-a_n) + \\ + A_n(x-a_1)\ldots(x-a_{n-1}),$$

en

$$A_1 = \frac{f(a_1)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)}$$

$$A_2 = \frac{f(a_2)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots(a_2-a_n)}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_n = \frac{f(a_n)}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1})}$$

dus op grond van 't voorgaande eveneens:

$$A_1 = \frac{f(a_1)}{\varphi_1(a_1)};\ A_2 = \frac{f(a_2)}{\varphi_1(a_2)} \ldots A_n = \frac{f(a_n)}{\varphi_1(a_n)}.$$

Aanmerking. De ontbinding van rationeele gebrokens

in meer eenvoudige breuken vindt hare toepassing hoofdzakelijk in de integraal-rekening. — Vraagstukken tot eigen oefening komen voor aan het einde van dit deel.

---

§ 31. Over de wederkeerige reeksen.

1. Eene reeks

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\ldots a_n x^n + \ldots\ldots,$$

gerangschikt volgens de geheele en opklimmende machten van het argument x, noemt men *wederkeerig*, indien voor alle waarden van n, te rekenen na een bepaald aantal termen, de coëfficiënt van x^n uitgedrukt kan worden door eene zelfde eerstemachtsvergelijking tusschen een bepaald aantal achtereenvolgende coëfficiënten van lagere machten; m. a. w. indien men heeft:

$$a_0 a_{n-m} + a_1 a_{n-m+1} \ldots\ldots + a_{m-1} a_{n-1} + a_m a_n = 0, \ldots\ldots (1)$$

waarin m een willekeurig geheel getal en a_0, a_1 ..... a_m willekeurige constanten zijn. De vergelijking (1) noemt men de *betrekkingsschaal* der wederkeerige reeks.

Tot voorbeeld van zoodanige reeks diene

$$2 + 5x + x^2 - 9x^3 - 11x^4 + 7x^5 \ldots\ldots$$

waarvan de betrekkingsschaal is:

$$a_n - a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0$$

of $$a_n = a_{n-1} - 2a_{n-2}.$$

2. Stelling. *Wanneer eene convergeerende reeks te gelijkertijd wederkeerig is, is de limiet harer som een rationeel gebroken.*

Bewijs. Zij $\varphi(x)$ de limiet van de som der convergeerende reeks

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\ldots (1)$$

die tevens wederkeerig is en wier betrekkingsschaal wij voor alle waarden van n, te rekenen na een bepaald aantal termen, voorstellen door

$$a_0 a_{n-m} + a_1 a_{n-m-1} + \ldots\ldots a_m a_n = 0 \ldots (2)$$

Stellen wij nu verder

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots\ldots a_{m-1} x + a_m ;$$

dewijl $f(x)$ uit een bepaald aantal termen bestaat, zal het product van $f(x)$ en $\varphi(x)$, volgens de opklimmende machten van x gerangschikt, van den term x^n te beginnen, steeds het eerste lid van de vergelijking (2) tot coëfficiënten hebben. Het product bestaat uit de som van een eindig aantal termen, gerangschikt volgens de opklimmende machten van x en kan dus voorgesteld worden door $\psi(x)$; derhalve hebben wij

$$\varphi(x) . f(x) = \psi(x),$$

$$\text{of} \qquad \varphi(x) = \frac{\psi(x)}{f(x)}.$$

Ook het omgekeerde van deze stelling is waar.

Indien eene rationeele breuk ontwikkeld kan worden in eene convergeerende reeks, gerangschikt volgens de opklimmende machten van het argument, dan is die reeks wederkeerig.

Bewijs. Is gegeven, dat de reeks

$$\frac{\psi(x)}{f(x)} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\ldots$$

convergeert voor zekere waarden van x,

en $$f(x) = a_m + a_{m-1} x + \ldots\ldots a_0 x^m ,$$

dan is, omdat

$$\frac{\psi(x)}{f(x)} \times f(x) = \psi(x)$$

een eindig polynomium is, zulks ook het geval met

$$(a_m + a_{m-1} x + \ldots\ldots a_0 x^m)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots).$$

Derhalve moet de coëfficiënt van x^n voor waarden van n, die zekere grens te boven gaan, gelijk aan nul zijn. Maar deze coëfficiënt is

$$a_0 a_{n-m} + a_1 a_{n-m+1} \ldots\ldots a_m a_n ,$$

en dewijl hij steeds gelijk nul is, is de reeks wederkeerig.

3. Op grond van de voorgaande stelling en het omgekeerde daarvan, zal het gemakkelijk vallen om een gebroken, gerangschikt volgens de opklimmende machten van het argument, te ontwikkelen in eene wederkeerige reeks en omgekeerd eene

wederkeerige reeks, waarvan de betrekkingsschaal bekend is, te herleiden tot een rationeel gebroken. Een paar voorbeelden zullen dit ophelderen.

Vraagstuk. *Men vraagt het gebroken* $\frac{1-x}{2-3x+5x^2}$ *te ontwikkelen in eene wederkeerige reeks.*

Stellen wij die reeks voor door $A+Bx+Cx^2+Dx^3+$ enz., dan is identiek

$$\frac{1-x}{2-3x+5x^2} = A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4\ldots..$$

en

$$1-x = \left\{\begin{array}{l} 2A+2Bx+2Cx^2+2Dx^3+2Ex^4+\ldots \\ \quad -3Ax-3Bx^2-3Cx^3-3Dx^4\ldots\ldots \\ \quad\quad +5Ax^2+5Bx^3+5Cx^4\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

waaruit onmiddellijk volgt:

$2A=1$, $A=\frac{1}{2}$;

$2B-3A=-1$, $2B=\frac{1}{2}$, $B=\frac{1}{4}$;

$2C-3B+5A=0$, $2C=-\frac{7}{4}$, $C=-\frac{7}{8}$;

$2D-3C+5B=0$, $2D=-\frac{31}{8}$, $D=-\frac{31}{16}$; enz.

Wij hebben dus de reeks:

$$\frac{1-x}{2-3x+5x^2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}x-\frac{7}{8}x^2-\frac{31}{16}x^3\ldots\ldots,$$

waarvan de betrekkingsschaal

$$2a_m-3a_{m-1}+5a_{m-2}=0$$

onmiddellijk uit den noemer der breuk wordt opgemaakt. Zoodanige breuk draagt den naam van *voortbrengende* breuk.

Vraagstuk. *Men vraagt de voortbrengende breuk der wederkeerige reeks* $6+11x-20x^2-117x^3-941x^4+631x^5\ldots..$, *wier betrekkingsschaal* $a_m-2a_{m-1}+7a_{m-2}=0$.

Uit het opgemerkte in het vorige voorbeeld volgt, dat wij kunnen stellen:

$$\frac{A+Bx}{1-2x+7x^2} = 6+11x-20x^2-117x^3-\ldots..$$

en omdat deze vergelijking identiek is:

$$A + Bx = \begin{cases} 6 + 11x - 20x^2 \ldots\ldots \\ -12x - 22x^2 \ldots\ldots \\ +42x^2 \ldots\ldots \end{cases}$$

derhalve $A = 6$ en $B = -1$.

4. Eene andere wijze, om een rationeel gebroken in eene reeks te ontwikkelen, berust op de ontbinding van zoodanig gebroken in meer eenvoudige breuken en op de toepassing van het binomium van NEWTON.

Zij bijv. gevraagd in eene reeks te ontwikkelen het gebroken $\frac{-26x + 4x^3}{36 - 13x^2 + x^4}$, dat wij in § 30, N°. 7 vonden gelijk te zijn aan

$$-\frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} - \frac{1}{3-x} + \frac{1}{3+x}.$$

$$\frac{1}{2-x} = (2-x)^{-1} = 2^{-1}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-1} = \tfrac{1}{2}\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{2^3}\cdots\frac{x^{m-1}}{2^{m-1}}+\ldots\right);$$

$$\frac{1}{2+x} = (2+x)^{-1} = 2^{-1}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-1} = \tfrac{1}{2}\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2^2}-\frac{x^3}{2^3}\cdots\frac{x^{m-1}}{2^{m-1}}+\ldots\right);$$

$$\frac{1}{3-x} = (3-x)^{-1} = 3^{-1}\left(1-\frac{x}{3}\right)^{-1} = \tfrac{1}{3}\left(1+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{3^2}+\frac{x^3}{3^3}\cdots\frac{x^{m-1}}{3^{m-1}}+\ldots\right);$$

$$\frac{1}{3+x} = (3+x)^{-1} = 3^{-1}\left(1+\frac{x}{3}\right)^{-1} = \tfrac{1}{3}\left(1-\frac{x}{3}+\frac{x^2}{3^2}-\frac{x^3}{3^3}\cdots\frac{x^{m-1}}{3^{m-1}}+\ldots\right).$$

Hieruit volgt door vereeniging van dezelfde machten van x:

$$\frac{-26x + 4x^3}{36 - 13x^2 + x^4} = -\left[\begin{array}{l} \quad \frac{x}{2} + \frac{x^3}{2^3} + \ldots\ldots + \frac{x^{2m-1}}{2^{2m-1}} \ldots, \\ + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{3} + \frac{x^3}{3^3} + \ldots\ldots + \frac{x^{2m-1}}{3^{2m-1}} \ldots\right) \end{array}\right],$$

waarvan de algemeene term is: $\frac{x^{2m-1}}{2^{2m-1}} + \frac{2x^{2m-1}}{3^{2m}}$.

Zal deze reeks convergeeren, dan moet

$$\frac{\frac{x^{2m+1}}{2^{2m+1}} + \frac{2x^{2m+1}}{3^{2m+2}}}{\frac{x^{2m-1}}{2^{2m-1}} + \frac{2x^{2m-1}}{3^{2m}}} = \frac{x^2(3^{2m+2} + 2^{2m+2})}{(3^{2m} + 2^{2m}).2^2.3^2}$$ kleiner zijn dan 1.

Deelt men teller en noemer door 3^{2m+2}, dan vindt men:

$$\frac{x^2}{2^2.3^2} \cdot \frac{1+(\frac{2}{3})^{2m+2}}{\frac{1}{9}+(\frac{1}{3})^{2m+2}:9},$$

welke vorm voor $m=\infty$ tot limiet heeft $\frac{x^2}{4}$.

Deze reeks zal dus convergeeren voor $-2>x>2$.

Hadden wij dezelfde methode toegepast, als in het vorige vraagstuk, dan zouden we gezien hebben, dat de betrekkingsschaal niet uit drie, maar uit vijf termen bestaat, waarvan de 1e en 3e macht van x nul tot coëfficiënt hebben. Wij willen die ontwikkeling hier nog eens toepassen, en stellen daartoe:

$$\frac{-26x+4x^2}{36-13x^2+x^4}=Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+Ex^5+Fx^6\ldots,$$

waaruit identiek volgt:

$$\left.\begin{array}{r} -26x+4x^2= \\ \end{array}\right\} \begin{array}{l} 36Ax+36Bx^2+36Cx^3+36Dx^4+36Ex^5+36Fx^6\ldots \\ -13Ax^3-13Bx^4-13Cx^5-13Dx^6\ldots \\ +Ax^5+Fx^6\ldots \end{array}$$

en dus: $36A=-26$, $36B=0$, $36C-13A=4$,
$36D-13B=0$, $36E-13C+A=0$ .....

Vult men nu de ontbrekende termen door nullen aan, dan kan men voor den laatsten vorm ook schrijven:

$$36E+0.D-13C+0.B+A=0.$$

Hieruit zien wij dus dat, indien de noemer geen volledig polynomium is, men de ontbrekende termen in de betrekkingsschaal door nullen aanvult, om haar terug te brengen tot de in N°. 1 opgegeven gedaante.

Aanmerking. Kan de noemer van het gebroken niet in reëele eerstemachtsfactoren ontbonden worden, dan slaat men een anderen weg in om het gebroken in eene wederkeerige reeks te ontwikkelen. Deze handelwijze vindt hare plaats bij de goniometrische functiën.

5. Stelling. ***Eene rekenkundige reeks van de n^de orde, wier termen respectievelijk vermenigvuldigd worden met de meetkundige reeks*** $1, x, x^2, \ldots$ ***levert eene wederkeerige reeks.***

Bewijs. Nemen wij de rekenkundige reeks van hoogere orde

$$t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, \ldots\ldots,$$

dan zijn

$$\begin{gathered} \Delta t_0, \Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3, \ldots\ldots \\ \Delta_2 t_0, \Delta_2 t_1, \Delta_2 t_2, \Delta_2 t_3, \ldots\ldots \\ \Delta_3 t_0, \Delta_3 t_1, \ldots\ldots \end{gathered}$$

de achtereenvolgende 1e, 2e, 3e..... verschillen, waaruit gemakkelijk wordt opgemaakt:

$$\Delta t_0 = t_1 - t_0;$$
$$\Delta_2 t_0 = \Delta t_1 - \Delta t_0 = t_2 - t_1 - t_1 + t_0 = t_2 - 2t_1 + t_0.$$

Eveneens vindt men:

$$\Delta_3 t_0 = t_3 - 3t_2 + 3t_1 - t_0;$$
$$\Delta_4 t_0 = t_4 - 4t_3 + 6t_2 - 4t_1 + t_0;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta_n t_0 = t_n - \frac{n}{1} t_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} t_{n-2} - \ldots\ldots \pm t_0;$$

Indien men deze waarheid alzoo voor de n^{de} verschillen heeft gevonden, blijkt zij voor de $(n+1)^{de}$, door in de vergelijking:

$$\Delta_{n+1} t_0 = \Delta_n t_1 - \Delta_n t_0,$$

de waarden van $\Delta_n t_1$ en $\Delta_n t_0$ te substitueeren en daarna te herleiden.

Is derhalve de reeks van de $(n-1)^{de}$ orde, dan zal er tusschen $n+1$ achtereenvolgende termen het verband bestaan, dat

$$t_n - \frac{n}{1} t_{n-1} + \ldots\ldots \pm t_0 = 0.$$

Is nu gegeven de reeks:

$$t_0 + t_1 x + t_2 x^2 + t_3 x^3 + \ldots\ldots,$$

dan is de noemer van de voortbrengende breuk

$$1 - nx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \ldots\ldots \pm x^n = (1-x)^n.$$

Stellen wij den teller van dat gebroken $f(x)$, dan is

$$\frac{f(x)}{(1-x)^n} = t_0 + t_1 x + t_2 x^2 + t_3 x^3 + \ldots\ldots,$$

waaruit onmiddellijk de waarheid onzer stelling voortvloeit.

6. Vraagstuk. *Men vraagt de voortbrengende breuk van de reeks:*

$$1 + 8x + 27x^2 + 64x^3 + 125x^4 + \ldots\ldots$$

Maakt men de achtereenvolgende verschillen op van de reeks:

1, 8, 27, 64, 125
7, 19, 37, 61
12, 18, 24
6, 6,

dan zien wij, dat zij eene reeks is van de derde orde, wij hebben dus:

$$\frac{A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3}{(1-x)^4} = 1+8x+27x^2+64x^3+125x^4+\ldots\ldots$$

of identiek:

$$A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3 = \left\{\begin{array}{r} 1+8x+27x^2+64x^3+\ldots. \\ -4x-32x^2-108x^3-\ldots \\ +6x^2+48x^3+\ldots. \\ -4x^3-\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Hieruit volgt:

$$A_0 = 1,\ A_1 = 4,\ A_2 = -1 \text{ en } A_3 = 0,$$

zoodat men eindelijk vindt:

$$1 + 8x + 27x^2 + 64x^3 + \ldots. = \frac{1+4x-x^2}{(1-x)^4}.$$

Dewijl dé algemeene term van de opgegeven reeks voorgesteld wordt door m^3x^{m-1}, zal de reeks convergeeren voor alle waarden van x tusschen -1 en $+1$.

---

§ 32. De exponentiale functiën en hare toepassing.

1. In mijne *Theorie der Algemeene Rekenkunde*, 2de Deel, pag. 180 sqq., wordt het binomium van NEWTON bewezen voor geheele, gebrokene, positieve en negatieve exponenten. Dit bewijs steunt voornamelijk op de leer der onbepaalde coëfficiënten; thans zullen wij ons met een ander bewijs bezig houden, dat de leer der convergentie en de karakters der functiën tot grondslag heeft. Het voor te dragen bewijs is van CAUCHY en komt voor in zijne *Cours d'Analyse*, 1e *partie*.

2. Stelling. *Indien men stelt* $\binom{1}{n} = n$, $\binom{2}{n} = \frac{n(n-1)}{1.2}$, $\binom{3}{n} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$, ... $\binom{m}{n} = \frac{n(n-1)(n-2)..(n-m+1)}{1.2.3.....m}$, ...

dan is voor alle willekeurige waarden van n en m:

$$\binom{p}{m} + \binom{p-1}{m}\binom{1}{n} + \binom{p-2}{m}\binom{2}{n} ..... + \binom{1}{m}\binom{p-1}{n} + \binom{p}{n} = \binom{p}{m+n}.$$

Bewijs. Indien men beide leden van de vergelijking:

$$\binom{p}{m} + \binom{p-1}{m}\binom{1}{n} + \binom{p-2}{m}\binom{2}{n} ..... + \binom{1}{m}\binom{p-1}{n} + \binom{p}{n} = \binom{p}{m+n}$$

vermenigvuldigt met $\frac{m+n-p}{p+1}$, dan vindt men, omdat men in het algemeen heeft:

$$\binom{p}{m} \times \frac{m-p}{p+1} = \binom{p+1}{m} \text{ en } \frac{m+n-p}{p+1} = \frac{m-p+r}{p-r+1} \cdot \frac{p-r+1}{p+1} + \frac{n-r}{r+1} \cdot \frac{r+1}{p+1},$$

waarin r een willekeurig getal voorstelt, ook:

$$\binom{p}{m} \times \frac{m+n-p}{p+1} = \frac{\binom{p}{m}(m-p)}{p+1} + \frac{\binom{p}{m}n}{p+1} = \binom{p+1}{m} + \frac{\binom{p}{m}}{p+1}\binom{1}{n},$$

$$\binom{p-1}{m}\binom{1}{n} \times \frac{m+n-p}{p+1} = \frac{\binom{p-1}{m}\binom{1}{n}p\{m-(p-1)\}}{p(p+1)} + \frac{2}{p+1}\binom{p-1}{m} \cdot \frac{n(n-1)}{1.2} =$$

$$= \frac{p}{p+1}\binom{p}{m}\binom{1}{n} + \frac{2}{p+1}\binom{p-1}{m}\binom{2}{n},$$

$$\binom{p-2}{m}\binom{2}{n} \times \frac{m+n-p}{p+1} = \frac{\binom{p-2}{m}\binom{2}{n}(p-1)\{m-(p-2)\}}{(p-1)(p+1)} +$$

$$+ \frac{3\binom{p-2}{m}}{p+1} \times \frac{\binom{2}{n}(n-2)}{3} = \frac{p-1}{p+1}\binom{p-1}{m}\binom{2}{n} + \frac{3}{p+1}\binom{p-2}{m}\binom{3}{n},$$

enz. enz.

Hieruit volgt door optelling:

$$\left\{\binom{p}{m} + \binom{r-1}{m}\binom{1}{n} + \binom{p-2}{m}\binom{2}{n} + ... \binom{1}{m}\binom{p-1}{n} + \binom{p}{n}\right\} \frac{m+n-p}{p+1} =$$

$$\binom{p+1}{m} + \binom{p}{m}\binom{1}{n} + \binom{p-1}{m}\binom{2}{n} + \text{enz.}$$

Maar deze vergelijking kan ook voorgesteld worden door:

$$(m+n)^{p} \times \frac{m+n-p}{p+1} = (m+n)^{p+1}, \text{ derhalve, enz.}$$

Is dus de opgegeven vergelijking waar voor p termen, dan is zij zulks ook voor $p+1$ termen; zij is waar voor $p=1$, dus ook voor $p=2$, voor $p=3$,... dus in 't algemeen.

Uit deze hoofdeigenschap der binomiaal-coëfficiënten kunnen wij nog verscheidene andere relatiën afleiden.

Analoog met de in de stelling aangenomen notatie is:

$$\binom{m}{2}^{p} = \frac{\frac{m}{2}\left(\frac{m}{2}-1\right)\left(\frac{m}{2}-2\right)\ldots\left(\frac{m}{2}-p+1\right)}{1.\ 2.\ 3.\ldots\ldots p} =$$

$$= \frac{m(m-2)(m-4)\ldots\ldots(m-2p+2)}{2.\ 4.\ 6.\ldots\ldots\ldots 2p}.$$

Zoekt men nu de som van de reeks

$$\binom{m-2}{2}^{n} + \binom{m}{2}^{1}\binom{m-2}{2}^{n-1} + \binom{m}{2}^{2}\binom{m-4}{2}^{n-2} + \ldots\ldots\binom{m}{2}^{2n}\ldots\ldots(\alpha),$$

waarin n een geheel positief getal is, dan wordt, indien k eveneens een geheel positief getal is, de algemeene term uitgedrukt door:

$$\binom{m}{2}^{2k}\binom{m-2k}{2}^{n-k},$$

waaruit de achtereenvolgende termen gevonden worden door $k=0,\ 1,\ 2,\ 3\ldots\ldots n$ te nemen.

Ontwikkelt men nu de waarde van iederen factor, dan is:

$$\binom{m}{2}^{2k}\binom{m-2k}{2}^{n-k} =$$

$$= \frac{m.\,m-1)(m-2)\ldots(m-2k+1)}{1.\ 2\quad 3\ldots\ldots 2k} \times \frac{(m-2k)(m-2k-2)\ldots(m-2n+2)}{2.\quad 4\ldots\ldots(2n-2k)} =$$

$$= \frac{m(m-2)\ldots(m-2n+2)}{1.\ 3\ldots\ldots 2k-1} \times \frac{(m-1)(m-3)\ldots\ldots(m-2k+1)}{2.\quad 4\ldots\ldots 2k} \times$$

$$\times \frac{1}{2.4.6.\ldots\ldots(2n-2k)}.$$

Of, indien men teller en noemer met de factoren

$$(2k+1)(2k+3)\ldots(2n-3)(2n-1)$$

vermenigvuldigt,

$$\binom{2k}{m}\left(\frac{m-2k}{2}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{m(m-2)\ldots(m-2n+2)}{1.\ 3.\ldots\ldots 2k-1} \times \frac{(m-1)(m-3)\ldots\ldots(m-2k+1)}{2.\quad 4\ldots\ldots 2k} \times$$

$$\times \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots(2k+1)}{2.\quad 4\qquad\qquad (2n-2k)}.$$

Aan de drie factoren van dit product kan men eene andere gedaante geven. De eerste is geheel onafhankelijk van k, wij stellen hem dus voor door K; de tweede is de ontwikkeling van $\left(\frac{m-1}{2}\right)^{k}$, terwijl de derde de ontwikkeling is van $\left(\frac{2n-1}{2}\right)^{n-k}$; wij hebben dus:

$$\binom{2k}{m}\left(\frac{m-2k}{2}\right)^{n-k} = K\left(\frac{m-1}{2}\right)^{k}\left(\frac{2n-1}{2}\right)^{n-k}.$$

Neemt men hierin achtereenvolgens $k = 0, 1, 2, 3$, dan vindt men de som der opgegeven reeks (α) gelijk aan S stellende:

$$S = K\left\{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^{n} + \left(\frac{m-1}{2}\right)^{1}\left(\frac{2n-1}{2}\right)^{n-1} + \ldots + \left(\frac{m-1}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{2n-1}{2}\right)^{1} + \left(\frac{m-1}{2}\right)^{n}\right\}$$

en op grond der bewezen stelling is dus:

$$\left(\frac{m}{2}\right)^{n} + \binom{2}{m}\left(\frac{m-2}{2}\right)^{n-1} + \binom{4}{m}\left(\frac{m-4}{2}\right)^{n-2} + \ldots\ldots$$

$$+ \binom{2n-2}{m}\left(\frac{m-2n+2}{2}\right)^{1} + \binom{2n}{m} = K\left(\frac{2n+m-2}{2}\right)^{n} =$$

$$= \frac{m(m-2)(m-4)\ldots(m-2n+2)}{1.\ 3.\ 5.\ldots\ldots 2n-1} \times \frac{m(m+2)\ldots(m+2n-2)}{2.\ 4.\ 6.\ldots 2n} =$$

$$= \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)\ldots\left\{m^2-(2n-2)^2\right\}}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ldots\ldots 2n} \ldots\ldots (A).$$

Door op analoge wijze te handelen, vindt men de som der reeks:

$$\overset{1}{(m)}\left(\frac{m-1}{2}\right)^{n}+\overset{3}{(m)}\left(\frac{m-3}{2}\right)^{n-1}+\ldots\ \overset{2n-1}{(m)}\left(\frac{m-2n+1}{2}\right)^{1}+\overset{2n+1}{(m)}.(\beta)$$

De algemeene term wordt voorgesteld door

$$\overset{2k+1}{(m)}\left(\frac{m-2k-1}{2}\right)^{n-k}=\frac{m(m-1)\ldots(m-2k)}{1.\ 2\ldots(2k+1)}\times\frac{(m-2k-1)\ldots(m-2n+1)}{2.\quad 4\ldots\ldots(2n-2k)};$$

indien men teller en noemer vermenigvuldigt met:

$$(2k+3)\,(2k+5)\ldots\ldots(2n-1)\,(2n+1)$$

komt er na behoorlijke rangschikking

$$\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-2n+1)}{1.\ 3\ldots\ldots 2n+1}\times\frac{(m-2)(m-4)\ldots\ldots(m-2k)}{2.\quad 4\quad\quad 2k}\times$$

$$\times\frac{(2n+1)(2n-1)\ldots(2k+3)}{2.\quad 4\quad\quad(2n-2k)};$$

of, indien wij $\frac{m(m-1)\ldots(m-2n+1)}{1.\quad 3\quad\quad 2n+1}=K$ nemen:

$$K\times\left(\frac{m-2}{2}\right)^{k}\times\left(\frac{2n+1}{2}\right)^{n-k}.$$

Hierin achtereenvolgens $k=0,\ 1,\ 2\ldots$ stellende, vindt men voor de som

$$K\left(\frac{m+2n-1}{2}\right)^{n}.$$

Die som voorstellende door S, heeft men dus:

$$S=\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-2n+1)}{1.\ 3\ldots(2n+1)}\times\frac{(m+1)(m+3)\ldots\ldots(m+2n-1)}{2.\quad 4\ldots\ldots 2n}=$$

$$=\frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)\ldots\ldots\left\{m^2-(2n-1)^2\right\}}{1.\ 2.\ 3.\ 4\quad 5.\ 6\ldots\ldots 2n.(2n+1)}\ldots\ldots\ (B)$$

Door op dergelijke wijze te handelen, vindt men, dat de som der reeks

$$\left(\frac{m-1}{2}\right)^{n}+\overset{2}{(m)}\left(\frac{m-3}{2}\right)^{n-1}+\ldots\ \overset{2n-2}{(m)}\left(\frac{m-2n+1}{2}\right)^{1}+\overset{2n}{(m)},\ .\ (\gamma)$$

waarvan de algemeene term wordt voorgesteld door

$$\overset{2k}{(m)}\left(\frac{m-2k-1}{2}\right)^{n-k},$$

gelijk is aan:

$$\frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)(m^2-5^2)\ldots\left\{m^2-(2n-1)^2\right\}}{1.\ 2\ \ 3.\ 4.\ 5.\ 6\ldots\ldots\ldots(2n)}\ \ldots\ (C)$$

Terwijl de som van de reeks

$$\overset{1}{(m)}\overset{n}{\left(\frac{m-2}{2}\right)}+\overset{3}{(m)}\overset{n-1}{\left(\frac{m-4}{2}\right)}+\ldots\overset{2n-1}{(m)}\overset{1}{\left(\frac{m-2n}{2}\right)}+\overset{2n+1}{(m)}\ ,\ldots(\delta)$$

waarvan de algemeene term

$$\overset{2k+1}{(m)}\overset{n-k}{\left(\frac{m-2k-2}{2}\right)}$$

is, wordt uitgedrukt door

$$\frac{m(m^2-2^2)(m^2-4^2)\ldots\ldots\left\{m^2-(2n)^2\right\}}{1.\ \ 2.\ \ \ 3.\ \ldots\ldots(2n+1)}\ \ldots\ldots\ (D)$$

3. Stelling. *Voor alle waarden van x tusschen -1 en $+1$, d.i. voor alle waarden van x, absoluut genomen kleiner dan 1, is*

$$lim\left\{1+\overset{1}{(n)}x+\overset{2}{(n)}x^2+\overset{3}{(n)}x^3+\ldots+\overset{m}{(m)}x^m+\ldots\right\}=(1+x)^n.$$

Bewijs. Wanneer n een positief geheel getal is, dan is de opgegeven reeks de ontwikkeling van $(1+x)^n$ en bestaat alsdan uit een eindig aantal termen, is dus daaraan gelijk voor alle waarden van x. Is n negatief, of gebroken, of negatief gebroken, dan is de reeks eene oneindig voortloopende; wil zij dus tot eene limiet naderen, dan moet zij convergeeren. Nu is volgens § 23, 6:

$$\frac{t_{m+1}}{t_m}=\frac{\overset{m}{(n)}}{\overset{m-1}{(n)}}=\frac{\dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-m+2)(n-m+1)}{1.\ 2.\ \ 3\ldots\ldots m-1\ \ \ m}x^m}{\dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-m+2)}{1.\ 2.\ \ 3.\ \ \ m-1}x^{m-1}}=$$

$$=\frac{n-m+1}{m}x=\left(\frac{n}{m}-1+\frac{1}{m}\right)x.$$

Afgezien van het teeken, nadert deze waarde voor $m=\infty$ tot x; voor de convergentie wordt derhalve vereischt $x<1$.

Laten wij thans beproeven de limiet op te sporen, waartoe de som van de termen der opgegeven reeks steeds nadert, en

stellen wij daartoe die som voor door $\varphi(n)$, dan is, de eenmaal aangenomen notatie gebruikende:

$$\varphi(n) = 1 + \binom{1}{n}x + \binom{2}{n}x^2 + \binom{3}{n}x^3 + \ldots + \binom{m}{n}x^m + \ldots\ldots (\alpha)$$

en analoog:

$$\varphi(\nu) = 1 + \binom{1}{\nu}x + \binom{2}{\nu}x^2 + \binom{3}{\nu}x^3 + \ldots + \binom{m}{\nu}x^m + \ldots\ldots (\beta)$$

dus op grond van § 23, 24:

$$\varphi(n) \times \varphi(\nu) = 1 + \left\{\binom{1}{n} + \binom{1}{\nu}\right\}x + \left\{\binom{2}{n} + \binom{1}{n}\binom{1}{\nu} + \binom{2}{\nu}\right\}x^2 + \left\{\binom{3}{n} + \binom{2}{n}\binom{1}{\nu} + \binom{1}{n}\binom{2}{\nu} + \binom{3}{\nu}\right\}x^3 + \ldots\ldots (\gamma)$$

welke reeks nog convergent is voor alle waarden van x tusschen -1 en $+1$.

Op grond van de stelling van N°. 1 verandert de vergelijking (γ) in

$$\varphi(n) \times \varphi(\nu) = 1 + \binom{1}{n+\nu}x + \binom{2}{n+\nu}x^2 + \binom{3}{n+\nu}x^3 + \ldots\ldots;$$

terwijl uit (α) of (β) volgt:

$$\varphi(n+\nu) = 1 + \binom{1}{n+\nu}x + \binom{2}{n+\nu}x^2 + \binom{3}{n+\nu}x^3 + \ldots\ldots;$$

derhalve:

$$\varphi(n) \times \varphi(\nu) = \varphi(n+\nu).$$

Volgens § 20, 9 is deze vergelijking het karakter van $\varphi(n) = a^n$, $\varphi(\nu) = a^\nu$, waarin a onafhankelijk is van n en ν en dus alleen afhangt van x, daarom is

$$a^n = 1 + \binom{1}{n}x + \binom{2}{n}x^2 + \binom{3}{n}x^3 + \text{enz.}$$

Dewijl deze vergelijking doorgaat voor alle waarden van n, kan men, om de waarde van a te bepalen, $n = 1$ stellen, en vinden dan:

$$a = 1 + x,$$

zoodat men eindelijk heeft:

$$(1+x)^n = 1 + \binom{1}{n}x + \binom{2}{n}x^2 + \binom{3}{n}x^3 + \ldots\ldots$$

voor alle mogelijke waarden van n.

Aanmerking. De in dit N°. bewezen stelling, bekend onder den naam van het *binomium van* NEWTON, is voor het eerst door dezen grooten wiskundige bewezen voor alle

waarden van den exponent en heeft daarom van hem zijn naam ontvangen. De vorming der binomiaal-coëfficiënten vindt men bij BRIGGS 1624, bij FERMAT en PASCAL 1654. Het algemeene bewijs van NEWTON komt voor in zijn brief aan LEIBNITZ van 24 Oct. 1676. Een fraai algemeen bewijs is van EULER en komt voor in de *Nov. Comm. Petrop.* 19 p. 103.; men vergelijke daarmede *Acta Petrop.* V. p. 89 en *Nov. Act.* V. p. 52, alwaar de algemeene binomiaal-coëfficiënt

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-m+1)}{1.\ 2.\ 3\ldots\ldots\ldots m}$$

voorgesteld wordt door: $\binom{n}{m}$,

zoodat

$$\binom{n}{0}=1,\ \binom{n}{1}=\frac{n}{1},\ \binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{1.2},\ \binom{n}{3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3},\ \text{enz.}$$

Het in den tekst medegedeelde bewijs van CAUCHY munt boven de meeste andere bewijzen uit door gestrengheid van betoog. Het komt in Nederlandsche werken voor bij LOBATTO en SMAASEN.

4. Wanneer de reeks

$$1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{3}x^3+\ldots\ldots\binom{n}{m}x^m+\ldots\ldots$$

convergent en x dus eene echte breuk is, dan wordt van een bepaalden term te beginnen, elke volgende term kleiner dan zijn voorgaande: want nemen wij de verhouding tusschen den $(k+2)^{\text{den}}$ en den $(k+1)^{\text{den}}$, dan hebben wij:

$$\binom{n}{k+1}x^{k+1}:\binom{n}{k}x^k=\frac{n-k}{k+1}x<1,$$

zoodra k eene bepaalde grens te boven gaat.

Wil men de onnauwkeurigheid aangeven, welke men begaat, door de reeks ergens af te breken, dan kan men zulks doen op de volgende wijze.

Nemen wij

$$(1+x)^n=1+nx,$$

dan is, de onnauwkeurigheid voorstellende door O:

$$O = \binom{2}{n}x^2 + \binom{3}{n}x^3 + \binom{4}{n}x^4 + \ldots\ldots$$

$$= \binom{2}{n}x\left\{1 + \frac{n-2}{3}x + \frac{(n-2)(n-3)}{3.\ 4}x^2 + \ldots\ldots\right\}$$

$$< \binom{2}{n}x^2\left\{1 + \frac{n-2}{3}x + \left(\frac{n-2}{3}\right)^2x^2 + \left(\frac{n-2}{3}\right)^3x^3 + \ldots\right\}$$

Het laatste lid is eene meetkundige reeks; is nu de reden $\frac{n-2}{3}x < 1$, en zijn n en x positief, dan is de onnauwkeurigheid:

$$O < \binom{2}{n}x^2 \times \frac{1}{1 - \frac{n-2}{3}x}.$$

Schrijft men $-x$ in de plaats van x, dan worden de termen, die de oneven machten van x bevatten, negatief; breekt men ergens af, en heeft men bijv.

$$(1-x)^n = 1 - nx,$$

dan is:

$$O = \binom{2}{n}x^2 - \left\{\binom{3}{n}x^3 - \binom{4}{n}x^4\right\} - \left\{\binom{5}{n}x^5 - \binom{6}{n}x^6\right\} - \text{enz.}$$

dus $O < \binom{2}{n}x^2$, indien namelijk $\frac{n-3}{4}x < 1$.

Neemt men in 't algemeen aan, dat men k termen van de reeks gebruikt, en stelt men de termen, die op den $k$den volgen, voor door

$$t_{k+1}x^k,\ t_{k+2}x^{k+1},\ t_{k+3}x^{k+2}\ldots\ldots$$

dan is:

$$t_{k+1}x^k + t_{k+2}x^{k+1} + \text{enz.} < t_{k+1}x^k(1 + x + x^2 + x^3 \ldots);$$

derhalve de onnauwkeurigheid:

$$O < \frac{t_{k+1}x^k}{1-x}.$$

Door soortgelijke redeneering zal men nog vinden:

1) voor $n+1$ positief, x positief en $k > n$.

De onnauwkeurigheid ligt tusschen de grenzen

$$\binom{k}{n}x^k \text{ en } \binom{k}{n}x^k\left\{1 - \left(1 - \frac{n+1}{k+1}\right)x\right\}.$$

2) Voor $n+1$ positief, $x=-y$, y positief en $k>n$. De onnauwkeurigheid tusschen

$$\overset{k}{(n)}\frac{x^k}{1+x} \quad \text{en} \quad \overset{k}{(n)}\frac{x^k}{1-\left(1-\frac{n+1}{k+1}\right)x};$$

hier is alleen sprake van de absolute waarde der onnauwkeurigheid.

3) $n+1$ negatief, k zoo groot, dat absoluut genomen:

$$1-\frac{n+1}{k+1}<\frac{1}{x} \text{ en } x \text{ positief.}$$

De onnauwkeurigheid ligt tusschen:

$$\overset{k}{(n)}x^k \text{ en } \overset{k}{(n)}\left\{1-\left(1-\frac{n+1}{k+1}\right)x\right\}.$$

4) Dezelfde voorwaarden van 3), maar x negatief. De onnauwkeurigheid ligt tusschen:

$$\overset{k}{(n)}x^k \text{ en } \overset{k}{(n)}\frac{x^k}{1+\left(1-\frac{n+1}{k+1}\right)x}.$$

Aanmerking. Men vergelijke hiermede BALTZER's *Elemente*, § 23, 5 en § 24, 5. — Voor hen, die nog moeite mochten hebben het opgegeven resultaat te vinden, diene het volgende bewijs van 2).

De onnauwkeurigheid

$$0=\overset{k}{(n)}x^k\left\{1+\left(1-\frac{n+1}{k+1}\right)y+\left(1-\frac{n+1}{k+1}\right)\left(1-\frac{n+1}{k+2}\right)y^2+\ldots\right\};$$

de tusschen accoladen geplaatste reeks is kleiner dan de reeks

$$1+y+y^2+\ldots\ldots=\frac{1}{1-y},$$

en grooter dan de reeks:

$$1+\left(1-\frac{n+1}{k+1}\right)y+\left(1-\frac{n+1}{k+1}\right)^2y^2\ldots\ldots=\frac{1}{1-\left(1-\frac{n+1}{k+1}\right)y},$$

waardoor het gestelde bewezen is.

5. Het ligt voor de hand, dat men alle binomia tot de gedaante $(1\pm x)$ herleiden kan. Heeft men namelijk $(A\pm B)^m$,

dan kan men daarvoor schrijven $A^n\left(1 \pm \frac{B}{A}\right)^n$; stelt men daarin nu $\pm \frac{B}{A} = x$, dan heeft men slechts $(1+x)$ tot de $n$de macht te verheffen enz.

Stelling. *De binomiaal-reeks*

$$a^n + \overset{1}{(n)} a^{n-1} b + \overset{2}{(n)} a^{n-2} b^2 + \ldots + \overset{k}{(n)} a^{n-k} b^k + \ldots,$$

welke in het oneindige voortloopt, wanneer n geen geheel positief getal is, convergeert, indien $\frac{1}{2} a > b$.

Bewijs. Om deze stelling te betoogen, willen wij eerst bewijzen, dat elke reeks convergeert, indien een volgende term gelijk is aan, of kleiner is dan de helft des voorgaanden terms. Laat bijv. gegeven zijn de reeks

$$t_0, t_1, t_2, t_3 \ldots \text{enz.}$$

die deze eigenschap heeft; dan is, indien elke volgende term gelijk is aan de helft des voorgaanden en wij de som van k termen voorstellen door S:

$$S = t_0 + \tfrac{1}{2} t_0 + \tfrac{1}{4} t_0 + \ldots = t_0 \times \frac{1 - (\frac{1}{2})^k}{1 - \frac{1}{2}} = t_0 \frac{2^k - 1}{2^{k-1}} =$$

$$= 2 t_0 - \frac{t_0}{2^{k-1}},$$

welke waarde voor $k = \infty$ tot limiet heeft $2\, t_0$; de reeks is dus convergent. Was elke volgende term kleiner dan de helft van den voorgaanden, dan zou de reeks nog zooveel te meer convergeeren. — Indien wij dus verder bewijzen, dat absoluut genomen,

$$\tfrac{1}{2} \overset{k}{(n)} a^{n-k} b^k > \overset{k+1}{(n)} a^{n-k-1} b^{k+1}, \text{ mits } \tfrac{1}{2} a > b,$$

dan is de opgegeven stelling bewezen. Nemen wij in de eerste plaats $n = -p$, dan is:

$$\overset{k}{(n)} a^{n-k} b^k = (p + \overset{k}{k-1}) a^{-p-k} b^k \text{ en}$$

$$\overset{k+1}{(n)} a^{n-k-1} b^{k+1} = \overset{k+1}{(p+k)} a^{-p-k-1} b^{k+1} = \overset{k+1}{(p+k-1)} \times$$

$$\frac{p+k}{k+1} a^{-p-k-1} b^{k+1};$$

Omdat $\frac{1}{2}a > b$, is ook:

$$\tfrac{1}{2}\binom{p+k-1}{k} a^{-p-k} b^k > \binom{p+k-1}{k} a^{-p-k-1} b^{k+1}.$$

Is nu de $(k+1)^{de}$ term van de binomiaalreeks

$$t_k = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

$$\text{en } t_{k+1} = \binom{n}{k+1} a^{n-k-1} b^{k+1},$$

dan is, zoodra n negatief en gelijk aan $-p$ wordt:

$$t_k = \binom{p+k-1}{k} a^{-p-k} b^k,$$

$$t_{k+1} = \binom{p+k}{k+1} a^{-p-k-1} b^{k+1} = \binom{p+k-1}{k} a^{-p-k-1} b^{k+1} \times$$

$$\times \frac{p+k}{k+1};$$

dus ook:

$$\tfrac{1}{2} t_k > \binom{p+k-1}{k} a^{-p-k-1} b^{k+1};$$

en omdat

$$\frac{p+k}{k+1} = \frac{\frac{p}{k}+1}{1+\frac{1}{k}}, \text{ voor } k = \infty,$$

de eenheid tot limiet heeft:

$$\tfrac{1}{2} t_k > t_{k+1}.$$

Voor n negatief convergeert dus de reeks in de latere termen.

Neemt men voor n een positief gebroken getal, bijv. $\frac{p}{q}$, dan is

$$t_k = \frac{p(q-p)(2q-p)\ldots\ldots\left\{(k-1)q-p\right\}}{q.\ \ 2q.\ \ 3q\ \ldots\ldots\ldots kq} a^{\frac{p}{q}-k} b^k,$$

$$t_{k+1} = \frac{p(q-p)\ \ldots\ \left\{(k-1)q-p\right\}}{q.\ 2q\ \ldots\ldots\ kq} \times \frac{kq-p}{(k+1)q} a^{\frac{p}{q}-k-1} b^{k+1}.$$

Uit $\frac{1}{2}a > b$ volgt:

$$\tfrac{1}{2}\frac{p(q-p)\ldots\left\{(k-1)q-p\right\}}{q.\ \ 2q\ \ldots\ kq} a^{\frac{p}{q}-k} b^k > \frac{p(q-p)\ldots\left\{(k-1)q-p\right\}}{q.\ \ 2q\ \ldots\ kq} a^{\frac{p}{q}-k-1} b^{k+1}.$$

Maar omdat voor $k = \infty$:

$$lim\ \frac{kq-p}{(k+1)q} = \frac{\frac{k}{k+1}q - \frac{p}{k+1}}{q} = 1,$$

heeft men ook

$$\tfrac{1}{2} t_k > t_{k+1}.$$

Is n een negatief gebroken getal, bijv. $-\frac{p}{q}$, dan is, omdat $\frac{1}{2} a > b$,

$$\tfrac{1}{2}\frac{p(p+q)(p+2q)\ldots\ldots\left\{p+(k-1)q\right\}}{q.\quad 2q.\quad 3q\ \ldots\ldots\ kq} a^{-\frac{p}{q}-k} b^k >$$

$$> \frac{p(p+q)\ldots\ldots p+(k-1)q}{q.\ 2q\ \ldots\ldots\ kq} a^{-\frac{p}{q}-k-1} b^{k+1};$$

maar omdat:

$$t_k = \frac{p(p+q)(p+2q)\ldots\ldots\left\{p+(k-1)q\right\}}{q.\quad 2q.\quad 3q\ \ldots\ldots\ kq} a^{-\frac{p}{q}-k} b^k;$$

$$t_{k+1} = \frac{p(p+q)\ldots\left\{p+(k-1)q\right\}}{q.\ 2q\ \ldots\ldots\ kq} \times \frac{p+kq}{(k+1)q} a^{-\frac{p}{q}-k-1} b^{k+1},$$

en

$$lim\ \frac{p+kq}{(k+1)q} = \frac{\frac{p}{k+1} + \frac{k}{k+1}q}{q}$$ voor $k = \infty$ gelijk is aan 1

$$\tfrac{1}{2} t_k > t_{k+1}.$$

De laatste termen der reeks vormen dus voor negatieve, gebrokene en negatief gebrokene exponenten eene convergente reeks, de geheele reeks zal dus convergent zijn.

Aanmerking. Dat de reeks convergent is, indien $\frac{1}{2} t_k > t_{k+1}$, volgt ook onmiddellijk uit § 23, 6, want $\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{1}{2} < 1$. Met de bewezene stelling vergelijke men nog J. Bootz, *Elemente der Algem. Arithm.* T. II, p. 144.

Men kan de reeks, die uit de ontwikkeling van $(1+x)^n$ voortkomt, nog sterker convergent maken, door haar te ver-

menigvuldigen met $1 + vx$ en dan aan v eene geschikte waarde te geven. Zulks doende vinden wij achtereenvolgens:

$$(1+x)^n(1+vx) = 1 + \binom{1}{n}x + \binom{2}{n}x^2 + \binom{3}{n}x^3 + \ldots\ldots$$

$$+ vx + \binom{1}{n}vx^2 + \binom{2}{n}vx^3 + \binom{3}{n}vx^4 + \ldots\ldots$$

$$= 1 + (n+v)x + \left\{\binom{2}{n} + \binom{1}{n}v\right\}x^2 + \left\{\binom{3}{n} + \binom{2}{n}v\right\}x^3 + \ldots$$

Stelt men daarin nu $\left\{\binom{2}{n} + \binom{1}{n}v\right\}$ gelijk aan nul, dus:

$$v = -\frac{n-1}{2} \quad \text{en} \quad n + v = \frac{n+1}{2},$$

$$\binom{3}{n} + \binom{2}{n}v = -\frac{n+1}{6}\binom{2}{n}, \ldots.$$

dan vindt men:

$$(1+x)^n\left(1 - \frac{n-1}{2}x\right) = 1 + \frac{n+1}{2}x - \frac{n+1}{2}\binom{2}{n}\frac{x^3}{3} + \ldots\ldots$$

en indien x eene kleine waarde heeft:

$$(1+x)^n = \frac{1 + \frac{n+1}{2}x}{1 - \frac{n-1}{2}x},$$

dewijl in dat geval de hoogere machten van x kunnen verwaarloosd worden. De onnauwkeurigheid, die hierdoor begaan wordt, is natuurlijk:

$$\frac{-\frac{n+1}{2}\binom{2}{n}\frac{x^3}{3} + \ldots\ldots}{1 - \frac{n-1}{2}x}.$$

Moet men, om deze laatste formule toe te passen, den derdemachtswortel trekken uit 5, dan heeft men de volgende bewerking:

$$\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{(4{,}99144\,3829 + 0.008556171)} =$$

$$= 1{,}709\,\sqrt[3]{\left(1 + \frac{8556171}{499143829}\right)};$$

derhalve: $x = \frac{8556171}{499143829}$, $n = \frac{1}{5}$,

$$\frac{1+\frac{n+1}{2}x}{1-\frac{n-1}{2}x} = \frac{14991443829}{14982887658} = 1{,}000571063,$$

dus $\sqrt[5]{5} = 1{,}709 \times 1{,}000571063 = 1{,}70997594667$,
waarvan de laatste decimaal nog nauwkeurig is.

6. Stelling. *Voor alle waarden van x, reëel en imaginair, heeft men, indien m oneindig groot wordt:*

$$lim\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{enz.}$$

Bewijs. Wanneer $\frac{x}{m} < 1$, dan heeft men:

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = 1 + x + \left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{x^2}{1.2} + \left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\frac{x^3}{1.2.3} +$$
$$+ \left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\left(1-\frac{3}{m}\right)\frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots\ldots = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} +$$
$$+ \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots\ldots,$$

omdat $lim\ \frac{n}{m}$, voor n eindig en m oneindig, gelijk is aan 0.

Is nu, absoluut genomen, $\frac{x}{k+1} < 1$ en schrijft men:

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \ldots\ldots + \frac{x^k}{1.2\ldots k},$$

dan is de onnauwkeurigheid:

$$O = \left[\frac{x^{k+1}}{1.2\ldots(k+1)} + \frac{x^{k+2}}{1.2\ldots(k+2)} + \ldots\ldots \frac{x^{k+n}}{1.2\ldots(k+n)} + \ldots\right.$$
$$< \frac{x^{k+1}}{1.2\ldots(k+1)}\left\{1 + \frac{x}{k+1} + \frac{x^2}{(k+1)^2} + \ldots\ldots\right\}$$
$$\left. < \frac{x^{k+1}}{1.2\ldots(k+1)} \times \frac{1}{1-\frac{x}{k+1}}\right].$$

Neemt men nu hierin k oneindig groot, dan wordt de onnauwkeurigheid, die geheel onafhankelijk is van n, gelijk aan 0. Men heeft dus:

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\ldots \frac{x^k}{1.2.3\ldots k}$$

volkomen nauwkeurig, wanneer $k = \infty$ is.

Stelt men $x = 1$, dan volgt hieruit nog:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 2 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \text{enz.}$$

7. Stelling. *Indien wij* $2 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots$ *voorstellen door* e, *dan is*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots\ldots$$

voor alle eindige waarden van x.

Bewijs. Voor alle reëele of imaginaire waarden van x en y heeft men:

$$\left(1+x+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots\right)\left(1+y+\frac{y^2}{1.2}+\frac{y^3}{1.2.3}+\ldots\right) =$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots\ldots$$

$$+ y + \frac{x}{1}\cdot\frac{y}{1} + \frac{x^2}{1.2}\cdot\frac{y}{1} + \frac{x^3}{1.2.3}\cdot\frac{y}{1} + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{y^2}{1.2} + \frac{x}{1}\cdot\frac{y^2}{1.2} + \frac{x^2}{1.2}\cdot\frac{y^2}{1.2} + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{x}{1}\cdot\frac{y^3}{1.2.3} + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{y^4}{1.2.3.4} + \ldots\ldots$$

$$+ \ldots\ldots$$

$$= 1 + (x+y) + \frac{(x+y)^2}{1.2} + \frac{(x+y)^3}{1.2.3} + \frac{(x+y)^4}{1.2.3.4} + \text{enz.}$$

Schrijft men in $\varphi(x) = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \text{enz.}$

$x + y$ voor x, dan heeft men:

$$\varphi(x+y) = 1 + (x+y) + \frac{(x+y)^2}{1.2} + \frac{(x+y)^3}{1.2.3} + \ldots\ldots$$

derhalve:

$$\varphi(x) \times \varphi(y) = \varphi(x+y).$$

Volgens § 20, 9 volgt hieruit:

$$\varphi(x) = a^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots\ldots$$

Stellen wij, om hierin de waarde van a te bepalen, $x = 1$, dan hebben wij:

$$a = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots\ldots = e;$$

derhalve:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{enz.}$$

Dewijl de relatie $\varphi(x) \times \varphi(y) = \varphi(x+y)$
ook doorgaat, indien men voor x en y imaginaire waarden neemt, heeft men:

$$e^x \times e^y = e^{x+y},$$

eveneens: $e^x \times e^x \times e^x = e^{x+x+x} = e^{3x}$

en algemeen $(e^x)^v = e^{vx} = (e^v)^x,$

zoodat de eigenschappen voor geheele positieve exponenten ook doorgaan voor imaginaire.

Om deze eigenschap heeft men de reeks $1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \text{enz.}$ de *exponentiaal-reeks* genoemd. (Vergel. JOHANNIS BERNOULLI *Opera Omnia*. T. I. pag. 179. *Principia calculi exponentialium.*) Het hier gevoerde bewijs komt voor bij CAUCHY, *Anal. algébr.* VI, § 4 en bij BALTZER, *El.* § 25.

8. Stelling. *Wanneer x een reëel of imaginair getal voorstelt, kleiner dan of gelijk aan 1, dan is*

$$log\,(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \text{enz.}$$

Bewijs. Voor alle positieve waarden van y is $e^y > 1$; stellen wij dus $e^y = 1+x$, waarin $-1 < x <$ of $= 1$, dan is $y = {}^e log\,(1+x)$.

Verder is:

$$(e^y)^n = (1+x)^n \text{ of } e^{yn} = (1+x)^n,$$

waaruit onmiddellijk volgt:

$$1 + yn + \frac{y^2n^2}{1.2} + \frac{y^3n^3}{1.2.3} + \ldots = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1.2}x^2 +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots\ldots;$$

deze vergelijking is identiek, zij geldt voor alle waarden van n, dus ook voor $n = 0$; schrijven wij voor de laatste vergelijking:

$$y\left\{1 + \frac{yn}{1.2} + \frac{y^2n^2}{1.2.3} + \ldots\right\} = x + \frac{n-1}{1.2}x^2 + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots.$$

en substitueeren wij daarin $n = 0$, dan vinden wij:

$$y = {}^e log\,(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \text{enz.}$$

Voor $x = 1$ vindt men:

$${}^e log\,2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \text{enz.}$$

Voor $x = -1$:

$${}^e log\,0 = -1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} - \text{enz.} = -\infty.$$

Aanmerking. De hier aangehaalde reeks is van NICOLAAS MERCATOR: *Logarithmotechnia* 1668. Het hier gevolgde bewijs is van HALLEY, *Philos. Trans.* 1695. Vergelijk ook BALTZER, LOBATTO en anderen.

9. Volgens het vorige N°. is:

$${}^e log\,(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \text{enz.}$$

$${}^e log\,(1-x) = -x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 - \text{enz.}$$

derhalve:

$${}^e log\,(1+x) - {}^e log\,(1-x) = {}^e log\,\frac{1+x}{1-x} =$$

$$2\left(x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{1}{7}x^7 + \text{enz.}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

Vervangt men in deze reeks x door $\frac{v}{2u+v}$, d.i. $\frac{1+x}{1-x}$ door $\frac{u+v}{u}$, dan heeft men:

$$^{e}log\frac{u+v}{u}=2\left\{\frac{v}{2u+v}+\frac{1}{3}\left(\frac{v}{2u+v}\right)^{3}+\frac{1}{5}\left(\frac{v}{2u+v}\right)^{5}+\text{enz.}\right\},$$

$$\text{of } ^{e}log\,(u+v)=^{e}log\,u+2\left\{\frac{v}{2u+v}+\frac{1}{3}\left(\frac{v}{2u+v}\right)^{3}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{5}\left(\frac{v}{2u+v}\right)^{5}+\text{enz.}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots(\beta)$$

Stelt men in (α) $x=\pm\frac{v}{2u^{n}+v}$, dan vindt men nog:

$$^{e}log\,(u^{n}\pm v)=n\,^{e}log\,u\pm2\left\{\frac{v}{2u^{n}\pm v}+\frac{1}{3}\left(\frac{v}{2u^{n}\pm v}\right)^{3}+\ldots\right\}\ldots(\gamma)$$

Neemt men in de laatste reeks $n=2$, $v=1$, en gebruikt men het onderste teeken, dan is:

$$^{e}log(u+1)=2\,^{e}log\,u-{}^{e}log(u-1)-2\left\{\frac{1}{2u^{2}-1}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2u^{2}-1}\right)^{3}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2u^{2}-1}\right)^{5}+\ldots\ldots\right\}\quad\ldots\ldots\ldots(\delta)$$

De formule (β) is geschikt, om den logarithmus van een getal te vinden, indien de logarithmus van het voorgaande bekend is. Men stelle slechts $v=1$ en $u=1$ en men vindt:

$$^{e}log\,2=2\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{3}+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{5}+\text{enz.}\right\};$$

voor $v=1$ en $u=2$:

$$^{e}log\,3=^{e}log\,2+2\left\{\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{3}+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{5}+\text{enz.}\right\}.$$

enz. enz.

De reeks (δ), welke sterker convergeert dan (β), is bijzonder geschikt om den logarithmus van een getal te berekenen, wanneer de logarithmen van het onmiddellijk en laatstvoorgaande getal bekend zijn.

Om uit deze formulen voor de e-logarithmen formules af te leiden voor het stelsel, waarvan a het grondtal is, stellen wij

$$a^{x}=e^{y}=z;$$

dan volgt daaruit:

$$x=^{a}log\,z,\quad y=^{e}log\,z,\quad x\,^{e}log\,a=y;$$

dus

$$^{a}log\,z=x\,^{e}log\,a,$$

of

$$x=^{a}log\,z=\frac{^{e}log\,z}{^{e}log\,a}=\frac{1}{^{e}log\,a}\times{}^{e}log\,z.$$

Men moet dus de ^{e}log met een standvastig getal $\frac{1}{^{e}log\, a}$ vermenigvuldigen om de ^{a}log te vinden. Dat standvastig getal heet *modulus* en wordt gewoonlijk voorgesteld door M.

Is $a = 10$, dan is $\frac{1}{^{e}log\, a} = 0{,}43429448$; het is met dat getal, dat men de Neperiaansche logarithmen moet vermenigvuldigen, om de Briggiaansche te vinden.

Om de uitdrukking a^x in eene reeks te ontwikkelen, heeft men:

$$a^x = (e^x)^{^{e}log\, a} = 1 + x.^{e}log\, a + \frac{x^2}{1.2}(^{e}log\, a)^2 + \frac{x^3}{1.2.3}(^{e}log\, a)^3 + \text{enz.}$$

$$= 1 + \frac{x}{M} + \frac{x^2}{1.2.M^2} + \frac{x^3}{1.2.3.M^3} + \ldots \quad (s)$$

Eene zeer sterk convergeerende reeks ter berekening van de logarithmen van de natuurlijke getallen vindt men op de volgende wijze:

Stel in de formule

$$^{a}log\, \frac{1+x}{1-x} = M \times {}^{e}log\, \frac{1+x}{1-x} = 2M\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \text{enz.}\right]$$

$\frac{1+x}{1-x} = y$, dan is $x = \frac{y-1}{y+1}$, en men heeft:

$$^{a}log\, y = 2M\left\{\frac{y-1}{y+1} + \tfrac{1}{3}\cdot\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^5 + \text{enz.}\right\}.$$

Zij verder $y = \frac{p}{q}$, dan is $y-1 = \frac{p-q}{q}$ en $y+1 = \frac{p+q}{q}$; derhalve:

$$^{a}log\, \frac{p}{q} = 2M\left\{\frac{p-q}{p+q} + \tfrac{1}{3}\cdot\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^5 + \text{enz.}\right\}.$$

Nemen wij nu verder $p = x^4 - 25x^2 = x^2(x+5)(x-5)$ en $q = x^4 - 25x^2 + 144 = (x^2-9)(x^2-16) = (x+3)(x-3)(x+4)(x-4)$, dan gaat de laatste reeks over in:

$$^{a}log\, \frac{x^2(x+5)(x-5)}{(x+3)(x-3)(x+4)(x-4)} =$$

$$-2M\left\{\frac{72}{x^4-25x^2+72} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{72}{x^4-25x^2+72}\right)^2 + \ldots\right\}$$

$$^a log\,(x+5) = \left\{\begin{matrix} {}^a log(x+3) + {}^a log(x-3) \\ + {}^a log(x+4) + {}^a log(x-4) \\ - {}^a log(x-5) - 2\,{}^a log\, x \end{matrix}\right\} -$$

$$- 2M\left\{\frac{72}{x^4-25x^2+72} + \tfrac{1}{3} \times \text{enz.} + \text{enz.}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (\Theta)$$

Stelt men hierin $x = 1000$, dan kan men, indien men de logarithmen tot 1004 kent, de volgende benaderen en wel omdat

$$2M\tfrac{1}{3}\left\{\frac{72}{x^4-25x^2+72}\right\}^3 =$$

$$= 0,\,00000\;00000\;00000\;00000\;00000\;00000\;11,$$

tot dertig mantissen nauwkeurig, door slechts een term der reeks te gebruiken, indien namelijk de *log* van 996, 997, 1000, 1003 en 1004 in 30 decimalen gegeven zijn.

Dewijl $2M\dfrac{72}{x^4-25x^2+72} = 0,\,00000\;00000\;62$, kan men door het weglaten der reeks de *log* tot in 10 mantissen vinden.

Stelt men $p = x^2(x^2-49)^2 = x^2(x-7)^2(x+7)^2$,

en $$q = x^6 - 98x^4 + 2401x^2 - 14400 =$$

$$= (x^2-9)(x^2-25)(x^2-64),$$

dan vindt men na behoorlijke herleiding:

$$^a log\,(x+8) = \left\{\begin{matrix} 2\,{}^a log\, x + 2\,{}^a log(x-7) + 2\,{}^a log(x+7) \\ - {}^a log\,(x-3) - {}^a log(x+3) - {}^a log(x-5) \\ - {}^a log\,(x+5) - {}^a log(x-8) \end{matrix}\right\} +$$

$$+ 2M\left\{\frac{7200}{x^6-98x^4+2401x^2-7200} + \text{enz.}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (\Theta')$$

Aanmerking. Aangaande het gebruik der logarithmen enz. raadplege men mijne *Theorie der Alg. Rekenk.* I, p. 247, II, p. 186. — Bij de historische aanteekeningen, die daarin voorkomen, kan men nog voegen, dat ABRAHAM SHARP, een Engelschman † 1742, de logarithmen van alle priemgetallen van 1 tot 1100 en van 999981 tot 1000015 berekende tot 60 mantissen. WOLFRAM, een Hollandsch artillerie-officier, berekende de logarithmen van alle priemgetallen onder de 10000 tot 48 mantissen. Tijdens de Fransche republiek werd er besloten een groote logarithmentafel uit te geven,

die de logarithmen zou bevatten der getallen van 1—10000 met 19, van 10000 tot 200000 met 14, de log. van den sinus van $\frac{1}{100000}^{e}$ van een quadrant met 14 mantissen enz. *Notice sur les grandes tables logarith. et trigonom. calculées au Bureau du Cadastre.* An. IX. Verder zie men: *Scriptores Logarithmici, or a Collection of several curious tracts on the nature and Construction of logarithmus* London 1791, uitgegeven door FRANCIS MASERES en THIBAUTS *Historia controversiae circa num. neg. et imp. logarith. Gott.* 1797. Vergel. KLÜGEL i. v. Log. — De formule (Θ) is van HAROS en komt voor in de *Instruction abrégée sur les nouvelles mesures, avec des tables de rapports et de réduction.* Vergel. GARNIER *An. alg.* p. 222. — De formulen (Θ) en (Θ') komen zonder bewijs voor in SMAASEN's *Hoogere algebra*, pag. 95. De eerste reeks wordt daar aan BORDA, de tweede aan LAVERNEDE toegeschreven.

10. Vervangt men in de exponentiaal-reeks x door φx, dan kan men schrijven:

$$e^{\varphi x} = 1 + \varphi^2 \frac{x^2}{1\,2} + \varphi^4 \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots.$$

$$+ \varphi x + \varphi^3 \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\ldots.$$

Stelt men de eerste reeks voor door $c(x)$ en de reeks:

$$x + \varphi^2 \frac{x^3}{1.2.3} + \varphi^4 \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \ldots..$$

door $s(x)$, dan heeft men:

$$e^{\varphi x} = c(x) + \varphi s(x) \ldots\ldots \quad (A)$$

Verandert men in deze reeks φ in $-\varphi$, dan behouden alle termen van de reeks $c(x)$ en $s(x)$ hetzelfde teeken; alle termen van de reeks $\varphi\, s(x)$ krijgen het tegengestelde teeken, derhalve:

$$e^{-\varphi x} = c(x) - \varphi\, s(x) \ldots\ldots\ldots \quad (B)$$

Uit de formulen (A) en (B) volgt door optelling:

$$\frac{e^{\varphi x} + e^{-\varphi x}}{2} = c(x) \ldots\ldots\ldots \quad (C)$$

door aftrekking:

$$\frac{e^{\varrho x} - e^{-\varrho x}}{2\varrho} = s(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (D)$$

door vermenigvuldiging:

$$\{c(x)\}^2 - \varrho^2 \{s(x)\}^2 = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (E)$$

door deeling:

$$e^{2\varrho x} = \frac{c(x) + \varrho s(x)}{c(x) - \varrho s(x)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (F)$$

De laatste formule kunnen wij verder uitwerken. Wij vinden namelijk:

$$e^{2\varrho x} = \frac{1 + \frac{\varrho s(x)}{c(x)}}{1 - \frac{\varrho s(x)}{c(x)}},$$

$$2\varrho x = {}^e log \frac{1 + \frac{\varrho s(x)}{cx}}{1 - \frac{\varrho s(x)}{c(x)}} = 2\left\{\varrho \frac{s(x)}{c(x)} + \frac{\varrho^3}{3}\left[\frac{s(x)}{c(x)}\right]^3 + \frac{\varrho^5}{5}\left[\frac{s(x)}{c(x)}\right]^5 + \ldots\right\}$$

of na deeling door 2ϱ en door $\frac{s(x)}{c(x)} = t(x)$ te stellen, mits $\varrho t(x) \leqq 1$:

$$x = t(x) + \frac{\varrho^2}{3}[t(x)]^3 + \frac{\varrho^4}{5}[t(x)]^5 + \text{enz.}$$

11. Uit $e^{\varrho(x+y)} = e^{\varrho x + \varrho y} = e^{\varrho x} \times e^{\varrho y}$,

volgt analoog met het voorgaand N°.

$$c(x+y) + \varrho s(x+y) = [c(x) + \varrho s(x)]\,[c(y) + \varrho s(y)] \quad . \quad . \quad (G)$$

en, indien men hierin ϱ vervangt door $-\varrho$:

$$c(x+y) - \varrho s(x+y) = [c(x) - \varrho s(x)]\,[c(y) - \varrho s(y)] \quad . \quad . \quad (H)$$

Hieruit volgt door optelling:

$$c(x+y) = c(x) \,.\, c(y) + \varrho^2 s(x) \,.\, s(y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I)$$

door aftrekking:

$$s(x+y) = c(x) \,.\, s(y) + s(x) \,.\, c(y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (K)$$

Omdat $(e^{\varrho x})^y = e^{\varrho xy} = (e^{\varrho y})^x$ is ook:

$$[c(x) + \varrho s(x)]^y = c(xy) + \varrho s(xy) = [c(y) + \varrho s(y)]^x \quad . \quad . \quad (L)$$

en door hierin φ te vervangen door $-\varphi$:

$$[c(x) - \varphi s(x)]^y = c(xy) - \varphi s(xy) = [c(y) - \varphi s(y)]^x \quad . \quad (M)$$

Hieruit volgt door optelling:

$$c(xy) = \frac{[c(x) + \varphi s(x)]^y + [c(x) - \varphi s(x)]^y}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (N)$$

en door aftrekking:

$$s(xy) = \frac{[c(x) + \varphi s(x)]^y - [c(x) - \varphi s(x)]^y}{2\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (O)$$

Is y een positief geheel getal, dan kan men de formules (N) en (O) zonder eenige voorwaarden volgens het *binomium van* NEWTON ontwikkelen; voor elke andere waarde van y heeft men nog te voldoen aan de voorwaarde $\varphi t(x) < 1$.

Aanmerking. Op deze formulen komen wij in de volgende § terug. Tevens zullen wij aldaar gelegenheid hebben het verband te leeren kennen, dat er bestaat tusschen goniometrische, exponentiale en logarithmische functiën.

---

§ 33. Goniometrische functiën.

1. Stelling. *De limiet van* $\sin\delta : \delta$ *voor* $lim\ \delta = 0$ *is één.*

Bewijs. Indien δ een boog voorstelt $< \frac{1}{2}\pi$, dan is $\delta > \sin\delta$ en $\delta < tang\ \delta$, derhalve heeft men:

$$\frac{\sin\delta}{\delta} < 1 \quad \text{en} \quad \frac{\sin\delta}{tang\ \delta} < \frac{\sin\delta}{\delta} \quad \text{of} \quad \cos\delta < \frac{\sin\delta}{\delta},$$

derhalve:

$$1 > \frac{\sin\delta}{\delta} > \cos\delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

De waarde van $\sin\delta : \delta$ ligt dus tusschen 1 en $\cos\delta$; maar $\cos\delta$ nadert voor afnemende waarden van δ tot 1, derhalve:

$$lim\ \frac{\sin\delta}{\delta} = 1 \text{ voor afnemende waarden van } \delta\ [lim\ \delta = 0].$$

Omdat verder:

$$lim \frac{\sin\delta}{\delta} = lim\left\{\frac{tang\ \delta}{\delta} \times \cos\delta\right\}, \text{ en } lim\ \cos\delta = 1, \text{ voor } lim\ \delta = 0,$$

heeft men ook:

$$lim \frac{tang\ \delta}{\delta} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Stelt men in de vergelijkingen (1) en (2):
$sin\ \delta = \delta'$, dus $\delta = boog\ sin\ \delta'$; $tang\ \delta = \delta'$, dus $\delta = boog\ tang\ \delta'$, dan is nog:

$$lim \frac{boog\ sin\ \delta'}{\delta'} = lim \frac{boog\ tang\ \delta'}{\delta'} = 1. \quad \text{Voor } lim\ \delta' = 0.$$

Aanmerking. Deze fraaie bewijzen komen voor in Oscar Schlömilch's *Handbuch der Diff. u. Int. Rechn.*

2. *Men vraagt de functie $\varphi(x)$ zoo te bepalen, dat zij tusschen twee willekeurige reëele grenzen van x continue blijft en voor alle reëele waarden van x en y voldoet aan de vergelijking:*

$$\varphi(x+y) + \varphi(x-y) = 2\varphi(x)\,\varphi(y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (K)$$

Schrijft men in de vergelijking (K) $x = y = 0$, dan vindt men onmiddellijk $\varphi(0) = 1$, schrijft men $x = 0$, dan vindt men $\varphi(-y) = \varphi(y)$, dus ook $\varphi(x) = \varphi(-x)$. Omdat de functie tusschen alle reëele grenzen continue is, kunnen wij a zoodanig kiezen, dat $\varphi(x)$ tusschen 0 en a steeds positief blijft, waarbij a kleiner of grooter kan zijn dan één.

I. Indien men heeft $a < 1$, dan kan men stellen $\varphi(a) = cos\ \alpha$, waarin α een hoek is tusschen 0 en $\frac{1}{4}\pi$. Schrijft men nu voor de vergelijking (K):

$$\varphi(x+y) = 2\varphi(x)\,\varphi(y) - \varphi(x-y),$$

en substitueert men daarin achtereenvolgens:

$x = y = a$; $x = 2a$, $y = a$; $x = 3a$, $y = a$; $x = 4a$, $y = a$; ...

dan vindt men:

$$\varphi(2a) = 2\varphi(a)\,.\,\varphi(a) - \varphi(0) = cos\ 2\alpha\ *)$$
$$\varphi(3a) = 2\varphi(2a)\,\varphi(a) - \varphi(a) = cos\ 3\alpha$$
$$\varphi(4a) = 2\varphi(3a)\varphi(a) - \varphi(2a) = cos\ 4\alpha$$

enz.

---

*) Men vergelijke hiermede o. a. Badon Ghyben's *Beginselen der Meetkunst*, pag. 260, van den 5den druk.

zoodat voor elke geheele positieve waarde van n gevonden zal worden:

$$\varphi(na) = \cos n\alpha. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Schrijft men de vergelijking (K) onder de gedaante:

$$\varphi(x)\,\varphi(y) = \frac{\varphi(x-y)+\varphi(x+y)}{2},$$

en substitueert men daarin achtereenvolgens:

$$x = y = \tfrac{1}{2}a\,;\; x = y = \tfrac{1}{4}a\,;\; x = y = \tfrac{1}{8}a \ldots\ldots,$$

dan vindt men:

$$\left\{\varphi(\tfrac{1}{2}a)\right\}^2 = \frac{\varphi(0)+\varphi(a)}{2} = \frac{1+\cos a}{2} = \cos^2\tfrac{1}{2}a,$$

$$\left\{\varphi(\tfrac{1}{4}a)\right\}^2 = \frac{\varphi(0)+\varphi(\tfrac{1}{2}a)}{2} = \frac{1+\cos\tfrac{1}{2}a}{3} = \cos^2\tfrac{1}{4}a,$$

$$\left\{\varphi(\tfrac{1}{8}a)\right\}^2 = \frac{\varphi(0)+\varphi(\tfrac{1}{4}a)}{2} = \frac{1+\cos\tfrac{1}{4}a}{2} = \cos^2\tfrac{1}{8}a,$$

enz.

Voor elke positieve geheele waarde van k is dus:

$$\varphi\left(\frac{1}{2^k}a\right) = \cos\frac{1}{2^k}a \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

en in verband met de relatie (1)

$$\varphi\left(\frac{n}{2^k}a\right) = \cos\frac{n}{2^k}a \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Is nu μ een willekeurig positief getal, dan kan men de getallen n en k altijd zoodanig kiezen, dat $\frac{n}{2^k}$ de waarde van μ zoo dicht mogelijk nadert.

Zij bijv. ν een willekeurig positief klein getal, dan kan men k zoo bepalen, dat $2^k > \frac{1}{\nu}$; zij verder p een geheel positief getal zoodanig, dat $2^k(\mu-\nu)$ gelijk is aan p, indien $2^k(\mu-\nu)$ een geheel getal is, of dat p het naast kleinere geheele getal is, hetwelk in $2^k(\mu-\nu)$ begrepen is; dan zal, omdat men ν altijd kleiner kan nemen dan μ,

$$\mu - \frac{p+1}{2^t} < \nu.$$

Want $p \leqq 2^t(\mu - \nu)$, $\quad p+1 > 2^t(\mu-\nu)$,

en $\quad 1 < 2^{t\nu}$;

dus: $\quad p+1 < 2^t\mu \quad$ of $\quad \frac{p+1}{2^t} < \mu.$

Maar $\quad \frac{p+1}{2^t} + \nu > \mu \quad$ of $\quad \mu - \frac{p+1}{2^t} < \nu.$

Neemt men dus $p+1 = n$, dan ziet men, dat men $\frac{n}{2^t}$ zoo na mogelijk kan brengen aan μ; zoodat men heeft $lim\ \frac{n}{2^t} = \mu.$

Daardoor verandert de vergelijking (3) in

$$\varphi(\mu a) = cos\ \mu a;$$

maar er is reeds aangetoond, dat $\varphi(x) = \varphi(-x)$, dus ook

$$\varphi(-\mu a) = \varphi(\mu a);$$

en omdat $\quad cos\,(-\mu a) = cos\,(\mu a),$

is voor alle positieve en negatieve waarden van μ:

$$\varphi(\mu a) = cos\ \mu a,$$

of wat hetzelfde is:

$$\varphi(ax) = cos\ ax.$$

Schrijven wij hierin $\frac{x}{a}$ voor x, dan heeft men:

$$\varphi(x) = cos\left(\frac{\alpha}{a}x\right) = cos\left(-\frac{\alpha}{a}x\right),$$

zoodat men eindelijk heeft:

$$\varphi(x) = cos\ Ax, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

waarin A eene willekeurige standvastige is.

II. Is de positieve grootheid $\varphi(a)$ grooter dan één, dan kan men stellen:

$$\varphi(a) = \tfrac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}x\right),$$

waarin $r = \varphi(a) + \sqrt{\left\{(\varphi(a))^2 - 1\right\}}$, mits de wortelgrootheid positief genomen worde.

Substitueert men nu even als vroeger achtereenvolgens:

$$x = y = a;\ x = 2a,\ y = a,\ x = 3a,\ y = a,\ \text{enz.}$$

en daarna

$$x = y = \tfrac{1}{2}a;\ x = y = \tfrac{1}{4}a;\ x = y = \tfrac{1}{8}a,\ \text{enz.},$$

dan zal men na behoorlijke herleiding vinden:

$$\varphi(2a) = \tfrac{1}{2}\left(r^2 + \frac{1}{r^2}\right) \qquad \varphi(\tfrac{1}{2}a) = \tfrac{1}{2}\left(r^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}}\right)$$

$$\varphi(3a) = \tfrac{1}{2}\left(r^3 + \frac{1}{r^3}\right) \qquad \varphi(\tfrac{1}{4}a) = \tfrac{1}{2}\left(r^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{r^{\frac{1}{4}}}\right)$$

$$\varphi(4a) = \tfrac{1}{2}\left(r^4 + \frac{1}{r^4}\right) \qquad \varphi(\tfrac{1}{8}a) = \tfrac{1}{2}\left(r^{\frac{1}{8}} + \frac{1}{r^{\frac{1}{8}}}\right)$$

. . . .

derhalve voor alle positieve geheele waarden van n en positieve waarden van k:

$$\varphi\left(2^{\frac{n}{k}}a\right) = \tfrac{1}{2}\left(r^{\left(2^{\frac{n}{k}}\right)} + r^{\left(2^{-\frac{n}{k}}\right)}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Door eene zelfde redeneering als in het eerste gedeelte vindt men hiervoor:

$$\varphi(x) = \tfrac{1}{2}\left(r^{\frac{x}{a}} + r^{-\frac{x}{a}}\right)$$

of indien men $r^{\frac{1}{a}} = A$ neemt, waarin A eene willekeurige positieve constante is,

$$\varphi(x) = \tfrac{1}{2}\left(A^x + A^{-x}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Aanmerking. Om de behandeling der goniometrische functiën niet door verschillende hoofdstukken te verspreiden, hebben wij de behandeling van dit karakter niet opgenomen in § 20, maar eerst hier voorgedragen. Het bewijs is van CAUCHY. [Zie zijne *Cours d'Analyse de l'école royale polyt.* I, 1821.] Hetzelfde bewijs komt ook voor in GRUNERT's *S.* auf KL. W.

3. De reeks

$$\varphi(x)=1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}+\frac{x^8}{1\ldots 8}-\text{enz.}$$

is convergent voor alle eindige waarden van x, evenzeer is zulks het geval met

$$\varphi(y)=1-\frac{y^2}{1.2}+\frac{y^4}{1\ldots 4}-\frac{y^6}{1\ldots 6}+\frac{y^8}{1\ldots 8}-\text{enz. (§ 23 : 6, 21);}$$

derhalve [zie § 23 : 14, 24]:

$$\varphi(x)\times\varphi'(y)=\begin{cases}1\\ -\frac{1}{1.2}(x^2+y^2)\\ +\frac{1}{1.2.3.4}(x^4+6x^2y^2+y^4) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)\\ -\frac{1}{1.2.3.4.5.6}(x^6+15x^4y^2+15x^2y^4+y^6)\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\end{cases}$$

De reeksen

$$\varphi(x+y)=1-\frac{(x+y)^2}{1.2}+\frac{(x+y)^4}{1.2.3.4}-\frac{(x+y)^6}{1\ldots 6}+\text{enz.,}$$

en $$\varphi(x-y)=1-\frac{(x-y)^2}{1.2}+\frac{(x-y)^4}{1.2.3.4}-\frac{(x-y)^6}{1\ldots 6}+\text{enz.,}$$

zijn ook convergent voor alle eindige waarden van x en y; derhalve (§ 23 : 13, 23):

$$\tfrac{1}{2}\{\varphi(x+y)+\varphi(x-y)\}=\begin{cases}1\\ -\frac{1}{1.2}(x^2+y^2)\\ +\frac{1}{1.2.3.4}(x^4+6x^2y^2+y^4) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (B)\\ -\frac{1}{1.2.3.4.5.6}(x^6+15x^4y^2+15x^2y^4+y^6)\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\end{cases}$$

Zoodat men voor alle waarden van x en y heeft:

$$\varphi(x+y) + \varphi(x-y) = 2\psi(x)\,\varphi(y).$$

Voor $x = 0$ en $y = 0$, vindt men $\varphi(0) = 1$; voor $x = 0$ $\varphi(-y) = \varphi(y)$; voor waarden van x dicht bij 0 is dus $\varphi(x)$ positief; zij a eene zoodanige waarde van x, dan is:

$$\varphi(a) = 1 - \left(\frac{a^2}{1.2} - \frac{a^4}{1....4}\right) - \left(\frac{a^6}{1...6} - \frac{a^8}{1....8}\right) - \text{enz.}$$

$\psi(a)$ ligt derhalve tusschen 0 en 1 en men heeft, omdat in dat geval $\varphi(x) = cos\ Ax$:

$$cos\ Ax = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{enz.} \ldots (C)$$

Stelt men verder:

$$\psi(x) = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1....7} + \text{enz.} \ldots (D)$$

dan volgt uit (C):

$$cos^2 Ax = \begin{cases} 1 \\ -x^2\left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2}\right) \\ +x^4\left(\frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{1.2.1.2} + \frac{1}{1.2.3.4}\right) \\ -x^6\left(\frac{1}{1..6} + \frac{1}{1...4.1.2} + \frac{1}{1.2.1...4} + \frac{1}{1....6}\right) \\ +\text{enz.} \end{cases} \ldots (E)$$

en uit (D):

$$\{\psi(x)\}^2 = \begin{cases} x^2 \\ -x^4\left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3}\right) \\ +x^6\left(\frac{1}{1.2.3.4.5} + \frac{1}{1.2.3.1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4.5}\right) \\ +\text{enz.;} \end{cases} \ldots (F)$$

derhalve:

$$\cos^2 Ax + \{\psi(x)\}^2 = \begin{cases} 1 \\ -x^2\left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{1.1} + \frac{1}{1.2}\right) \\ +x^4\left(\frac{1}{1.2.3.4} - \frac{1}{1.2.3.1} + \frac{1}{1.2.1.2} - \frac{1}{1.1.2.3} + \right. \\ \qquad \left. + \frac{1}{1.2.3.4}\right) \\ -x^6\left(\frac{1}{1\ldots6} - \frac{1}{1\ldots5.1} + \frac{1}{1\ldots4.1.2} - \frac{1}{1\ldots3.1\ldots3}\right. \\ \qquad \left. + \frac{1}{1.2.1\ldots4} - \frac{1}{1\ldots5} + \frac{1}{1\ldots}\right. \\ + \text{enz.} \end{cases}$$

Maar $(1-1)^{2n} = 0 = 1 - \frac{2n}{1} + \frac{2n(2n-1)}{1.\ 2.} - \frac{2n(2n-1)(2a-2)}{1.\ 2.\ 3.} + \ldots 1;$

voor alle willekeurige positieve geheele waarden van n, dus na deeling door $1.2.3\ldots 2n$

$$0 = \frac{1}{1\ldots 2n} - \frac{1}{1\ldots(2n-1).1} + \frac{1}{1\ldots(2n-2).1.2} - \text{enz.}$$

Zoodat uit (G) volgt:

$$\cos^2 Ax + \{\psi(x)\}^2 = 1, \quad \ldots\ldots \quad \text{(H)}$$

of $\pm\psi(x) = \sqrt{(1 - \cos^2 Ax)} = \sin Ax;$

derhalve voor alle waarden van x:

$$\sin Ax = \pm x \mp \frac{x^3}{1.2.3} \pm \frac{x^5}{1.2.3.4.5} \mp \frac{x^7}{1.2\ldots7} \pm \text{enz.} \ldots \text{(I)}$$

Omdat verder (zie N°. 1) $\frac{\sin Ax}{x} = A\frac{\sin Ax}{Ax} = A$ (voor oneindig kleine x), volgt uit (I):

$$\frac{\sin Ax}{x} = A = \pm 1 \mp \frac{x^2}{1.2.3} \pm \frac{x^5}{1\ldots5} \mp \text{enz.} \ldots = \pm 1.$$

Hieruit volgt onmiddellijk, dat de vergelijkingen (C) en (I) overgaan in:

$$\left.\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{enz.} \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1..7} + \text{enz.} \end{aligned}\right\} \ldots (M)$$

indien men namelijk nog in het oog houdt, dat

$$\sin \pm x = \pm \sin x \quad \text{en} \quad \cos \pm x = \cos x,$$

zijnde nu door de reeksen (M) de sinus en cosinus van een bepaalden boog uitgedrukt.

Aanmerking. Men houde hierbij in het oog, dat hier geen sprake is van de lengte van een boog, uitgedrukt in graden, minuten enz. „Men is gewoon de lengten der cirkelbogen in getallen uit te drukken door hen, even als de goniometrische lijnen met hunnen straal te meten." BADON GHYBEN, *Meetk.* § 230. Vergelijk ook BADON GHYBEN: *Reg. der diff. en int. rek.*, § 20 en 90.

4. In de meetkunde wordt algemeen bewezen, dat

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$
$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x.$$

Deze twee theorema's, waarvan in alle werken, die over de goniometrie en trigonometrie handelen, een meer of minder nauwkeurig algemeen bewijs voorkomt, tot grondslag nemende onzer verdere beschouwingen, heeft men:

$$(\cos a + i \sin a)(\cos a_1 + i \sin a_1) =$$
$$= \cos a \cos a_1 + i^2 \sin a \sin a_1 + i(\cos a \sin a_1 + \sin a \cos a_1) =$$
$$= \cos(a + a_1) + i \sin(a + a_1).$$

Op dergelijke wijze handelende, zal men vinden:

$$(\cos a + i \sin a)(\cos a_1 + i \sin a_1)(\cos a_2 + i \sin a_2) =$$
$$= \cos(a + a_1 + a_2) + i \sin(a + a_1 + a_2).$$

enz.

Stelt men hierin $a = a_1 = a_2 = \ldots\ldots$ en zij n een willekeurig geheel positief getal, dan is:

$$(\cos a + i \sin a)^n = \cos na + i \sin na \quad \ldots\ldots (1)$$

Men heeft:

$$(\cos na + i \sin na)(\cos(-na) + i \sin(-na) =$$
$$= \cos na \cos(-na) + i^2 \sin na \sin(-na) +$$
$$+ i\{\sin na \cos(-na) + \cos na \sin(-na)\} =$$
$$= \cos(na - na) + i \sin(na - na) = \cos 0 = 1.$$

Ook is:

$$(\cos na + i \sin na)(\cos na + i \sin na)^{-1} = 1,$$

derhalve

$$(\cos na + i \sin na)^{-1} = \cos(-na) + i \sin(-na)$$

of $(\cos a + i \sin a)^{-n} = (\cos na + i \sin na)^{-1} = \cos(-na) +$
$+ i \sin(-na)$ . . . . . (2)

Zoodat de formule (1) ook doorgaat, indien n een geheel negatief getal is.

Wanneer m een geheel positief getal voorstelt, is volgens (1):

$$(\cos \frac{1}{m} a + i \sin \frac{1}{m} a)^m = \cos a + i \sin a;$$

en volgens (1) en (2) is voor alle positieve en negatieve waarden van n:

$$(\cos \frac{n}{m} a + i \sin \frac{n}{m} a)^m = (\cos a + i \sin a)^n;$$

trekt men uit de beide leden der laatste vergelijking den $m$demachtswortel, dan vindt men:

$$(\cos a + i \sin a)^{\frac{n}{m}} = \cos \frac{n}{m} a + i \sin \frac{n}{m} a, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

zoodat nu de formule (1) doorgaat voor alle reëele waarden van den exponent.

Aanmerking. De bovenstaande formules zijn bekend onder den naam van *Theorema* van MOIVRE. Deze schrijver heeft ze in 1730 bekend gemaakt. (*Miscell. anal.* Vergel. BALTZER Elem.) Intusschen is hij de eerste vinder niet geweest. De prioriteit daarvan komt toe aan VIËTA (vergelijk RITTER's vertaling van VIËTA's *Logistique spécieuse*, voorkomende in de Aug. aflevering van het *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche* 1868.)

5. Ingevolge het vorige N°. is:

$$\cos mx + i \sin mx = (\cos x + i \sin x)^m,$$
$$\cos mx - i \sin mx = (\cos x - i \sin x)^m,$$

derhalve heeft men:

$$\cos mx = \frac{(\cos x + i \sin x)^m + (\cos x - i \sin x)^m}{2},$$

$$\sin mx = \frac{(\cos x + i \sin x)^m - (\cos x - i \sin x)^m}{2i}.$$

Ontwikkelt men deze beide formulen volgens het binomium van NEWTON, dan vindt men:

$$\cos mx = (\cos x)^m - \binom{2}{m}(\cos x)^{m-2}\sin^2 x + \binom{4}{m}(\cos x)^{m-4}\sin^4 x - \\ - \binom{6}{m}(\cos x)^{m-6}\sin^6 x + \text{enz.}$$

$$\sin mx = \binom{1}{m}(\cos x)^{m-1}\sin x - \binom{3}{m}(\cos x)^{m-3}(\sin x)^3 + \\ + \binom{5}{m}(\cos x)^{m-5}(\sin x)^5 + \text{enz.}$$

Stelt men hierin $mx = y$, derhalve $m \sin x = \frac{\sin x}{x} y$, dan is in de veronderstelling, dat x klein genoeg is:

$$\binom{1}{m}\sin x = \frac{m}{1} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{y}{m} = \frac{\sin x}{x} \cdot y,$$

$$\binom{2}{m}\sin x = \frac{m(m-1)}{1.\ 2} \cdot \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \left(\frac{y}{m}\right)^2 = \frac{1\left(1-\frac{1}{m}\right)}{1.\ 2.} \cdot \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 y^2$$

$$\binom{3}{m}\sin^3 x = \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3.}\left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{y}{m}\right)^3 =$$

$$= \frac{1\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1.\ 2.\ 3.}\left(\frac{\sin x}{x} \cdot y\right)^3,$$

$$\binom{4}{m}\sin^4 x = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^4 \left(\frac{y}{m}\right)^4 =$$

$$= \frac{1\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\left(1-\frac{3}{m}\right)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^4 y^4$$

$$\binom{5}{m}\sin^5 x = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{y}{m}\right)^5 =$$

$$= \frac{1\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\left(1-\frac{3}{m}\right)\left(1-\frac{4}{m}\right)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot y\right)^5,$$

waaruit voor $m=\infty$, omdat $\frac{\sin\delta}{\delta}=1$ (N°. 1) en $\cos x = \cos\frac{y}{m}$ meer en meer tot de eenheid nadert, onmiddellijk volgt:

$$\left.\begin{aligned} \cos y &= 1-\frac{y^2}{1.2}+\frac{y^4}{1.2.3.4}-\frac{y^6}{1....6}+\text{enz.}\\ \sin y &= y-\frac{y^3}{1.2.3}+\frac{y^5}{1.2.3.4.5}-\frac{y^7}{1....7}+\text{enz.}\end{aligned}\right\}\ldots(M)$$

Om de convergentie van deze reeksen te bepalen, heeft men voor de eerste

$$\frac{t_{n+1}}{t_n}=\frac{\frac{y^{2n}}{1.2.....2n}}{\frac{y^{2(n-1)}}{1.2....(2n-2)}}=\frac{y^2}{2n}$$

en daar deze waarde voor toenemende waarden van n steeds kleiner blijft dan 1, is de reeks voor alle positieve en negatieve waarden van y convergent.

Voor de tweede reeks vindt men eene dergelijke uitkomst.

Aanmerking. Wij hebben in dit N°. de formules gevonden, die dezelfde zijn, als die welke wij in N°. 3 gevonden hebben, en waardoor *cos y* en *sin y* uitgedrukt zijn in functie van den boog. Deze afleiding uit het theorema van VIËTA schijnt het eerst door EULER gevonden te zijn.

6. *Wanneer gegeven is:*

$$x = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5 + \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

waarin a, b, c, d, e, ... constant zijn, vraagt men de waarde van y uit te drukken in x.

Veronderstellen wij, dat

$$y = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots\ldots,$$

waarin A, B, C, D, ... onbepaalde coëfficiënten zijn, die nog nader moeten bepaald worden, dan is ook

$$\begin{aligned}
y^2 = {} & A^2x^2 + 2ABx^3 + 2ACx^4 + 2ADx^5 + \ldots\ldots \\
& \qquad + B^2x^4 + 2BCx^5 + \ldots\ldots \\
y^3 = {} & A^3x^3 + 3A^2Bx^4 + 3A^2Cx^5 + \ldots\ldots \\
& \qquad + 3AB^2x^5 + \ldots\ldots \\
y^4 = {} & A^4x^4 + 4A^3Bx^5 + \ldots\ldots \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Deze waarden overbrengende in (1) vinden wij:

$$x = \left\{\begin{aligned}
& aAx + aBx^2 + aCx^3 + aDx^4 + AEx^5 + \ldots \\
& \quad + bA^2x^2 + 2bABx^3 + 2bACx^4 + 2bADx^5 + \ldots \\
& \qquad + bB^2x^4 + 2bBCx^5 + \ldots \\
& \quad + cA^3x^3 + 3cABx^4 + 3cA^2Cx^5 + \ldots \\
& \qquad + 3cAB^2x^5 + \ldots \\
& \quad + dA^4x^4 + 4dA^3Bx^5 + \ldots \\
& \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

Brengt men nu nog het eerste lid der vergelijking over in het tweede, dan heeft men:

$$0 = x(aA - 1) + x^2(aB + bA^2) + x^3(aC + 2bAB + cA^3) + \ldots$$

welke vergelijking waar moetende zijn voor alle waarden van x, aanleiding geeft tot de vergelijkingen:

$$aA - 1 = 0,\ aB + bA^2 = 0,\ aC + 2bAB + cA^3 = 0, \ldots.$$

waaruit na behoorlijke herleiding gevonden wordt:

$$\begin{aligned}
y = {} & \frac{1}{a}x \\
& - \frac{b}{a^3}x^2 \\
& + \frac{1}{a^5}(2b^2 - ac)x^3 \\
& + \frac{1}{a^7}(-5b^3 + 5abc - a^2d)x^4 \\
& + \frac{1}{a^9}(14b^4 - 21ab^2c + 6a^2bd + 3a^2c^2 - a^3e)x^5 \\
& + \frac{1}{11}(-42b^5 + 84ab^3c - 28a^2b^2d - 28a^2bc^2 + 7a^3be + \\
& \qquad + 7a^3cd - a^4f)x^6 + \text{enz.}
\end{aligned}$$

Aanmerking. De bewerking, die wij in dit N°. verricht hebben, is bekend onder den naam van *omkeeren eener reeks.* De door ons gevondene formule is algemeen en voor het eerst nauwkeurig berekend tot in 9 termen door PHILIPPUS RUBBIANI, die zich door herhaalde proeven van de juistheid zijner berekeningen overtuigd heeft. — Een en ander is te vinden in de *Trigonométrie rectiligne et sphérique, par* ANTOINE CAGNOLI, *trad. de l'italien par* N. M. CHOMPRÉ, p. 44 sqq.

7. Laat op eene of andere wijze gevonden zijn: *)

$$x = \sin x + \frac{\sin^3 x}{2\,3} + \frac{3\sin^5 x}{2.4.5} + \frac{3.5\sin^7 x}{2.4.6.7} + \frac{3.5.7\sin^9 x}{2.4.6.8.9} + \text{enz.}$$

dan heeft men, indien deze reeks met de reeks

$$x = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5 + \text{enz.}$$

vergeleken wordt:

$$A = \frac{1}{a}$$

$$B = -\frac{b}{a^3} \text{ maar omdat } b = 0, \text{ ook } B = 0$$

$$C = \frac{2b^2 - ac}{a^5} \text{ maar } b = 0, \quad C = -\frac{c}{a^4}$$

$$D = \frac{5b^3 + 5abc - a^4 d}{a^7}, \text{ maar } b = d = 0, \text{ dus } D = 0$$

---

*) Eene zeer eenvoudige berekening van de opgegeven reeks is de volgende:

In elk werk over de differentiaalrekening vindt men:

$$d \sin x = \cos x \, dx,$$

derhalve:

$$dx = \frac{d \sin x}{\cos x} = d \sin x (1 - \sin^2 x)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$d \sin x \left(1 + \tfrac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1.3}{2\,4}\sin^4 x + \frac{1.2.3}{2.4.6}\sin^6 x + \ldots\right)$$

Wanneer men nu deze reeks term voor term integreert, vindt men onmiddellijk:

$$x = \sin x + \frac{\sin^3 x}{2.3} + \frac{3\sin^5 x}{2.4.5} + \frac{3.5\,\sin^7 x}{2.4.6.7} + \text{enz.}$$

en zoo voortgaande:

$$E = \frac{3c^2 - ae}{a^7},\ F = 0;\ G = \text{enz.};$$

maar $a = 1$, $c = \frac{1}{2.3}$, $e = \frac{3}{2.4.5}$, $g = \frac{3.5}{2.4.6.7}$, enz.,

zoodat, omdat $y = \sin x$ en $x = \text{boog sin } y$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \frac{x^7}{2.3.4.5.6.7} + \frac{x^9}{1....9} - \text{enz.} \quad \text{(M)}$$

zoodat wij wederom op de reeds gevondene reeks teruggekomen zijn.

Aanmerking. De boven gevonden reeks kan nog op verscheidene andere wijzen gevonden worden: bijv. door de reeks van MAC LAURIN; door de stelling van PYTHAGORAS tot punt van uitgang te nemen, enz. Ik acht intusschen het boven aangehaalde voldoende en verwijs voor het overige naar de meeste werken over de diff. en int. rek. en naar BALTZER's *El.* 148.

8. In N°. 4 is bewezen, dat

$$(\cos x + i \sin x)^m = \cos mx + i \sin mx.$$

Derhalve is

$$\cos mx + i \sin mx = (\cos x + i \sin x)^m =$$

$$\cos^m x - \binom{2}{m} \cos^{m-2} x \sin^2 x + \binom{4}{m} \cos^{m-4} x \sin^4 x - \ldots\ldots$$

$$+ i \left\{ \binom{1}{m} \cos^{m-1} x \sin x - \binom{3}{m} \cos^{m-3} x \sin^3 x + \binom{5}{m} \cos^{m-5} x \sin^5 x - \ldots \right\};$$

en omdat de imaginaire en de reëele gedeelten respectievelijk aan elkander gelijk moeten zijn:

$$\cos mx = \cos^m x - \binom{2}{m} \cos^{m-2} x \sin^2 x + \binom{4}{m} \cos^{m-4} x \sin^4 x - \ldots\ldots (1)$$

$$\sin mx = \binom{1}{m} \cos^{m-1} x \sin x - \binom{3}{m} \cos^{m-3} x \sin^3 x + \binom{5}{m} \cos^{m-5} x \sin^5 x - \ldots (2)$$

zijnde dit dezelfde uitkomsten, die wij in N°. 5 eenigszins anders hebben afgeleid.

Na deeling door $\cos^m x$ vindt men:

$$\frac{\cos mx}{\cos^m x} = 1 - \binom{2}{m} \text{tang}^2 x + \binom{4}{m} \text{tang}^4 x - \ldots\ldots\ldots (3)$$

$$\frac{\sin mx}{\cos^m x} = \binom{1}{m} \text{tang } x - \binom{3}{m} \text{tang}^3 x + \binom{5}{m} \text{tang}^5 x - \ldots\ldots (4)$$

Verder is in N°. 4 bewezen, dat

$$\left(cos\,\frac{x}{m} + i\,sin\,\frac{x}{m}\right)^m = cos\,x + i\,sin\,x,$$

derhalve:

$$cos^m\,\frac{x}{m} \cdot \left(1 + i\,tang\,\frac{x}{m}\right)^m = cos\,x + i\,sin\,x$$

en indien wij $\frac{1}{m}$ vervangen door μ, waarin μ eene breuk is, welke de eenheid tot teller en een willekeurigen noemer heeft

$$cos^{\frac{1}{\mu}}\mu x \,.\, (1 + i\,tang\,\mu x)^{\frac{1}{\mu}} = cos\,x + i\,sin\,x \,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (5)$$

Wanneer in deze vergelijking m voortdurend aangroeit, dan neemt μ af; voor $m = \infty$ is $\mu = 0$. Nu is:

$$(cos\,\mu x)^{\frac{1}{\mu}} = (1 - sin^2\mu x)^{\frac{1}{2\mu}} = \left\{[1 - sin^2\mu x]^{\frac{1}{sin^2\mu x}}\right\}^{\frac{sin\mu x}{\mu x} \cdot \frac{x\,sin\mu x}{2}},$$

en volgens § 23, N°. 1, A *), voor toenemende waarden van m, dus voor afnemende waarden van μ:

$$lim\,(1 - sin^2\mu x)^{\frac{1}{sin^2\mu x}} = \frac{1}{e},$$

$$lim\,\frac{sin\,\mu x}{\mu x} = 1.$$

Volgens N°. 1:

$$lim\,\frac{x\,sin\,\mu x}{2} = 0,$$

derhalve $lim\,(cos\,\mu x)^{\frac{1}{\mu}} = \left(\frac{1}{e}\right)^0 = 1$ voor toenemende waarden van m.

---

*) Voor hen, die dit niet onmiddellijk inzien, diene de volgende herleiding. Stel $sin^2\,\mu x$ voor afnemende waarden van $\mu = \delta$ en $\delta = \frac{1}{y}$, waarin y steeds toeneemt, dan heeft men:

$$(1 - sin^2\mu x)^{\frac{1}{sin^2\mu x}} = \left(1 - \frac{1}{y}\right)^y = \left(\frac{y-1}{y}\right)^y = \left\{\left(\frac{y}{y-1}\right)^y\right\}^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Verder is:

$$(1+i\,tang\,\mu x)^{\frac{1}{\mu}} = \left\{(1+i\,tang\,\mu x)^{\frac{1}{i\,tang\,\mu x}}\right\}^{\frac{tang\,\mu x}{\mu x}.\,xi}$$

en voor toenemende waarden van m:

$$lim\,(1+i\,tang\,\mu x)^{\frac{1}{i\,tang\,\mu x}} = e\,,$$

$$lim\,\frac{tang\,\mu x}{\mu x} = 1\,,$$

derhalve:

$$lim\,(1+i\,tang\,\mu x)^{\frac{1}{\mu}} = e^{xi}\,,$$

waaruit eindelijk volgt:

$$cos\,x + i\,sin\,x = e^{xi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Deze formule geldt voor alle waarden van x, evenzeer als de formules, waaruit zij is afgeleid; derhalve heeft men nog, omdat $cos\,(-x) = cos\,x$ en $sin\,(-x) = -\,sin\,x$:

$$cos\,x - i\,sin\,x = e^{-xi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

waaruit door optelling en aftrekking volgt:

$$cos\,x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

$$sin\,x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Aanmerking. Het is van belang op te merken, hoe door de laatste formules, door middel der imaginaire getallen het verband wordt aangewezen tusschen de goniometrische en exponentiale functiën. Men kan overigens de formules (8) en (9) vergelijken met de formules (C) en (D), voorkomende in N°. 10 der vorige §.

9. Uit de formules (M) van N°. 3 volgt onmiddellijk:

$$tang\,x = \frac{sin\,x}{cos\,x} = x \times \frac{1 - \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4.5} - \text{enz.}}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \text{enz.}}\,;$$

en dewijl de reeks, die door deeling dezer beide reeksen ont-

staan zal, slechts oneven machten van x bevatten kan, stellen wij:

$$tang\, x = x + Ax^3 + Bx^5 + Cx^7 + \text{enz.};$$

derhalve na ontwikkeling:

$$\left.\begin{array}{l} x + Ax^3 + Bx^5 + Cx^7 + \ldots\ldots \\ -\frac{x^3}{2} - \frac{Ax^5}{2} - \frac{Bx^7}{2} \ldots\ldots \\ +\frac{x^5}{2.3.4} + \frac{Ax^7}{2.3.4} \ldots\ldots \\ -\frac{x^7}{2.3.4.5.6} \ldots\ldots \end{array}\right\} = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \frac{x^7}{2\ldots7} - \text{enz.}$$

Hieruit volgt:

$$A - \tfrac{1}{2} = -\frac{1}{2\,3}$$

$$B - \tfrac{1}{2}A + \frac{1}{2.3.4} = \frac{1}{2.3.4.5}$$

$$C - \tfrac{1}{2}B + \frac{1}{2.3.4}A - \frac{1}{2\ldots6} = -\frac{1}{2.3.4.5.6.7},$$

enz.

waaruit na behoorlijke herleiding wordt afgeleid:

$$A = \tfrac{1}{3},\ B = \frac{2}{3.5},\ C = \frac{17}{3^2.5.7},\ \text{enz.};$$

zoodat men eindelijk heeft:

$$tang\, x = x + \tfrac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3.5}x^5 + \frac{17}{3^2.5.7}x^7 + \text{enz.} \quad \ldots \quad (10)$$

Op dergelijke wijze handelende, kan men nog gemakkelijk vinden:

$$cot\, x = \frac{cos\, x}{sin\, x} = \frac{1}{x} - \tfrac{1}{3}x - \frac{1}{3^2.5}x^3 - \frac{2}{3^3.5.7}x^5 - \ldots (11)$$

$$sec\, x = \frac{1}{cos\, x} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{2.4} + \frac{61x^6}{2^2.3^2.4.5} + \ldots\ldots (12)$$

$$cosec\, x = \frac{1}{sin\, x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2.3}x + \frac{7}{2.3^2.4.5}x^3 + \ldots\ldots (13)$$

Aanmerking. Met het bovenstaande kan men vergelijken de toepassing van de reeks van MAC LAURIN. Zie o. a. BADON GHYBEN *Diff. en int.* p. 188. GRUNERT *Suppl.* i. v. *Cyclométrie* e. a.

10. Het theorema van VIËTA (zie N°. 4) vindt eene groote toepassing bij 't oplossen van zuivere vergelijkingen. Wij hebben reeds vroeger gezien, dat elke vergelijking van de gedaante

$$Ax^n \mp B = 0,$$

door $x = y\sqrt[n]{\frac{B}{A}}$ te stellen, overgaat in

$$y^n \mp 1 = 0,$$

en dat de oplossing van zoodanige vergelijking zich bepaalt tot het trekken van de n n^{de}-machtswortels uit de eenheid.

Om hiervoor eene algemeene methode op te sporen, stellen wij in de vergelijking

$$(\cos\varphi \pm i \sin\varphi)^n - \cos n\varphi \mp i \sin n\varphi = 0,$$

$n\varphi = 2k\pi$, waarin k een willekeurig geheel positief getal voorstelt, dan is

$$\varphi = \frac{2k\pi}{n},\ \cos n\varphi = 1,\ \sin n\varphi = 0,$$

zoodat men heeft:

$$\left(\cos\frac{2k\pi}{n} \pm i \sin\frac{2k\pi}{n}\right)^n - 1 = 0,$$

of

$$\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} \pm i \sin\frac{2k\pi}{n} \ldots\ldots\ldots (A)$$

Door in deze formule k achtereenvolgens gelijk te stellen aan $0, 1, 2, 3, \ldots\ldots \frac{n}{2}$ of $\frac{n-1}{2}$, naar gelang n even of oneven is, vindt men de n waarden, die de n n^{de}-machtswortels uit de eenheid voorstellen, te weten:

$$\cos 0 \pm i \sin 0 = 1,$$

$$\cos\frac{2\pi}{n} \pm i \sin\frac{2\pi}{n},$$

$$\cos\frac{4\pi}{n} \pm i \sin\frac{4\pi}{n},$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\cos\pi \pm i \sin\pi = -1 \ldots\ldots \text{voor } n \text{ even};$$

$$\cos\frac{(n-1)\pi}{n} \pm i \sin\frac{(n-1)\pi}{n} \ldots\ldots \text{voor } n \text{ oneven.}$$

11. Wij hebben in het vorige nummer k als een willekeurig geheel positief getal aangenomen en daarna aan k slechts $\frac{n}{2}$ of $\frac{n-1}{2}$ waarden toegekend, om de n wortels der vergelijking te vinden; het blijft ons nu nog over te betoogen, dat wanneer men aan k waarden toekent, grooter dan $\frac{n}{2}$ of $\frac{n-1}{2}$, de reeds gevondene wortels weder zullen terug keeren. In de eerste plaats volgt uit het algemeen betoogde theorema (§ 5, N°. 8), dat eene vergelijking van den n^{den} graad slechts n wortels kan hebben, zoodat men na n verschillende waarden gevonden te hebben, noodzakelijk weder op reeds gevondene waarden moet terug komen; in de tweede plaats kan het nog rechtstreeks bewezen worden op de volgende wijze.

Zij k' een geheel positief getal en nemen wij k voor 't geval, dat n even is, gelijk aan $\frac{n}{2}+k'$, dan heeft men:

$$\frac{2k\pi}{n}=\frac{n+2k'}{n}\pi=\frac{2n-(n-2k')}{n}\pi=2\pi-\frac{n-2k'}{n}\pi.$$

Voor 't geval, dat n oneven is, nemen wij $k=\frac{n-1}{2}+k'$, dan is:

$$\frac{2k\pi}{n}=\frac{n-1+2k'}{n}\pi=\frac{2n-n-1+2k'}{n}\pi=2\pi-\frac{n+1-2k'}{n}\pi.$$

Neemt men nu nog in aanmerking, dat $cos(2\pi-\alpha)=cos\,\alpha$ en $sin(2\pi-\alpha)=-sin\,\alpha$, dan heeft men:

$$\left.\begin{aligned} cos\frac{n+2k'}{n}\pi \pm i\,sin\frac{n+2k'}{n}\pi &= cos\frac{n-2k'}{n}\pi \mp i\,sin\frac{n-2k'}{n}\pi \\ cos\frac{n-1+2k'}{n}\pi \pm i\,sin\frac{n-1+2k'}{n}\pi &= cos\frac{n+1-2k'}{n}\pi \mp i\,sin\frac{n+1-2k'}{n}\pi \end{aligned}\right\}(1)$$

neemt men dus $k>\frac{n}{2}$ of $k>\frac{n-1}{2}$, dan komt men op reeds vroeger gevonden wortels terug en wel zoodanig, dat door k' achtereenvolgens gelijk te stellen aan 1, 2, 3, ... de wortels in eene orde terug keeren, die juist de omgekeerde is van de volgorde, welke wij in N°. 10 gevonden hebben.

Opmerking verdient ook nog de volgende

Stelling. *Wanneer r een wortel is van de vergelijking* $y^n - 1 = 0$, *dan is elke willekeurige positieve of negatieve geheele macht van r een wortel van die vergelijking.*

Bewijs. Alle wortels van de opgegeven vergelijking zijn volgens het voorafgaande begrepen in den vorm

$$\cos\frac{2k\pi}{n} \pm i \sin\frac{2k\pi}{n}.$$

Nu is

$$\left(\cos\frac{2k\pi}{n} \pm i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)^m = \cos\frac{2km\pi}{n} \pm i\sin\frac{2km\pi}{n};$$

$$\left(\cos\frac{2k\pi}{n} \pm i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)^{-m} = \cos -\frac{2km\pi}{n} \pm i\sin -\frac{2km\pi}{n} =$$

$$= \cos\frac{2km\pi}{n} \mp i\sin\frac{2km\pi}{n}.$$

Is nu $km \leqq \frac{n-1}{2}$ of $\frac{n}{2}$, dan vindt men een wortel der vergelijking, volgens N°. 10, en is $km > \frac{n-1}{2}$ of $\frac{n}{2}$, dan vindt men een wortel volgens N°. 11; de stelling is hiermede dus bewezen.

12. Om de wortels op te sporen van de vergelijking $y^n+1=0$, nemen wij wederom

$$\cos n\varphi \pm i \sin n\varphi = (\cos\varphi \pm i\sin\varphi)^n$$

en stellen daarin $n\varphi = (2k+1)\pi$, dan is:

$$\varphi = \frac{2k+1}{n}\pi,\ \cos(2k+1)\pi = -1 \text{ en } \sin(2k+1)\pi = 0;$$

derhalve:

$$-1 = (\cos\varphi \pm i\sin\varphi)^n, \text{ waarin } \varphi = \frac{2k+1}{n}\pi,$$

en

$$\sqrt[n]{-1} = \cos\frac{2k+1}{n}\pi \pm i\sin\frac{2k+1}{n}\pi.$$

Hierin k achtereenvolgens gelijk stellende aan 0, 1, 2, 3...., vindt men voor de wortels der vergelijking:

$$\cos\frac{\pi}{n} \pm i\sin\frac{\pi}{n},$$

$$\cos\frac{3\pi}{n} \pm i\sin\frac{3\pi}{n},$$

. . . . . .

$\cos\pi \pm i\sin\pi = -1$, voor n oneven;

$\cos\frac{n+1}{n}\pi \pm i\sin\frac{n+1}{n}\pi$, voor n even.

Zoodra wij k grooter nemen dan $\frac{n-1}{2}$ of $\frac{n}{2}$ keeren, gelijk wij in N°. 11 gezien hebben, ook de wortels dezer vergelijking in omgekeerde volgorde terug.

13. Stelling. *Indien r een wortel is van de vergelijking* $y^n + 1 = 0$, *dan zal elke oneven positieve of negatieve macht van dien wortel ook een wortel zijn van de opgegeven vergelijking.*

Bewijs. Alle wortels van de opgegeven vergelijking zijn begrepen in den vorm

$$\cos\frac{2k+1}{n}\pi \pm i\sin\frac{2k+1}{n}\pi,$$

waarin voor k alle mogelijke geheele positieve waarden voldoen, zoodat $2k+1$ immer oneven blijft.

Nu is

$$\left(\cos\frac{2k+1}{n}\pi \pm i\sin\frac{2k+1}{n}\pi\right)^{2m+1} =$$

$$= \cos\frac{(2m+1)(2k+1)}{n}\pi \pm i\sin\frac{(2m+1)(2k+1)}{n}\pi$$

en $$\left(\cos\frac{2k+1}{n}\pi \pm i\sin\frac{2k+1}{n}\pi\right)^{-(2m+1)} =$$

$$= \cos\frac{(2m+1)(2k+1)}{n}\pi \mp i\sin\frac{(2m+1)(2k+1)}{n}\pi,$$

en dewijl het product van twee oneven getallen $2m+1$ en $2k+1$ weder oneven is, is hierdoor het gestelde bewezen.

14. Het is hier de plaats om terug te komen op de ontwikkeling van een rationeel gebroken in eene wederkeerige reeks, in geval de noemer van dat gebroken niet ontbonden kan worden in reëele eerste-machtsfactoren.

De gebrokens hebben in dat geval de gedaante

$$\frac{A+Bx}{a+bx+cx^2} = \frac{A'+B'x}{\frac{a}{c}+\frac{b}{c}x+x^2}.$$

Stellen wij nu verder:

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}x+x^2 = p^2+2px\times\cos\varphi+x^2,$$

dan is $p = \pm\sqrt{\frac{a}{c}}$ en $\cos\varphi = \frac{b}{2pc}$.

Dewijl $a+bx+cx^2$ niet in reëele factoren ontbonden kan worden, is $b^2 < 4ac$, zoodat

$$\frac{b^2}{4ac} = \left(\frac{b}{2c\sqrt{\frac{a}{c}}}\right)^2 = \left(\frac{b}{2pc}\right)^2$$ steeds kleiner is dan één.

Stelt men nu verder

$$x^2+2px\cos\varphi+p^2 = 0,$$

dan vindt men:

$$x = -p\cos\varphi \pm \sqrt{p^2(\cos^2\varphi-1)} = -p\cos\varphi \pm pi\sin\varphi,$$

zoodat men eindelijk heeft:

$$\frac{A'+B'x}{\frac{a}{c}+\frac{b}{c}x+x^2} = \frac{P}{p\cos\varphi-pi\sin\varphi+x} - \frac{Q}{p\cos\varphi+pi\sin\varphi+x}$$

$$= \frac{A'-B'(p\cos\varphi-pi\sin\varphi)}{2pi\sin\varphi} - \frac{A'-B'(p\cos\varphi+pi\sin\varphi)}{2pi\sin\varphi} =$$

$$= P(p\cos\varphi-pi\sin\varphi+x)^{-1} - Q(p\cos\varphi+pi\sin\varphi+x)^{-1}.$$

Ontwikkelt men de hier uitgedrukte machten volgens het binomium van NEWTON, dan vindt men voor den $(n+1)^{\text{den}}$ term dezer ontwikkeling:

$$\pm\left[\frac{P}{p^{n+1}}\left\{\cos(n+1)\varphi+i\sin(n+1)\varphi\right\} - \right.$$

$$\left. - \frac{Q}{p^{n+1}}\left\{\cos(n+1)\varphi-i\sin(n+1)\varphi\right\}\right] =$$

$$= \pm\left[\frac{P-Q}{p^{n+1}}\cos(n+1)\varphi+\frac{P+Q}{p^{n+1}}i\sin(n+1)\varphi\right],$$

waarin *plus* of *min* gebruikt moet worden, naar gelang n even of oneven is.

Nu is verder:

$$P - Q = B'$$

$$\text{en } P + Q = \frac{A' - B' p \cos \varphi}{p i \sin \varphi},$$

zoodat de n^{de} term der ontwikkeling reëel is.

Stelt men in dezen algemeenen term n achtereenvolgens gelijk aan 1, 2, 3....., dan vindt men de begeerde wederkeerige reeks.

15. In § 3 hebben wij eenige eigenschappen der imaginaire getallen leeren kennen. In het vierde N°. dier paragraaf komt eene stelling voor, luidende: *alle sommen, verschillen, producten, machten en quotiënten van imaginaire vormen van de gedaante* $a + ib$ *kunnen weder tot de gedaante* $A + iB$ *herleid worden.* Wij willen aan deze stelling thans nog eene aanzienlijke uitbreiding geven.

De vorm $a + ib$ kan altijd herleid worden tot de gedaante $\varrho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$; daartoe heeft men volgens § 3, 3:

$$\varrho \cos \varphi = a \quad \text{en} \quad \varrho \sin \varphi = b,$$

dus $\quad tang\, \varphi = \frac{b}{a}$, $\varrho^2(1 - \sin^2 \varphi) = a^2$, $\varrho^2 \sin^2 \varphi = b^2$

en $\varrho = \sqrt{(a^2 + b^2)}$, $\varphi = boog\, sin \frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$ en $\varphi = boog\, tang \frac{b}{a}$.

Volgens § 8, 2 is ϱ dus de modulus van den imaginairen vorm $a + ib$.

Volgens N°. 8, (6) en (7) is

$$e^{\pm xi} = \cos x \pm i \sin x,$$

of wat hetzelfde is:

$$e^{\pm \varphi i} = \cos \varphi \pm i \sin \varphi;$$

derhalve:

$$^e log(\cos \varphi \pm i \sin \varphi) = \pm \varphi i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Nu is $\quad ^e log(a \pm ib) = {}^e log\, \varrho\, (\cos \varphi \pm i \sin \varphi)$

$$= {}^e log\, \varrho + {}^e log\, (\cos \varphi \pm i \sin \varphi) =$$

$$= {}^e log \sqrt{(a^2 + b^2)} \pm \varphi i = A \pm iB \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Door van de beide leden den logarithmus te nemen, ziet men de juistheid van de vergelijking

$$(a+ib)^{a+ib} = e^{(a+ib)\,{}^e\!log(a+ib)}.$$

Hiervoor kan men schrijven:

$$(a+ib)^{a+ib} = e^{(a+ib)\,({}^e\!log\,\varrho + \varphi i)} =$$

$$= e^{a\,{}^e\!log\,\varrho - b\varphi} \times e^{(a\varphi + b\,{}^e\!log\,\varrho)i} =$$

$$= e^{a\,{}^e\!log\,\varrho - b\varphi}\Big\{cos\,(a\varphi + b\,{}^e\!log\,\varrho) + i\,sin\,(a\varphi + b\,{}^e\!log\,\varrho\Big\} =$$

$$= A + iB \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Gaat men over tot de goniometrische formulen, dan vindt men:

$$sin\,(a+bi) = sin\,a\,cos\,(bi) + sin\,(bi)\,cos\,a\,;$$

maar

$$sin\,(bi) = \frac{e^{-b} - e^{b}}{2i},$$

$$cos\,(bi) = \frac{e^{b} + e^{-b}}{2}, \qquad (\text{N}^{\text{o}}.\,8:(8),\ (9))$$

derhalve:

$$sin\,(a+bi) = sin\,a \times \frac{e^{b}+e^{-b}}{2} + cos\,a\,\frac{e^{b}-e^{-b}}{2}\,i$$

$$= A + iB \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Op dergelijke wijze handelende, vindt men de waarde van $cos\,(a+bi)$, waaruit de waarden van $tang\,(a+bi)$, $cot(a+bi)$, $sec\,(a+bi)$ en $cosec\,(a+bi)$ zeer gemakkelijk worden afgeleid. Dit wordt aan den Lezer overgelaten.

Wij hebben gevonden:

$$e^{\varphi i} = cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi.$$

Stellen wij hierin $x = cos\,\varphi$ of $\varphi = boog\,cos\,x$ en $sin\,\varphi = \sqrt{(1-x^2)}$, dan is:

$$e^{i\,boog\,cos\,x} = x + i\sqrt{(1-x^2)};$$

van de beide leden dezer vergelijking den ${}^e\!log$ nemende:

$$i\,boog\,cos\,x = {}^e\!log\,\{x + i\sqrt{(1-x^2)}\}.$$

Stellen wij verder $x = a + bi$, dan heeft men:

$$i\,boog\,cos\,(a+bi) = {}^{e}log\,\{a+bi+i\sqrt{(1-a^2-2abi+b^2)}\}\;..(\alpha)$$
$$= {}^{e}log\,\{a+bi+i\,(A'+B'i)\}$$
$$= {}^{e}log\,\{A''+B''i\} = A'''+B'''i;$$

derhalve:

$$boog\,cos\,(a+bi) = B''' + \frac{A'''}{i} = A + iB \;.\;.\;.\;. \quad (5)$$

Door de vorenstaande herleidingen, die men gemakkelijk nog met een aantal andere herleidingen vermeerderen kan, ziet men ten duidelijkste, dat de herleiding van eenige imaginaire uitdrukking tot den grondvorm $A + iB$ algemeen is. Ik twijfel niet, of de Lezer zal door het voorgaande in staat gesteld zijn, in alle gevallen den juisten weg te volgen. *) Bovendien blijkt ook wederom uit dit N°. het verband tusschen goniometrische, logarithmische en cyclometrische functiën.

16. Nemen wij thans weder de formule (5) van het vorige N°. en daaruit de vergelijking (α).

$$i\,boog\,cos\,(a+bi) = {}^{e}log\,\{(a+bi+i\sqrt{(1-a^2-2abi+b^2)}\}$$

en stellen wij daarin $b = 0$, dan gaat deze vergelijking over in:

$$i\,boog\,cos\,a = {}^{e}log\,\{a+i\sqrt{(1-a^2)}\}.$$

Stellen wij hierin $a = +1$ en $a = -1$, dan volgt daaruit:

$$i\,boog\,cos\,(+1) = {}^{e}log\,(+1)$$
$$i\,boog\,cos\,(-1) = {}^{e}log\,(-1).$$

---

*) Wij hebben vroeger gevonden:

$$cos\,x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \text{ en } i\,sin\,x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2},$$

derhalve:

$$cos\,x + i\,sin\,x = e^{ix} \text{ en } cos\,x - i\,sin\,x = e^{-ix};$$

dewijl nu altijd gesteld kan worden:

$$A + iB = \varrho\,(cos\,x + i\,sin\,x) = \varrho \times e^{ix},$$

en ϱ eene positieve reëele waarde heeft, kan men elken vorm van de gedaante $A + iB$ herleiden tot het product van een reëelen factor met eene imaginaire macht van e.

Indien nu k een geheel positief getal is, is

$cos(\pm 2k\pi) = 1$, derhalve $\pm 2k\pi = boog(cos + 1)$

$cos \pm (2k+1)\pi = -1$, derhalve $\pm(2k+1)\pi = boog\, cos(-1)$;

zoodat:

$$^e log(+1) = \pm 2k\pi i\,;\quad ^e log(-1) = \pm(2k+1)\pi i.$$

En omdat in het algemeen $^e log\, a = {}^e log\, a + {}^e log\, 1$:

$$^e log\, a = {}^e log\, a \pm 2\, k\pi i$$

$$^e log - a = {}^e log\, a \pm (2k+1)\,\pi i\,,$$

waaruit men ziet, *dat ieder logarithmus oneindig vele waarden heeft, die allen van de gedaante* $A \pm iB$ *zijn, uitgezonderd één, namelijk log* a, *in het geval dat* $k = 0$ *is.*

Een ander bewijs voor deze belangrijke stelling is het volgende: Volgens N°. 15 (2) heeft men:

$$^e log\,(a + bi) = \tfrac{1}{2}\, ^e log\,(a^2 + b^2) + i\, boog\, cos\, \frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$$

$$= \tfrac{1}{2}\, ^e log\,(a^2 + b^2) + i\, boog\, sin\, \frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}},$$

waarin $\sqrt{(a^2+b^2)}$ altijd positief genomen wordt, zoodat de teekens van den cosinus en sinus van a en b afhangen. Nemen wij nu verder voor de bogen de absoluut kleinsten, dan is, indien a positief is, zulks ook het geval met den cosinus, zoodat het teeken van den tangens afhangt van den sinus en men heeft:

$$boog\, cos\, \frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}} = boog\, tang\, \frac{b}{a}.$$

Is echter a, en dus ook de cosinus, negatief, dan heeft de tangens het tegengestelde teeken van den sinus en bijgevolg:

$$boog\, cos\, \frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}} = \pi + boog\, tang\, \frac{b}{a}.$$

Maar, omdat men ook heeft:

$$boog\, cos\, \frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}} = boog\, cos\, \frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}} \pm 2k\pi\,,$$

is voor positieve waarden van a:

$$^e log\,(a+ib) = \tfrac{1}{2}\, ^e log\,(a^2+b^2) + i\, boog\, tang\, \frac{b}{a} \pm 2k\pi i \ldots\ldots (\beta)$$

en voor negatieve waarden van a:

$$^{e}log\,(a+ib) = \tfrac{1}{2}\,^{e}log\,(a^2+b^2) + i\,boog\,tang\,\frac{b}{a} \pm (2k+1)\,\pi i,$$

waarin k alle mogelijke geheele positieve waarden kan verkrijgen.

Stelt men hierin nu $b = 0$, dan vindt men voor a positief:

$$elog\,a = {}^{e}log\,a \pm 2k\pi i;$$

en voor a negatief:

$$^{e}log\,a = {}^{e}log\,(-a) \pm (2k+1)\pi i,$$

omdat $\frac{1}{2}\,^{e}log\,(-a)^2 = {}^{e}log\,-a$; zoodat men nu dezelfde stelling van zooëven bewezen heeft.

17. Stelt men in de vergelijking (β) $a = 0$ en $b = 1$, dan heeft men:

$$^{e}log\,i = \tfrac{1}{2}\,elog\,1 + i\,boog\,tang\,\infty \pm 2k\pi.$$

Neemt men verder $k = 0$, dan is omdat $boog\,tang\,\infty = \frac{1}{2}\pi$ en $^{e}log\,1 = 0$,

$$^{e}log\,i = \tfrac{1}{2}\,\pi i \text{ en } \pi = \frac{2\,^{e}log\,i}{i}.$$

Uit deze laatste formule volgt nog:

$$\tfrac{1}{2}\,\pi = \frac{^{e}log\,i}{i} = {}^{e}log\,i^{\frac{1}{i}} \text{ of } e^{\frac{1}{2}\pi} = i^{\frac{1}{i}} \text{ d. i. } e^{-\frac{1}{2}\pi} = i^{i}.$$

Met behulp van de formule van N°. 7 der vorige § heeft men:

$$i^{\frac{1}{i}} = e^{\frac{1}{2}\pi} = 1 + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{1.2.4} + \frac{\pi^3}{1.2.3.8} + \ldots \frac{\pi^k}{1.2\ldots.k \times 2^k}$$

$$i^{i} = e^{-\frac{1}{2}\pi} = 1 - \tfrac{1}{2}\pi + \frac{\pi^2}{1.2.4} - \frac{\pi^3}{1.2.3.8} + \ldots \pm \frac{\pi^k}{1.2\ldots k \times 2^k}$$

waaruit gevonden wordt $i^{i} = 0{,}207879\ldots$ en $i^{-i} = 4{,}81049\ldots\ldots$

Aanmerkingen. Het eerste bewijs van de stelling, dat de logarithmen van eenig getal een oneindig aantal waarden hebben, is van GRUNERT; het tweede van CAUCHY, *Cours d'Analyse de l'école polyt.* T. I. Vergelijk ook RÉSUMÉS *Analytiques par* M. AUGUSTIN LOUIS CAUCHY, 5me Livr. Turin 1833. De reëele waarden voor de imaginaire machten

van imaginaire getallen zijn gevonden door JULES CHARLES DE FAGNANO en zijn' zoon JEAN FRANÇOIS DE FAGNANO en medegedeeld in het *Journal de littérature helvétique*. (Zie *Historie der Wiskunde door den Heere* MONTUCLA III. Amsterdam 1790.)

18. Wanneer $p_0, p_1, p_2, p_3 \ldots\ldots\ldots$ (1)

$q_0, q_1, q_2, q_3 \ldots\ldots\ldots$ (2)

twee willekeurige reëele reeksen zijn, dan zullen wij in 't algemeen de reeks

$$p_0 + iq_0, p_1 + iq_1, p_2 + iq_2, p_3 + iq_3 \ldots \quad (3)$$

eene imaginaire reeks noemen, welker termen wij willen voorstellen door

$$u_0, u_1, u_2, u_3 \ldots\ldots;$$

zoodat in het algemeen

$$u_n = p_n + iq_n.$$

Zij verder

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots u_{n-1} =$$
$$= p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + \ldots\ldots p_{n-1}$$
$$+ (q_0 + q_1 + q_2 + q_3 + \ldots\ldots q_{n-1})\,i,$$

de som der eerste n termen van de reeks, dan wordt de reeks gezegd convergent te zijn, indien voor toenemende waarden van n, s_n meer en meer nadert tot eene limiet s; nadert zij tot geene limiet, dan is zij divergent. Het eerste heeft klaarblijkelijk plaats, wanneer de reeksen

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + \ldots\ldots$$
$$q_0 + q_1 + q_2 + q_3 + \ldots\ldots$$

voor toenemende waarden van n convergeeren naar bepaalde limieten. Indien deze beide reeksen, of eene van beiden, divergeeren, zal zulks met de geheele reeks het geval zijn.

Wanneer men voor 't geval, dat de reeks convergeert,

$$s = s_n + r_n$$

stelt, dan is r_n de sluitterm, terwijl men den algemeenen term $p_n + iq_n$ kan voorstellen door $\varrho_n (\cos \varphi_n + i \sin \varphi_n)$, waarin ϱ_n een positief getal en φ_n een reëele boog is.

De reeksen (1), (2), (3) gaan nu over in

$$\varrho_0 \cos\varphi_0 , \ \varrho_1 \cos\varphi_1 , \ \varrho_2 \cos\varphi_2 , \ \varrho_3 \cos\varphi_3 \ \ldots\ldots \quad (4)$$

$$\varrho_0 \sin\varphi_0 , \ \varrho_1 \sin\varphi_1 , \ \varrho_2 \sin\varphi_2 , \ \varrho_3 \sin\varphi_3 \ \ldots\ldots \quad (5)$$

$$\varrho_0(\cos\varphi_0 + i\varphi_0), \ \varrho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \ \varrho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \ldots \quad (6)$$

Dewijl nu de getallenwaarde van een sinus of van een cosinus van een reëelen boog nooit grooter kunnen zijn dan 1, zullen de reeksen (4) en (5) convergeeren, indien zulks het geval is met de reeks der moduli. Daaruit volgt onmiddellijk deze

Stelling. *Eene imaginaire reeks zal convergeeren, indien de moduli harer termen eene convergente reeks uitmaken.*

19. Stelling. *Zij L de limiet of de grootste der limieten, waartoe de n^{de}-machtswortel uit den modulus ϱ_n van den n^{den} term u_n voor toenemende waarden van n convergeert, of waartoe de waarde van $\frac{\varrho_{n+1}}{\varrho_n}$ nadert, dan zal de reeks convergeeren voor $L < 1$ en divergeeren voor $L > 1$.*

Bewijs. Is $L < 1$, dan zal volgens § 23, N°. 5 sqq de reeks

$$\varrho_0 , \ \varrho_1 , \ \varrho_2 , \ \varrho_3 \ \ldots\ldots$$

convergeeren; zulks zal dan volgens het vorig N°. ook het geval zijn met de reeksen

$$\varrho_0 \cos\varphi_0 , \ \varrho_1 \cos\varphi_1 , \ \varrho_2 \cos\varphi_2 , \ \varrho_3 \cos\varphi_3 \ \ldots\ldots$$
$$\varrho_0 \sin\varphi_0 , \ \varrho_1 \sin\varphi_1 , \ \varrho_2 \sin\varphi_2 , \ \varrho_3 \sin\varphi_3 \ \ldots\ldots$$

dus ook met de reeks:

$$u_0 , \ u_1 , \ u_2 , \ u_3 , \ u_4 \ldots\ldots$$

Is $L > 1$, dan zal de waarde van den modulus

$$\sqrt[n]{\varrho_n} = \sqrt{(p_n^2 + q_n^2)}$$

voortdurend toenemen en elke limiet overschrijden; de beide waarden p_n, òf q^n, òf een van beide worden grooter dan elk te bepalen getal; eene der reeksen zal dus zeker divergeeren, waardoor de geheele reeks divergent wordt.

20. Wanneer wij thans eene reeks beschouwen, gerangschikt volgens de opklimmende machten van x, bijv.:

$$a_0 , \ a_1 x , \ a_2 x^2 , \ a_3 x^3 , \ a_4 x^4 , \ldots\ldots$$

waarvan a en x beiden imaginair zijn, dan kan men voo . . . algemeenen term schrijven:

$$a_n x^n = \varrho_n(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n) \times \{r(\cos\psi + i\sin\psi)\}^n$$
$$= \varrho_n \times r^n(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n)(\cos n\psi + i\sin n\psi).$$

Stelling. *Indien* $(\varrho_n)^{\frac{1}{n}}$ *de modulus is van* a_n *en voor toenemende waarden van* n *eene limiet* A *nadert, dan zal de reeks convergeeren of divergeeren, naar gelang men heeft:*

$$r < \frac{1}{A} \quad \text{of} \quad r > \frac{1}{A}.$$

Want voor de convergentie wordt vereischt: (§ 23, N°. 5 sqq.)

$$\sqrt[n]{\varrho_n r^n} < 1, \text{ of } \frac{\varrho_{n+1} r^{n+1}}{\varrho_n r^n} < 1;$$

dus
$$r < \frac{1}{\sqrt[n]{\varrho_n}}, \text{ of } r < \frac{1}{\frac{\varrho_{n+1}}{\varrho_n}},$$

d. i.:
$$r < \frac{1}{A}, \text{ enz.}$$

21. Eene der eenvoudigste imaginaire reeksen is de meetkundige

$$1, x, x^2, x^3, \ldots\ldots$$

waarin x imaginair is en bepaald wordt door de vergelijking

$$x = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Neemt men de som van de eerste n termen, dan vindt men

$$s_n = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}.$$

Maar dewijl de modulus van x^n niets anders is, dan de $n$de macht van den modulus van x, zal x^n voor $x < 1$ tot 0, en voor $x > 1$ tot ∞ naderen; is dus $\varrho < 1$, dan is

$$s = \frac{1}{1-x};$$

voor $\varrho > 1$ wordt de reeks divergent.

Indien men in de reeks

$$1, x, \frac{x^2}{1.2}, \frac{x^3}{1.2.3}, \frac{x^4}{1.2.3.4}. \ldots\ldots\ldots \text{(A)}$$

veronderstelt, dat x imaginair wordt, en wel dat men heeft:

$$x = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

dan gaat de reeks over in:

$$\left.\begin{aligned} &1 + \varrho\cos\varphi + \frac{\varrho^2\cos 2\varphi}{1.2} + \frac{\varrho^3\cos 3\varphi}{1.2.3} + \frac{\varrho^4\cos 4\varphi}{1.2.3.4} + \ldots\ldots \\ &+ i\left(\varrho\sin\varphi + \frac{\varrho^2\sin 2\varphi}{1.2} + \frac{\varrho^3\sin 3\varphi}{1.2.3} + \frac{\varrho^4\sin 4\varphi}{1.2.3.4}\right); \ldots\ldots \end{aligned}\right\} \text{(B)}$$

dewijl nu de reeks (A) voor alle mogelijke eindige reëele waarden van x convergeert, volgt daaruit, dat de reeksen van de reeks (B) ook convergeeren en dat dus ook de reeks (B) convergent is voor imaginaire maar eindige waarden van x.

22. Wij willen ons thans bezig houden met het sommeeren van eenige goniometrische reeksen en vragen in de eerste plaats, *de waarde van S in de vergelijking*

$$S = \cos\frac{\pi}{2n+1} - \cos\frac{2\pi}{2n+1} + \cos\frac{3\pi}{2n+1} - \ldots\ldots \pm \cos\frac{n\pi}{2n+1},$$

waarin n een positief geheel getal beteekent.

Het is eene bekende eigenschap der goniometrie, dat

$$\cos(n+1)x + \cos(n-1)x = 2\cos nx\cos x\ ^*).$$

Passen wij deze eigenschap toe op de termen der opgegeven reeks, dan vinden wij achtereenvolgens:

---

*) Bovenstaande eigenschap wordt op de volgende wijze afgeleid:

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b,$$
$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b;$$

door optelling:

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a\cos b.$$

Zij hierin $a + b = x$ en $a - b = y$, dan is:

$$\cos x + \cos y = 2\cos\tfrac{1}{2}(x+y)\cos\tfrac{1}{2}(x-y),$$

en, indien men px voor x en qx voor y stelt:

$$\cos px + \cos qx = 2\cos\tfrac{1}{2}(p+q)x\cos\tfrac{1}{2}(p-q)x;$$

en wanneer men verder p door $n+1$ en q door $n-1$ vervangt:

$$\cos(n+1)x + \cos(n-1)x = 2\cos nx\cos x,$$

of $$\cos(n+1)x = 2\cos nx\cos x - \cos(n-1)x.$$

$$\cos\frac{\pi}{2n+1} = \cos\frac{\pi}{2n+1}$$

$$-\cos\frac{2\pi}{2n+1} = -2\cos\frac{\pi}{2n+1}\cos\frac{\pi}{2n+1} + 1$$

$$\cos\frac{4\pi}{2n+1} = 2\cos\frac{2\pi}{2n+1}\cos\frac{\pi}{2n+1} - \cos\frac{\pi}{2n+1}$$

$$-\cos\frac{4\pi}{2n+1} = -2\cos\frac{3\pi}{2n+1}\cos\frac{\pi}{2n+1} + \cos\frac{2\pi}{2n+1}$$

. . . . . .

$$\pm\cos\frac{n\pi}{2n+1} = \pm 2\cos\frac{(n-1)\pi}{2n+1}\cos\frac{\pi}{2n+1} \mp \cos\frac{(n-2)\pi}{2n+1},$$

waaruit door optelling volgt:

$$S = \cos\frac{\pi}{2n+1} - 2\cos\frac{\pi}{2n+1}\left\{\cos\frac{\pi}{2n+1} - \cos\frac{2\pi}{2n+1} + \right.$$
$$\left. + \cos\frac{3\pi}{2n+1} \ldots\ldots \mp \cos\frac{(n-1)\pi}{2n+1}\right\}$$
$$-\left\{\cos\frac{\pi}{2n+1} - \cos\frac{2\pi}{2n+1} + \cos\frac{3\pi}{2n+1} \ldots \pm\cos\frac{(n-2)\pi}{2n+1}\right\} + 1$$

$$S = \cos\frac{\pi}{2n+1} - 2\cos\frac{\pi}{2n+1}\left(S \mp \cos\frac{n\pi}{2n+1}\right) + 1$$
$$-\left(S \pm \cos\frac{(n-1)\pi}{2n+1} \mp \cos\frac{n\pi}{2n+1}\right).$$

Derhalve:

$$2S\left(1 + \cos\frac{\pi}{2n+1}\right) = \cos\frac{\pi}{2n+1} \pm 2\cos\frac{n\pi}{2n+1}\cos\frac{\pi}{2n+1} + 1$$
$$\mp\cos\frac{(n-1)\pi}{2n+1} \pm \cos\frac{n\pi}{2n+1};$$

en omdat:

$$\pm 2\cos nx\cos x = \pm\left\{\cos(n+1)x + \cos(n-1)x\right\}:$$

$$2S\left(1 + \cos\frac{\pi}{2n+1}\right) = \cos\frac{\pi}{2n+1} \pm\cos\frac{(n+1)\pi}{2n+1} \pm \cos\frac{(n-1)\pi}{2n+1} + 1$$
$$\mp\cos\frac{(n-1)\pi}{2n+1} \pm \cos\frac{n\pi}{2n+1}$$
$$= 1 + \cos\frac{\pi}{2n+1} \pm \cos\frac{(n+1)\pi}{2n+1} \pm \cos\frac{n\pi}{2n+1};$$

waaruit, omdat $\cos(n+1)x + \cos nx = 2\cos\frac{1}{2}(2n+1)x\cos\frac{1}{2}x$ *)

$$2S\left\{1+\cos\frac{\pi}{2n+1}\right\} = 1+\cos\frac{\pi}{2n+1} \pm 2\cos\frac{(2n+1)\pi}{2(2n+1)}\cos\frac{\pi}{2(2n+1)}$$

$$= 1+\cos\frac{\pi}{2n+1} \pm 2\cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2(2n+1)};$$

maar $\cos\frac{\pi}{2} = 0$,

derhalve:

$$2S\left\{1+\cos\frac{\pi}{2n+1}\right\} = 1+\cos\frac{\pi}{2n+1}$$

$$S = \tfrac{1}{2}.$$

23. *Laat nog gevraagd zijn de som der reeks:*

$$S = \cos\frac{\pi}{2n+1} + \cos\frac{3\pi}{2n+1} + \cos\frac{5\pi}{2n+1} + \ldots\ldots + \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1},$$

waarin n een geheel eindig getal voorstelt; dan heeft men analoog met de handelwijze, die wij in het vorige N°. volgden:

$$\cos\frac{\pi}{2n+1} = \cos\frac{\pi}{2n+1}$$

$$\cos\frac{3\pi}{2n+1} = 2\cos\frac{2\pi}{2n+1}\cos\frac{\pi}{2n+1} - \cos\frac{\pi}{2n+1}$$

$$\cos\frac{5\pi}{2n+1} = 2\cos\frac{4\pi}{2n+1}\cos\frac{\pi}{2n+1} - \cos\frac{3\pi}{2n+1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cos\frac{(2n-1)}{2n+1} = 2\cos\frac{(2n-2)\pi}{2n+1}\cos\frac{\pi}{2n+1} - \cos\frac{(2n-3)\pi}{2n+1};$$

waaruit door optelling:

$$S = \cos\frac{\pi}{2n+1} + 2\left\{\cos\frac{2\pi}{2n+1} + \cos\frac{4\pi}{2n+1} + \ldots\ldots \cos\frac{(2n-2)\pi}{2n+1}\right\}\cos\frac{\pi}{2n+1}$$

$$- \left\{\cos\frac{\pi}{2n+1} + \cos\frac{3\pi}{2n+1} + \ldots\ldots \cos\frac{(2n-3)\pi}{2n+1}\right\},$$

---

*) Vervangt men in de vergelijking:

$$\cos px + \cos qx = 2\cos\tfrac{1}{2}(p+q)x\cos\tfrac{1}{2}(p-q)x$$

p door $n+1$ en q door n, dan vindt men:

$$\cos(n+1)x + \cos nx = 2\cos\tfrac{1}{2}(2n+1)x\cos\tfrac{1}{2}x.$$

en indien wij stellen:

$$S_1 = \cos\frac{2\pi}{2n+1} + \cos\frac{4\pi}{2n+1} + \ldots + \cos\frac{(2n-2)\pi}{2n+1} + \cos\frac{2n\pi}{2n+1}$$

$$= \cos\frac{\pi}{2n+1} + 2\left(S_1 - \cos\frac{2n\pi}{2n+1}\right)\cos\frac{\pi}{2n+1} - \left(S - \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}\right).$$

Maar omdat men heeft:

$$\cos(\pi - a) = -\cos a, \quad *)$$

is ook:

$$\cos\frac{2\pi}{2n+1} = -\cos\left(\pi - \frac{2\pi}{2n+1}\right) = -\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}$$

$$\cos\frac{4\pi}{2n+1} = -\cos\left(\pi - \frac{4\pi}{2n+1}\right) = -\cos\frac{(2n-3)\pi}{2n+1}$$

. . . . . .

$$\cos\frac{2n\pi}{2n+1} = -\cos\left(\pi - \frac{2n\pi}{2n+1}\right) = -\cos\frac{\pi}{2n+1};$$

waaruit door optelling onmiddellijk volgt:

$$S_1 = -S,$$

zoodat de reeks overgaat in:

$$= \cos\frac{\pi}{2n+1} + 2\left\{-S - \cos\frac{2n\pi}{2n+1}\right\}\cos\frac{\pi}{2n+1} - \left\{S - \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}\right\},$$

of

$$2S\left\{1 + \cos\frac{\pi}{2n+1}\right\} = \cos\frac{\pi}{2n+1} - 2\cos\frac{2n\pi}{2n+1}\cos\frac{\pi}{2n+1} + \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}$$

$$= \cos\frac{\pi}{2n+1} - \cos\frac{(2n+1)\pi}{2n+1} - \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1} + \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}$$

$$= -\cos\pi + \cos\frac{\pi}{2n+1} = 1 + \cos\frac{\pi}{2n+1}.$$

Derhalve $S = \frac{1}{2}$.

---

*) Omdat men heeft:

$$\cos(a-b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b,$$

heeft men ook voor $a = 180°$: $\cos a = -1$ en $\sin a = 0$:

$$\cos(\pi - b) = -\cos b.$$

Hieruit volgt nog $S_1 = -\frac{1}{2}$ en $S + S_1 = 0$,
weshalve men nog heeft:

$$\cos\frac{\pi}{2n+1}+\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\cos\frac{3\pi}{2n+1}-\ldots\cos\frac{(2n-2)\pi}{2n+1}+\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}+\cos\frac{2n\pi}{2n+1}=0$$

24. *Laat thans de waarde van S berekend worden uit de reeks:*

$$S = \sin a + \sin(a+b) + \sin(a+2b) + \sin(a+3b) + \ldots \sin(a+nb),$$

waarin n dezelfde beteekenis heeft als boven.

Omdat $\sin(a+b) = 2\sin a \cos b - \sin(a-b)$ *)
heeft men achtereenvolgens:

$$\sin(a+b) = 2\sin a\cos b - \sin(a-b)$$
$$\sin(a+2b) = 2\sin(a+b)\cos b - \sin a$$
$$\sin(a+3b) = 2\sin(a+2b)\cos b - \sin(a+b)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\sin(a+nb) = 2\sin\{a+(n-1)b\}\cos b - \sin\{a+(n-2)b\}$$

en door optelling:

$$S = \sin a + 2\{\sin a + \sin(a+b) + \sin(a+2b) + \ldots \sin\{a+(n-1)b\}\}\cos b$$
$$-\sin(a-b) - \{\sin a + \sin(a+b) + \ldots \sin\{a+(n-2)b\}\}.$$

$$S = \sin a + 2\{S - \sin(a+nb)\}\cos b - \sin(a-b)$$
$$-\{S - \sin\{a+(n-1)b\} - \sin(a+nb)\}$$

$$2S\{1-\cos b\} = \sin a - 2\sin(a+nb)\cos b - \sin(a-b) +$$
$$+\sin\{a+(n-1)b\} + \sin(a+nb). \dagger)$$
$$= \sin a - 2\sin(a+nb)\cos b - \sin(a-b) +$$
$$+\cos b\sin(a+bn) - \cos(a+nb)\sin b + \sin(a+nb) =$$
$$= \sin a(1-\cos b) + \cos a\sin b +$$
$$+\sin(a+nb)(1-\cos b) - \cos(a+nb)\sin b.$$

---

*) Uit $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$
$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \sin b\cos a$,
volgt door optelling:
$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin a\cos b$
of $\sin(a+b) = 2\sin a\cos b - \sin(a-b)$.

†) $\sin\{a+(n-1)b\} = \sin\{(a+nb)-b\} =$
$= \sin(a+nb)\cos b - \sin b\cos(a+nb)$.

Omdat nu verder: $\sin b = 2\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}b$,

$$1 - \cos b = 2\sin^2\tfrac{1}{2}b,$$

heeft men ook:

$$S\sin^2\tfrac{1}{2}b = 2\sin a\sin^2\tfrac{1}{2}b + 2\cos a\sin\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}b + 2\sin(a+nb)\sin^2\tfrac{1}{2}b - \\ - 2\cos(a+nb)\sin\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}b;$$

of na deeling door $2\sin\frac{1}{2}b$:

$$S\sin\tfrac{1}{2}b = \sin a\sin\tfrac{1}{2}b + \cos a\cos\tfrac{1}{2}b + \sin(a+nb)\sin\tfrac{1}{2}b - \cos(a+nb)\cos\tfrac{1}{2}b \\ = \cos(a-\tfrac{1}{2}b) - \cos(a+nb+\tfrac{1}{2}b).$$

Derhalve:

$$S = \frac{\cos(a-\frac{1}{2}b) - \cos\left\{a+(n+\frac{1}{2})b\right\}}{2\sin\frac{1}{2}b} = \frac{\sin(a+\frac{1}{2}nb)\sin\frac{1}{2}(n+1)b}{\sin\frac{1}{2}b}.$$

Stelt men in de opgegeven reeks $a = 0$, dan vindt men:

$$\sin b + \sin 2b + \sin 3b + \sin 4b + \ldots\ldots + \sin nb = \frac{\sin\frac{1}{2}nb\sin\frac{1}{2}(n+1)b}{\sin\frac{1}{2}b}.$$

25. *Men vraagt de waarde van S te bepalen in de reeks:*

$$S = \cos a + \cos(a+b) + \cos(a+2b) + \ldots\ldots + \cos(a+nb),$$

waarin n dezelfde beteekenis heeft als boven.

Om de som dezer reeks te bepalen, schrijven wij achtereenvolgens:

$$\cos a = \cos a$$
$$\cos(a+b) = 2\cos a\cos b - \cos(a-b)$$
$$\cos(a+2b) = 2\cos(a+b)\cos b - \cos a$$
$$\cos(a+3b) = 2\cos(a+2b)\cos b - \cos(a+b$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\cos(a+nb) = 2\cos(a+(n-1)b)\cos b - \cos\left\{a+(n-2)b\right\},$$

waaruit door optelling volgt:

$$= \cos a + 2\cos b\left\{\cos a + \cos(a+b) + \cos(a+2b) + \ldots\ldots\cos(a+(n-1))b\right\} \\ - \cos(a-b) - \left\{\cos a + \cos(a+b) + \ldots\ldots + \cos(a+(n-2)b)\right\} \\ = \cos a + 2\cos b(S - \cos(a+nb)) - \cos(a-b) \\ - \left\{S - \cos(a+(n-1)b) - \cos(a+nb)\right\}$$

$$2S(1-\cos b) = \cos a(1-\cos b) - \sin a\sin b + \cos(a+nb) \\ + \cos(a+nb)\cos b + \sin(a+nb)\sin b - 2\cos b\cos(a+nb) \\ = \cos a(1-\cos b) - \sin a\sin b + \cos(a+nb)(1-\cos b) + \sin(a+nb)\sin b.$$

$$4S\sin^2\tfrac{1}{2}b = 2\cos a\sin^2\tfrac{1}{2}b - 2\sin a\sin\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}b + 2\cos(a+nb)\sin^2\tfrac{1}{2}b +$$
$$+ 2\sin(a+nb)\sin\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}b$$
$$2S\sin\tfrac{1}{2}b = \cos a\sin\tfrac{1}{2}b - \sin a\cos\tfrac{1}{2}b + \cos(a+nb)\sin\tfrac{1}{2}b + \sin(a+nb)\cos\tfrac{1}{2}b$$
$$\text{of } S = \frac{\sin(\frac{1}{2}b-a)+\sin\left\{a+(n+\frac{1}{2})b\right\}}{\sin\frac{1}{2}b} = \frac{\sin\left\{a+(n+\frac{1}{2})b\right\}-\sin(a-\frac{1}{2}b)}{\sin\frac{1}{2}b}$$
$$= \frac{\cos(a+\frac{1}{2}nb)\sin\frac{1}{2}(n+1)b}{\sin\frac{1}{2}b}.$$

Stelt men in de opgegeven reeks wederom $a=0$, dan vindt men:

$$1+\cos b+\cos 2b+\cos 3b+\ldots\ldots+\cos nb = \frac{\cos\frac{1}{2}nb\sin\frac{1}{2}(n+1)b}{\sin\frac{1}{2}b}.$$

26. Wanneer $a, b, c, d, e, f, \ldots\ldots n$, willekeurige hoeken of bogen zijn, dan is:

$$\frac{\sin(b-a)}{\sin b\sin a} = \frac{\sin b\cos a-\sin a\cos b}{\sin b\sin a} = \cot a-\cot b$$
$$\frac{\sin(c-b)}{\sin c\sin b} = \cot b-\cot c$$
$$\frac{\sin(d-c)}{\sin d\sin c} = \cot c-\cot d$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{\sin(a-n)}{\sin a\sin n} = \cot n-\cot a.$$

Waaruit door optelling volgt:

$$\frac{\sin(b-a)}{\sin b\sin a}+\frac{\sin(c-b)}{\sin c\sin b}+\frac{\sin(d-c)}{\sin d\sin c}+\ldots+\frac{\sin(a-n)}{\sin a\sin n}=0.$$

Op dergelijke wijze vindt men:

$$\frac{\sin(b-a)}{\cos b\cos a}+\frac{\sin(c-b)}{\cos c\cos b}+\ldots+\frac{\sin(a-n)}{\cos a\cos n}=0.$$

Door verder op te merken dat:

$$\sin(b+a)\times\sin(b-a)=4\sin\tfrac{1}{2}(b+a)\cos\tfrac{1}{2}(b+a)\times$$
$$\times\sin\tfrac{1}{2}(b-a)\cos\tfrac{1}{2}(b-a)=(\sin b+\sin a)(\sin b-\sin a)=$$
$$=\sin^2 b-\sin^2 a,$$

vindt men nog:

$$\sin(b+a)\sin(b-a)+\sin(c+b)\sin(c-b)+\ldots.\sin(a+n)\sin(a-n)=0;$$

en omdat:

$$\cos(x+y)\sin(x-y)=(\cos x\cos y-\sin x\sin y)(\sin x\cos y-\sin y\cos x)$$
$$=\sin x\cos x(\sin^2 y+\cos^2 y)-\sin y\cos y\,(\sin^2 x+\cos^2 x)$$
$$=\sin x\cos x-\sin y\cos y,$$

heeft men nog:

$$\cos(b+a)\sin(b-a)+\cos(c+b)\sin(c-b)+\ldots\cos(a+n)\sin(a-n)=0.$$

Aanmerking. De goniometrische reeksen, die wij in de laatste N°s. behandeld hebben, zijn, zooals men in den loop der bewerking gezien zal hebben, van een bepaald aantal termen. Wij willen nu nog eenige reeksen sommeeren, waarin n oneindig groot wordt genomen. — Voor het gemak van den Lezer zijn eenige formules, waarvan ik mij bediend heb, aan den voet der bladz. opgegeven. De meeste daarvan vindt men in elke handleiding over de goniometrie en trigonometrie.

27. *Men vraagt naar de waarde van S in de vergelijking*

$$S=1+\frac{n}{1}x\cos\varphi+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2\cos 2\varphi+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3\cos 3\varphi+\text{enz.}$$

Wij hebben gezien in N°. 8, dat

$$\cos\varphi=\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2};$$

door daarin voor φ achtereenvolgens 2φ, 3φ, 4φ enz. te substitueeren, vinden wij:

$$S=1+\frac{n}{1}x\cdot\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}$$
$$+\frac{n(n-1)}{1.\ 2}x^2\times\frac{e^{2i\varphi}+e^{-2i\varphi}}{2}$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}x^3\times\frac{e^{3i\varphi}+e^{-3i\varphi}}{2}$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$2S=1+\frac{n}{1}xe^{i\varphi}+\frac{n(n-1)}{1.\ 2}x^2e^{2i\varphi}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}x^3e^{3i\varphi}+\ldots.$$
$$+1+\frac{n}{1}xe^{-i\varphi}+\frac{n(n-1)}{1.\ 2}x^2e^{-2i\varphi}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3.}x^3e^{-3i\varphi}+\ldots.$$

dat is: $2S = (1 + xe^{i\varphi})^n + (1 + xe^{-i\varphi})^n$

en op grond van N°. 8, (6) en (7)

$2S = (1 + x\cos\varphi + ix\sin\varphi)^n + (1 + x\cos\varphi - ix\sin\varphi)^n$.

Stelt men hierin $1 + x\cos\varphi = \alpha\cos\psi$ en $x\sin\varphi = \alpha\sin\psi$, dan verandert de vergelijking in:

$$2S = \alpha^n(\cos\psi + i\sin\psi)^n + \alpha^n(\cos\psi - i\sin\psi)^n$$
$$= \alpha^n\left(e^{in\psi} + e^{-in\psi}\right),$$

dus eindelijk:

$$S = \alpha^n \cdot \frac{e^{in\psi} + e^{-in\psi}}{2} = \alpha^n \cos n\psi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (P)$$

Maar $\frac{\alpha\sin\psi}{\alpha\cos\psi} = tang\,\psi = \frac{x\sin\varphi}{1 + x\cos\varphi}$,

dus ook: $\psi = boog\,tang\,\frac{x\sin\varphi}{1 + x\cos\varphi}$.

Verder is:

$$\alpha^2(\cos^2\psi + \sin^2\psi) = (1 + 2x\cos\varphi + x^2\cos^2\varphi + x^2\sin^2\varphi)$$
$$\alpha^2 = 1 + 2x\cos\varphi + x^2,$$

zoodat de vergelijking (P) overgaat in:

$$S = (1 + 2x\cos\varphi + x^2)^{\frac{n}{2}}\cos\left(n\,boog\,tang\,\frac{x\sin\varphi}{1 + x\cos\varphi}\right).$$

28. *Zij nog gevraagd de waarde van S te vinden uit de vergelijking:*

$S = x\sin\varphi + \frac{1}{2}x^2\sin 2\varphi + \frac{1}{3}x^3\sin 3\varphi + \frac{1}{4}x^4\sin 4\varphi +$ enz.;

dan heeft men onmiddellijk:

$$S = x\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} + \frac{1}{2}x^2\frac{e^{2i\varphi} - e^{-2i\varphi}}{2i} + \frac{1}{3}x^3\frac{e^{3i\varphi} - e^{-3i\varphi}}{2i} + \text{enz.}$$

of $2iS = xe^{i\varphi} + \frac{1}{2}x^2e^{2i\varphi} + \frac{1}{3}x^3e^{3i\varphi} + \frac{1}{4}x^4e^{4i\varphi} + \ldots\ldots$

$$- xe^{-i\varphi} - \frac{1}{2}x^2e^{-2i\varphi} - \frac{1}{3}x^3e^{-3i\varphi} - \frac{1}{4}x^4e^{-4i\varphi} - \ldots.$$

bijgevolg: $2iS = -{}^e log(1 - xe^{i\varphi}) + {}^e log(1 - xe^{-i\varphi})$

$$= {}^e log\frac{1 - xe^{-i\varphi}}{1 - xe^{i\varphi}},$$

of $$e^{2iS} = \frac{1 - xe^{-i\varphi}}{1 - xe^{i\varphi}},$$

waaruit:

$$\frac{e^{2iS} - 1}{e^{2iS} + 1} = \frac{x(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})}{2 - x(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})}$$

$$\frac{e^{2iS} - 1}{i(e^{2iS} + 1)} = \frac{x \cdot \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}}{1 - x \cdot \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}}.$$

Nu is: $$tang\ \varphi = \frac{sin\ \varphi}{cos\ \varphi} = \frac{(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) : 2i}{(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) : 2},$$

of na vermenigvuldiging met $2e^{i\varphi}$:

$$tang\ \varphi = \frac{e^{2i\varphi}1 - 1}{i(e^{2i\varphi} + 1)}.$$

Derhalve:

$$tang\ S = \frac{x\ sin\ \varphi}{1 - x\ cos\ \varphi},$$

en dientengevolge:

$$S = boog\ tang\ \frac{x\ sin\ \varphi}{1 - x\ cos\ \varphi}.$$

29. *Zij gegeven* $S = 1 + x\ cos\ \varphi + \frac{x^2}{1.2}\ cos\ 2\varphi +$

$$+ \frac{x^3}{1.2.3}\ cos\ 3\varphi + \text{enz.}$$

Hieruit volgt onmiddellijk:

$$= 1 + x\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} + \frac{x^2}{1.2} \cdot \frac{e^{2i\varphi} + e^{-2i\varphi}}{2} + \frac{x^3}{1.2.3} \cdot \frac{e^{3i\varphi} + e^{-3i\varphi}}{2} + \ldots$$

$$2S = 1 + xe^{i\varphi} + \frac{x^2}{1.2}e^{2i\varphi} + \frac{x^3}{1.2.3}e^{3i\varphi} + \ldots\ldots$$

$$+ 1 + xe^{-i\varphi} + \frac{x^2}{1.2}e^{-2i\varphi} + \frac{x^3}{1.2.3}e^{-3i\varphi} + \ldots\ldots$$

dus

$$2S = e^{xe^{i\varphi}} + e^{xe^{-i\varphi}}$$
$$= e^{x\cos\varphi + ix\sin\varphi} + e^{x\cos\varphi - ix\sin\varphi}$$
$$= e^{x\cos\varphi}\left(e^{ix\sin\varphi} + e^{-ix\sin\varphi}\right) = 2\,e^{x\cos\varphi}\cos(x\sin\varphi)$$

waaruit ten laatste volgt:

$$S = e^{x\cos\varphi}\cos(x\sin\varphi).$$

30. Nemen wij de formule (vergel. N°. 5)

$$\cos mx = (\cos x)^m - \binom{2}{m}(\cos x)^{m-2}\sin^2 x + \binom{4}{m}(\cos x)^{m-4}\sin^4 x - \binom{6}{m}(\cos x)^{m-6}\sin^6 x \quad \ldots\ldots \quad (A)$$

en stellen wij hierin $\sin x = y$, dan is $\cos x = (1-y^2)^{\frac{1}{2}}$, en wij vinden:

$$\cos mx = (1-y^2)^{\frac{1}{2}m} - \binom{2}{m}(1-y^2)^{\frac{1}{2}(m-2)}y^2 + \binom{4}{m}(1-y^2)^{\frac{1}{2}(m-4)}y^4 - \binom{6}{m}(1-y^2)^{\frac{1}{2}(m-6)}y^6 + \text{enz.} \quad \ldots\ldots \quad (B)$$

Hierbij doen zich twee gevallen voor. Is m even, dan worden $\frac{1}{2}m$, $\frac{1}{2}(m-2)$ ..... geheele positieve getallen en het binomiumtheorema geeft eindige reeksen; is m daarentegen oneven, dan vindt men oneindige reeksen.

Nemen wij nu m even, dan vinden wij:

$$\cos mx = 1 - \binom{1}{\frac{m}{2}}y^2 + \binom{2}{\frac{m}{2}}y^4 - \binom{3}{\frac{m}{2}}y^6 + \ldots.$$
$$- \binom{2}{m}\left\{y^2 - \binom{1}{\frac{m-2}{2}}y^4 + \binom{2}{\frac{m-2}{3}}y^6 \ldots.\right\}$$
$$+ \binom{4}{m}\left\{y^4 - \binom{1}{\frac{m-4}{2}}y^6 \ldots.\right\}$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots$$

en door vereeniging van de gelijknamige machten van y:

$$\cos mx = 1 - A_2 y^2 + A_4 y^4 - A_6 y^6 + \ldots \quad (C)$$

waarin de $2k^{\text{de}}$-macht van y tot coëfficiënt heeft:

$$(-1)^k \times \left\{\binom{k}{\frac{m}{2}} + \binom{2}{m}\binom{k-1}{\frac{m-2}{2}} + \binom{4}{m}\binom{k-2}{\frac{m-4}{2}} + \ldots + \binom{2k}{m}\right\},$$

welke gelijk is aan:

$$(-1)^k \cdot \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)(m^2-6^2)\ldots\left\{m^2-(2k-2)^2\right\}}{1.\quad 2.\quad 3\ldots\ldots\ldots 2k.} \text{ (§ 32, (A))}$$

Substitueeren wij nu de analoge waarden van A_2, A_4, ... in de vergelijking (C) en vervangen wij y door $\sin x$, dan heeft men eindelijk:

$$\cos mx = 1 - \frac{m^2}{1.2}\sin^2 x + \frac{m^2(m^2-2^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}\sin^4 x -$$

$$- \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}\sin^6 x + \text{enz.} \ldots\ldots \text{(D)}$$

Is m oneven, dan deelen wij de vergelijking (B) door $\cos x = \sqrt{(1-y^2)}$ en hebben dan:

$$\frac{\cos mx}{\cos x} = (1-y^2)^{\frac{1}{2}(m-1)} - \binom{2}{m}(1-y^2)^{\frac{1}{2}(m-3)}y^2 +$$

$$+ \binom{4}{m}(1-y^2)^{\frac{1}{2}(m-5)}y^4 - \text{enz.}$$

Dewijl de exponenten van $(1-y^2)$ geheele positieve getallen zijn, kan men de machten van $(1-y^2)$ ontwikkelen in eindige reeksen, waardoor men vindt:

$$\frac{\cos mx}{\cos x} = 1 - A'_2\,y^2 + A'_4\,y^4 - A'_6\,y^6 + \ldots\ldots$$

Hierin nu is:

$$A'_{2k} = \binom{k}{\frac{m-1}{2}} - \binom{k-1}{2}\binom{k-1}{\frac{m-5}{2}} + \binom{4}{m}\binom{k-2}{\frac{m-5}{2}} - \ldots,$$

waarvoor men (§ 32, 2 (C)) ook schrijven kan:

$$\frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)(m^2-5^2)\ldots\ldots\left\{m^2-(2k-1)^2\right\}}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4\ldots\ldots\ldots 2k},$$

zoodat voor m oneven gevonden wordt:

$$\cos mx = \cos x\left\{1 - \frac{m^2-1^2}{1.\ 2}\sin^2 x + \frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}\sin^4 x\right.$$

$$\left. - \frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)(m^2-5^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}\sin^6 x + \ldots\right\} \text{ (E)}$$

31. Nemen wij thans in de formule (vergel. N°. 5):

$$\sin mx = \binom{1}{m}\cos^{m-1}x\sin x - \binom{3}{m}\cos^{m-3}x\sin^3 x + \binom{5}{m}\cos^{m-5}x\sin^5 x \ldots\ldots\ldots \text{(F)}$$

$\sin x = y$ en dus $\cos x = \sqrt{(1-y^2)}$, dan gaat zij over in:

$$\sin mx = \binom{1}{m}(1-y^2)^{\frac{m-1}{2}}y - \binom{3}{m}(1-y^2)^{\frac{m-3}{2}}y^3 + \binom{5}{m}(1-y)^{\frac{m-5}{2}}y^5 \ldots$$

Is m oneven, dan zijn $\frac{m-1}{2}$, $\frac{m-3}{2}$ ..... geheele positieve getallen, zoodat men na ontwikkeling der machten van $(1-y^2)$ vindt:

$$\sin mx = A_1 y - A_3 y^3 + A_5 y^5 - \ldots,$$

waarin

$$A_{2k+1} = \binom{1}{m}\overset{k}{\left(\frac{m-1}{2}\right)} + \binom{3}{m}\overset{k-1}{\left(\frac{m-3}{2}\right)} + \ldots\ldots$$

$$= \frac{m(m^2-1^2)\ldots\ldots\left\{m^2-(2k-1)^2\right\}}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ldots\ 2k+1}, \quad \{\S 32,\ 2,\ (B)\}$$

zoodat men eindelijk vindt:

$$\sin mx = \frac{m}{1}\sin x - \frac{m(m^2-1^2)}{1.\ 2.\ 3}\sin^3 x + \frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}\sin^5 x \ldots \text{(G)}$$

Is m even, dan deelt men (F) door $\cos x = \sqrt{(1-y^2)}$ en vindt dan gemakkelijk:

$$\sin mx = \cos x\left\{\frac{m}{1}\sin x - \frac{m(m^2-2^2)}{1.\ 2.\ 3}\sin^3 x + \right.$$
$$\left. + \frac{m(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}\sin^5 x + \ldots\ldots\right\} \ldots \text{(H)}$$

32 Substitueeren wij in de formule (D) van N°. 30 $\frac{1}{2}\pi - x$ voor x, dan gaat zij over in:

$$(-1)^{\frac{m}{2}}\cos mx = 1 - \frac{m^2}{1.2}\cos^2 x + \frac{m^2(m^2-2^2)}{1.\ 2.\ 3\ 4}\cos^4 x - \text{enz.}$$
$$+ \frac{(-1)^{\frac{m}{2}}\, m^2(m^2-2^2)\ldots\ldots\left\{m^2-(m-2)^2\right\}}{1.\ 2\ldots\ldots\ldots\ldots m}\cos^m x,$$

en na vermenigvuldiging met $(-1)^{\frac{m}{2}}$, omdat in (D) veronder-

steld wordt, dat m even is, en tegengestelde volgorde der termen:

$$\cos mx = A_m \cos^m x - A_{m-2} \cos^{m-2} x + \ldots\ldots$$

$$+ (-1)^{\frac{m-2}{2}} A_2 \cos^2 x + (-1)^{\frac{m}{2}}, \ldots (I)$$

zijnde hier de coëfficiënt van den algemeenen term:

$$A_{m-2k} = \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)\ldots\left\{m^2-(m-2k-2)^2\right\}}{1.\ 2.\ 3\ldots\ldots\ldots(m-2k)}.$$

Maar omdat:

$$m^2 = 2.m.\frac{m}{2}$$

$$m^2-2^2 = 2^2\left(\frac{m}{2}+1\right)\left(\frac{m}{2}-1\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$m^2-(m-2k-2)^2 = 2^2(m-k-1)(k+1)$$

is ook

$$A_{m-2k} = \frac{m(m-k-1)(m-k-2)\ldots(\frac{1}{2}m+1)\frac{1}{2}m\ldots(k+2)(k+1)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad\quad m-2k} \times 2^{m-2k-1},$$

welke, nadat men teller en noemer met k, $k-1\ldots 3.2.1$ vermenigvuldigd heeft, overgaat in:

$$A_{m-2k} = \frac{m(m-k-1)(m-k-2)\ldots(m-2k+1)}{1.\quad 2\ldots\ldots\ldots k} 2^{m-2k-1}.$$

Is $k=0$, dan levert deze formule

$$A_m = 2^{m-1}.$$

In alle gevallen vinden wij voor de formule (I):

$$\cos mx = 2^{m-1}\cos^m x - 2m^{m-3}\cos^{m-2}x + m2^{m-5}\frac{m-3}{2}\cos^{m-4}x \ldots (K)$$

Substitueeren we nu in de formule (G) van N°. 31 $\frac{1}{2}\pi - x$ in de plaats van x, dan vindt men, omdat m hier oneven is:

$$\cos mx = A_m\cos^m x - A_{m-2}\cos^{m-2}x + A_{m-4}\cos^{m-4}x - \ldots,$$

waarin wij de termen van het tweede lid in tegenovergestelde volgorde hebben genomen.

De algemeene term dezer reeks is

$$A_{m-2k}=\frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)\ldots[m^2-(m-2k-2)^2]}{1.\quad 2.\quad 3\ldots\ldots(m-2k)}.$$

Indien men thans in het oog houdt, dat

$$m^2-1^2=2^2\left(\frac{m+1}{2}\right)\left(\frac{m-1}{2}\right)$$

$$m^2-3^2=2^2\left(\frac{m+3}{2}\right)\left(\frac{m-3}{2}\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$m^2-(m-2k-2)^2=2^2(m-k-1)(k+1),$$

en men teller en noemer met de reeks k, $k-1\ldots.3, 2, 1$ vermenigvuldigt, dan vindt men:

$$A_{m-2k}=\frac{m(m-k-1)(m-k-2)\ldots.(m-2k+1)}{1.\quad 2\ldots\ldots\ldots k}\,2^{m-2k-1},$$

welke voor $k=0$, even als bij de vorige reeks,

$$A_m=2^{m-1}$$

doet vinden. — Hieruit volgt, dat de reeks (K) geldt, hetzij m even of oneven is. Vermenigvuldigen wij de beide leden met 2, dan vinden wij nog:

$$2\cos mx=(2\cos x)^m-\frac{m}{1}(2\cos x)^{m-2}+\frac{m(m-3)}{1.\ 2}(2\cos x)^{m-4}-$$

$$\frac{m(m-4)(m-5)}{1.\quad 2.\quad 3}(2\cos x)^{m-6}\ldots\ldots\ldots(L)$$

Door soortgelijke bewerking vindt men uit de formulen (E) van N°. 30 en (H) van N°. 31 voor m even en oneven:

$$\sin mx=\sin x\left[(2\cos x)^{m-1}-\frac{m-2}{1}(2\cos x)^{m-3}+\right.$$

$$\left.+\frac{(m-3)(m-4)}{1.\ 2}(2\cos x)^{m-5}-\frac{(m-4)(m-5)(m-6)}{1.\ 2.\ 3}(2\cos x)^{m-7}\ldots..(M)\right.$$

Aanmerking. De formulen van (D) tot (M) zijn gevonden door JACOB BERNOULLI en komen voor in de *Mémoires de l'Académie des Sciences* van 1702.

33. Wij vonden in de formule (C) van N°. 30:

$$\cos mx = 1 - A_2 y^2 + A_4 y^4 - \ldots + (-1)^{\frac{1}{2}m} A_m y^m, \quad \ldots (\alpha)$$

waarin $y = \sin x$, m even en $A_m = 2^{m-1}$ is.

Voor (α) kan men ook schrijven:

$$\cos mx = (-1)^{\frac{m}{2}} \times 2^{m-1} \left\{ y^m + B_{m-2} y^{m-2} + \ldots B_2 y^2 + B_1 \right\}$$

en stellen hierin $y_1, y_2, y_3 \ldots\ldots$ de wortels voor van de vergelijking

$$y^m + B_{m-2} y^{m-2} + \ldots\ldots B_2 y^2 + B_1 = 0,$$

dan heeft men eindelijk (verg. § 5, N°. 9 en 10)

$$\cos mx = (-1)^{\frac{m}{2}} \times 2^{m-1} (y - y_1)(y - y_2) \ldots\ldots (y - y_m),$$

zijnde hierin $y_1, y_2 \ldots\ldots y_m$ de waarden, waarvoor $\cos mx = 0$ wordt. Dewijl y hierin den sinus van een zekeren hoek x voorstelt, kunnen y_1, y_2 de sinussen voorstellen van de hoeken $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots$ zoodat

$$\cos mx = (-1)^{\frac{m}{2}} \times 2^{m-1} (\sin x - \sin x_1)(\sin x - \sin x_2) \ldots (\sin x - \sin x_m).$$

De waarden van $x_1, x_2 \ldots\ldots$, waarvoor $\cos mx = 0$ wordt, zijn

$$\pm \frac{\pi}{2m}, \quad \pm \frac{3\pi}{2m}, \quad \pm \frac{5\pi}{2m}, \ldots\ldots\ldots \pm \frac{(m-1)\pi}{2m},$$

derhalve is:

$$\cos mx = (-1)^{\frac{m}{2}} \times 2^{m-1} \left(\sin x - \sin \frac{\pi}{2m}\right)\left(\sin x - \sin \frac{3\pi}{2m}\right)\left(\sin x - \sin \frac{5\pi}{2m}\right) \ldots$$
$$\times \left(\sin x + \sin \frac{\pi}{2m}\right) \ldots\ldots \left(\sin x + \sin \frac{m-1}{2m}\pi\right)$$

of, indien men de factoren twee aan twee met elkander vermenigvuldigt en het product het tegengestelde teeken geeft:

$$\cos mx = 2^{m-1} \left(\sin^2 \frac{\pi}{2m} - \sin^2 x\right) \ldots\ldots \left(\sin^2 \frac{m-1}{2m}\pi - \sin^2 x\right) \ldots (K)$$

Neemt men hierin $x = 0$, dan is:

$$1 = 2^{m-1} \sin^2 \frac{\pi}{2m} \sin^2 \frac{3\pi}{2m} \sin^2 \frac{5\pi}{2m} \ldots\ldots \sin^2 \frac{m-1}{2m}\pi.$$

en deze vergelijking deelende in de vergel. (Σ), vindt men:

$$\cos mx = \left\{1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{\pi}{2m}}\right\}\left\{1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{3\pi}{2m}}\right\}\ldots\left\{1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{(m-1)}{2m}\pi}\right\}\ldots(O$$

34. Wij vonden in de formule (H) van N°. 31, door $\sin x = y$ te nemen:

$$\sin mx = \cos x(A_1 y - A_3 y^3 + A_5 y^5 \ldots + (-1)^{\frac{1}{2}m-1} A_{m-1} y^{m-1})\ldots(\beta$$

waarin m even, en

$$A_{m-1} = \frac{m(m^2-2^2)(m^2-4^2)\ldots[m^2-(m-2)^2]}{1.\ 2.\ldots\ldots\ldots(m-1)} = 2^{m-1}.$$

Voor (β) kan men ook schrijven:

$$\frac{\sin mx}{\cos x \sin x} = A_1 - A_3 y^2 + A_5 y^4 \ldots + (-1)^{\frac{1}{2}m-1} \times 2^{m-1} y^{m-2}$$

en door soortgelijke redeneering als boven:

$$\frac{\sin mx}{\cos x \sin x} = (-1)^{\frac{m}{2}-1} 2^{m-1}(\sin x - \sin x_1)(\sin x - \sin x_2)\ldots(\sin x - \sin x_{m-2}$$

Nu wordt $\sin mx$ gelijk aan nul voor de $(m-1)$ bogen,

$$\pm\frac{2\pi}{2m},\ \pm\frac{4\pi}{2m},\ldots\ldots\pm\left(\frac{m-2}{2m}\right)\pi.$$

$$\sin\frac{mx}{\sin x \cos x} = 2^{m-1}\left(\sin^2\frac{2\pi}{2m} - \sin^2 x\right)\left(\sin^2\frac{4\pi}{2m} - \sin^2 x\right)\ldots$$

$$\sin^2\left(\frac{m-2}{2m}\pi - \sin x\right) \ldots\ldots\ldots (I$$

Neemt men hierin $x = 0$ en merkt men op, dat

$$lim\ \frac{\sin mx}{\sin x} = lim\ \frac{m(\sin mx : mx)}{\sin x : x} = \frac{m}{1},$$

dan heeft men:

$$m = 2^{m-1}\sin^2\frac{2\pi}{2m}\sin^2\frac{4\pi}{2m}\ldots\ldots\sin^2\frac{m-2}{2m}\pi$$

en na deeling dezer laatste vergelijking op de verg. (*II*)

$$\frac{\sin mx}{\cos x} = m \sin x \left\{1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{2\pi}{2m}}\right\}\left\{1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{4\pi}{2m}}\right\} \ldots\ldots$$

$$\left\{1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{m-2}{2m}\pi}\right\} \quad \ldots\ldots \text{(P)}$$

Uit de formulen (E) van N°. 30 en (G) van N°. 31, kan voor m oneven op analoge wijze gevonden worden:

$$\frac{\cos mx}{\cos x} = \left\{1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{\pi}{2m}}\right\}\left\{1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{3\pi}{2m}}\right\} \ldots \left\{1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{m-2}{2m}\pi}\right\} \ldots \text{(Σ)}$$

$$\sin mx = m \sin x \left\{1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{2\pi}{2m}}\right\}\left\{1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{4\pi}{2m}}\right\} \ldots \left\{1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{m-1}{2m}\pi}\right\} \text{(T)}$$

Het opsporen dezer formulen evenzeer als die van *tang mx*, *cot mx*, *sec mx*, *cosec mx* laten wij aan den Lezer, die daarmede na het behandelde weinig moeite zal hebben.

35. Voor de formule (M) van N°. 32 kan men ook schrijven

$$\frac{\sin mx}{\sin x} = 2^{m-1}(\cos x - \cos x_1)(\cos x - \cos x_2)\ldots(\cos x - \cos x_{m-1}).$$

Neemt men nu achtereenvolgens x_1, $x_2 \ldots x_{m-1}$ gelijk aan

$$\frac{\pi}{m}, \frac{2\pi}{m}, \frac{3\pi}{m}, \ldots\ldots \frac{(m-1)\pi}{m},$$

dan vindt men:

$$\frac{\sin mx}{\sin x} = 2^{m-1}\left(\cos x - \cos\frac{\pi}{m}\right)\left(\cos x - \cos\frac{2\pi}{m}\right)\ldots\left(\cos x - \cos\frac{(m-1)\pi}{m}\right) \text{(α)}.$$

Omdat verder

$$\cos\frac{\pi}{m} = -\cos\left(\pi - \frac{\pi}{m}\right) = -\cos\frac{(m-1)\pi}{m}$$

. . . . . .

$$\cos\frac{m-1}{m}\pi = -\cos\left(\pi - \frac{m-1}{m}\pi\right) = -\cos\frac{\pi}{m}$$

volgt uit de vergelijking (α), indien men de termen van het tweede lid in tegengestelde volgorde neemt:

$$\frac{\sin mx}{\sin x} = 2^{m-1}\left(\cos x + \cos\frac{\pi}{m}\right)\left(\cos x + \cos\frac{2\pi}{m}\right)\ldots\left(\cos x + \cos\frac{m-1}{m}\pi\right) \ldots (\beta)$$

en door vermenigvuldiging van de vergelijkingen (α) en (β):

$$\frac{\sin^2 mx}{\sin^2 x} = 2^{2m-2}\left(\cos^2 x - \cos^2\frac{\pi}{m}\right)\ldots\left(\cos^2 x - \cos^2\frac{m-1}{m}\pi\right) \ldots (\gamma)$$

Maar omdat $\cos^2 x - \cos^2 y = \sin(x+y)\sin(y-x)$, is ook:

$$\left(\frac{\sin mx}{\sin x}\right)^2 = 2^{m-1}\sin\left(\frac{\pi}{m}+x\right)\sin\left(\frac{2\pi}{m}+x\right)\ldots\sin\left(\frac{m-1}{2}\pi+x\right)$$
$$\times\ 2^{m-1}\sin\left(\frac{\pi}{m}-x\right)\sin\left(\frac{2\pi}{m}-x\right)\sin\left(\frac{m-1}{2}\pi-x\right);$$

en omdat

$$\sin\left(\frac{\pi}{m}+x\right) = \sin\left(\frac{m-1}{2}\pi-x\right)$$

$$\sin\left(\frac{2\pi}{m}+x\right) = \sin\left(\frac{m-2}{2}\pi-x\right)$$

. . . . . .

$$\frac{\sin mx}{\sin x} = \pm 2^{m-1}\sin\left(\frac{\pi}{m}+x\right)\ldots\sin\left(\frac{m-1}{2}\pi+x\right) \ldots (\delta)$$

Neemt men hierin $x = 0$, dan is:

$$m = \pm 2^{m-1}\sin\frac{\pi}{m}\sin\frac{2\pi}{m}\ldots\ldots$$

Deze bogen liggen tusschen 0 en 180°; hunne sinussen zijn dus positief en men heeft eindelijk:

$$\sin mx = \sin x \times 2^{m-1}\sin\left(\frac{\pi}{m}+x\right)\sin\left(\frac{2\pi}{m}+x\right)\ldots\sin\left(\frac{m-1}{m}\pi+x\right) \ldots (\varepsilon)$$

welke formule doorgaat voor m even en oneven.

Aanmerking. De formules van N°. 33, 34 en 35, waardoor de waarden van *sin mx* en *cos mx* in eindige producten worden uitgedrukt, zijn gevonden door EULER, *Intr. in Anal. infin.*

36. Wij vonden in N°. 34 formule (T):

$$\sin mx = m \sin x \left\{1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{2\pi}{2m}}\right\}\left\{1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{4\pi}{2m}}\right\}\ldots\left\{1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{m-1}{2m}\pi}\right\}\ldots,$$

waarin m een willekeurig oneven getal is.

Stellen wij hierin $x = \frac{z}{m}$ en $\frac{m-1}{2} = n$, dan is:

$$\sin z = m \sin\frac{z}{m}\left\{1-\left[\frac{\sin\frac{z}{m}}{\sin\frac{\pi}{m}}\right]^2\right\}\left\{1-\left[\frac{\sin\frac{z}{m}}{\sin\frac{2\pi}{m}}\right]^2\right\}\ldots\ldots\left\{1-\left[\frac{\sin\frac{z}{m}}{\sin\frac{n\pi}{m}}\right]^2\right\}$$

$$= m \sin\frac{z}{m}\left\{1-\left[\frac{\sin\frac{z}{m}}{\sin\frac{\pi}{m}}\right]^2\right\}\ldots\ldots\left\{1-\left[\frac{\sin\frac{z}{m}}{\sin\frac{k\pi}{m}}\right]^2\right\}$$

$$\times\left\{1-\left[\frac{\sin\frac{z}{m}}{\sin\frac{k+1}{m}\pi}\right]^2\right\}\ldots\ldots\left\{1-\left[\frac{\sin\frac{z}{m}}{\sin\frac{n}{m}\pi}\right]^2\right\}\ldots\ldots (\nu),$$

waarin k een geheel positief getal kleiner dan n is.

De noemers, die in het tweede product voorkomen, zijn allen kleiner dan $\sin\frac{1}{2}\pi$; in den teller heeft men steeds den boog $\frac{z}{m}$, die kleiner zal zijn dan al de bogen:

$$\frac{k+1}{m}\pi, \frac{k+2}{m}\pi \ldots\ldots \frac{n}{m}\pi = \frac{m-1}{m}\pi,$$

zoodra men heeft

$$n = \tfrac{1}{2}(m-1) > k > \frac{z}{\pi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\xi)$$

of

$$\frac{n}{m}\pi = \frac{m-1}{2m}\pi > \frac{k}{m}\pi > \frac{z}{m}.$$

Onder deze veronderstelling zijn

$$\frac{\sin\frac{z}{m}}{\sin\frac{k+1}{m}\pi} \cdot \cdots\cdots \frac{\sin\frac{z}{m}}{\sin\frac{n}{m}\pi}$$

echte breuken; derhalve is het tweede product kleiner dan 1.

En omdat $(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)\ldots > 1-a_1a_2a_3\ldots$ is het tweede product, dat wij voortaan P zullen noemen, grooter dan

$$1-\left\{\left[\frac{\sin\frac{z}{m}}{\sin\frac{k+1}{m}\pi}\right]^2+\ldots+\left[\frac{\sin\frac{z}{m}}{\sin\frac{n}{m}\pi}\right]^2\right\} \ldots\ldots (o)$$

Wanneer α een boog van 't eerste quadrant is, dan zijn

$$1-\sin\alpha,\ tang\,\alpha-\alpha,\ (\tfrac{1}{2}\pi-\alpha)-\sin(\tfrac{1}{2}\pi-\alpha)$$

positief, terwijl dan uit de identieke vergelijking:

$$\tfrac{1}{2}\pi\sin\alpha-\alpha=\alpha(1-\sin\alpha)\sin\alpha+(tang\,\alpha-\alpha)\cos^2\alpha + \left\{(\tfrac{1}{2}\pi-\alpha)-\sin(\tfrac{1}{2}\pi-\alpha)\right\}\sin\alpha$$

volgt: $\quad \frac{1}{2}\pi\sin\alpha > \alpha \quad$ en $\quad \frac{1}{\sin\alpha} < \frac{\pi}{2\alpha}.$

Neemt men verder $\alpha=\frac{h\pi}{m}$, zoodat ook $\frac{h\pi}{m}$ een boog van 't eerste kwadrant is, dan is

$$\frac{1}{\left(\sin\frac{h\pi}{m}\right)^2} < \frac{m^2}{4h^2}$$

en na vermenigvuldiging met $\left(\sin\frac{z}{m}\right)^2 < \frac{z^2}{m^2}$,

$$\left[\frac{\sin\frac{z}{m}}{\sin\frac{h\pi}{m}}\right]^2 < \frac{z^2}{4}\cdot\frac{1}{h^2} \cdots\cdots\cdots (\pi)$$

Neemt men in deze uitdrukking h achtereenvolgens gelijk aan $k+1, k+2, \ldots . n$, dan vindt men onmiddellijk:

$$P > 1 - \frac{z^2}{4}\left(\frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{(k+2)^2} \ldots\ldots \frac{1}{n^2}\right); \ldots\ldots (\varrho)$$

maar omdat

$$\frac{1}{(k+1)^2} < \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}, \quad \frac{1}{(k+2)^2} < \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}, \text{ enz.,}$$

is zooveel te meer

$$P > 1 - \frac{z^2}{4}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n}\right)$$

of

$$P > 1 - \frac{z^2}{4k} \ldots\ldots\ldots (\sigma)$$

Uit een en ander volgt, dat men heeft:

$$1 > P > 1 - \frac{z^2}{4k}$$

of

$$P = 1 - \frac{\varrho z^2}{4k}, \text{ waarin } 0 < \varrho < 1.$$

Laat men nu in de vergelijking (ν) m tot in het oneindige toenemen, en blijft k constant, dan vindt men omdat:

$$lim\left(m \sin\frac{z}{m}\right) = z, \quad lim \frac{\sin\frac{z}{m}}{\sin\frac{h\pi}{m}} = lim \frac{m \sin\frac{z}{m}}{m \sin\frac{h\pi}{m}} = \frac{z}{h\pi},$$

$$\sin z = z\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)\ldots\left(1-\frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{\varrho z^2}{4k}\right)\ldots (\tau)$$

Schrijft men in de formule (τ) $2k$ in de plaats van k en daarna $\frac{1}{2}z$ in plaats van z en vermenigvuldigt men de laatste vergelijking met 2, dan vindt men:

$$\sin z = z\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)\ldots\left(1-\frac{z^2}{(2k)^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{\varrho' z^2}{8k}\right)\ldots (\upsilon)$$

$$2\sin\tfrac{1}{2}z = z\left(1-\frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{4^2\pi^2}\right)\ldots\left(1-\frac{z^2}{(4k)^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{\varrho'' z^2}{16k}\right) (\varphi)$$

en na deeling:

$$\cos\tfrac{1}{2}z = \left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{3^2\pi^2}\right)\ldots\left(1-\frac{z^2}{(2k-1)^2\pi^2}\right)\frac{1-\frac{\varrho' z^2}{8k}}{1-\frac{\varrho'' z^2}{16k}}\ldots (\chi)$$

Schrijft men de formule (*z*) onder de gedaante:

$$\frac{\sin z}{1-\frac{\varrho z^2}{4k}} = z\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)$$

en laat men k tot in het oneindige toenemen, dan wordt het aantal factoren oneindig en men heeft:

$$\sin z = z\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{3^2\pi^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (T)$$

De formule (*χ*) eveneens behandelende, vindt men door $2z$ te schrijven in de plaats van z,

$$\cos z = \left(1-\frac{4z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{5^2\pi^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (X)$$

Neemt men in (*T*) $z = \frac{1}{2}\pi$, dan vindt men:

$$1 = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1.3}{2.2}\cdot\frac{3.5}{4.4}\cdot\frac{5.7}{6.6}\cdot\ldots\ldots$$

of

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2^2}{1.3}\cdot\frac{4^2}{3.5}\cdot\frac{6^2}{5.7}\cdot\ldots\ldots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\Psi)$$

Door $z = \frac{1}{4}\pi$ te nemen, vindt men nog:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{4^2}{3.5}\cdot\frac{8^2}{7.9}\cdot\frac{12^2}{11.13}\cdot\ldots\ldots \quad . \quad . \quad (\Omega)$$

Aanmerking. Over de convergentie dezer merkwaardige producten kan men onmiddellijk uitspraak doen. De vorm $t_0 t_1 t_2 \ldots$ convergeert namelijk, indien zulks het geval is met $log\, t_0 + log\, t_1 + log\, t_2 + \ldots\ldots$, welke reeks onderworpen is aan onze vorige stellingen (§ 23 enz.).

37. Substitueeren wij in de reeksen, die wij in N°. 5 gevonden hebben

$$\cos x = (1 - \sin x)^{\frac{1}{2}},$$

dan vinden wij:

$$\cos mx = (1-\sin^2 x)^{\frac{m}{2}} - \binom{2}{m}(1-\sin^2 x)^{\frac{m-2}{2}}\sin^2 x + \binom{4}{m}(1-\sin^2 x)^{\frac{m-4}{2}}\sin^4 x + \ldots$$

$$\sin mx = \binom{1}{m}(1-\sin^2 x)^{\frac{m-1}{2}}\sin x - \binom{3}{m}(1-\sin^2 x)^{\frac{m-3}{2}}\sin^3 x + \ldots\ldots$$

welke, indien wij de machten van $(1-\sin^2 x)$ volgens het binomium van NEWTON ontwikkelen en de termen zooveel mogelijk vereenigen, overgaan in:

$$\cos mx = 1 - \frac{m^2}{2}\sin^2 x + \frac{m^2(m^2-4)}{1.2.3.4}\sin^4 x - \frac{m^2(m^2-4)(m^2-16)}{1.2.3.4.5.6}\sin^6 x + \ldots \quad (\alpha)$$

$$\sin mx = \sin x\left\{m - \frac{m(m^2-1)}{1.2.3}\sin^2 x + \frac{m(m^2-1)(m^2-9)}{1.2.3.4.5}\sin^4 x \ldots\right\} \quad (\beta)$$

Hadden wij, alvorens $(1-\sin^2 x)^{\frac{1}{2}} = \cos x$ te substitueeren, $\cos x$ in beide reeksen buiten haakjes gebracht, dan hadden wij gevonden:

$$\cos mx = \cos x\left\{1 - \frac{m^2-1}{1.2}\sin^2 x + \frac{(m^2-1)(m^2-9)}{1.2.3.4}\sin^4 x - \right.$$
$$\left. - \frac{(m^2-1)(m^2-9)(m^2-25)}{1.2.3.4.5.6}\sin^6 x + \ldots\ldots\right\} \quad (\gamma)$$

$$\sin mx = \cos x\left\{m\sin x - \frac{m^2(m-4)}{1.2.3}\sin^3 x + \frac{m^2(m^2-4)(m^2-16)}{1.2.3.4.5}\sin^5 x - \ldots\right\} \quad (\delta)$$

Voor de formule (β) kan men ook schrijven:

$$\frac{\sin mx}{m} = \sin x - \frac{m^2-1}{1.2.3}\sin^3 x + \frac{(m^2-1)(m^2-9)}{1.2.3.4.5}\sin^5 x -$$
$$- \frac{(m^2-1)(m^2-9)(m^2-25)}{1.2.3.4.5.6.7.}\sin^7 x + \ldots\ldots$$

Voor afnemende waarden van m gaat deze reeks, omdat

$$lim\frac{\sin mx}{m}(\text{voor } m=0) = x, \text{ over in}$$

$$x = \sin x + \frac{1}{1.2.3}\sin^3 x + \frac{1.3}{1.2.4.5}\sin^5 x + \frac{1.3.5}{1.2.4.6.7}\sin x^7 + \ldots$$

Zij verder $\sin x = y$, dus $x = boog\,(\sin y)$, dan heeft men eindelijk

$$boog\,(\sin y) = y + \frac{y^3}{2.3} + \frac{3.y^5}{2.4.5} + \frac{3.5.y^7}{2.4.6.7} + \ldots \quad (A),$$

welke reeks convergeert voor $y = \pm 1$ en voor alle waarden tusschen $+1$ en -1.

Stellen wij $y = 1$, dan is $boog\,(\sin y) = \frac{\pi}{2}$;

$y = \frac{1}{2}$, dan is $boog\,(\sin y) = \frac{\pi}{6}$;

alsdan vindt men:

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2.3} + \frac{3}{2.4.5} + \frac{3.5}{2.4.6.7} + \frac{3.5.7}{2.4.6.8.9} + \ldots \text{(B)}$$

$$\frac{\pi}{6} = \tfrac{1}{2} + \frac{1}{2.3}\cdot\frac{1}{2^3} + \frac{3}{2.4.5}\cdot\frac{1}{2^5} + \frac{3.5}{2.4.6.7}\cdot\frac{1}{2^7} + \ldots \text{(C)}$$

Door de reeks (B) te verminderen met de reeks (A) vindt men nog

$$boog\,(\cos y) = \frac{\pi}{2} - boog\,(\sin y) = (1-y) + \frac{1-y^3}{2.3} + \frac{3(1-y^5)}{2.4.5} + \\ + \frac{3.5(1-y^7)}{2.4.6.7} + \ldots\ldots \text{(D)}$$

Aanmerking. Eene zeer fraaie maar meer omslachtige wijze, om de formule (A) af te leiden, vindt men in SCHLÖMILCH's *Alg. Anal.* pag. 217. — De ontwikkeling van de formules (α), (β), (γ) en (δ) vindt men bij vele schrijvers. „Ces formules sont extraites du tome X des séances des Écoles normales, seul ouvrage dans lequel elles se trouvent réunies." GARNIER, *An. Alg.* II, p. 258.

38. Wij vonden vroeger (N°. 3):

$$\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4.5} - \frac{x^6}{2\,3\ldots7} + \ldots.\right)$$

Stellen wij hierin

$$y = \frac{x^2}{2.3} - \frac{x^4}{2\,3\,4.5} + \frac{x^6}{2,3\ldots7} - \ldots.$$

dan is: $\sin x = x(1-y)$

en $log\,\sin x = log\,x + log\,(1-y) = log\,x - M\left\{y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 + \ldots\right\}$

substitueert men hierin de waarde van y, dan vindt men na behoorlijke herleiding:

$$log\,\sin x = log\,x - M\left\{\frac{x^2}{2.3} + \frac{x^4}{4.5.9} + \frac{x^6}{5.7.81} + \ldots\right\} \quad . \quad (1)$$

Op soortgelijke wijze zal men vinden:

$$log\,\cos x = -M\left\{\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{3.4} + \frac{x^6}{5.9} + \ldots.\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Het zal nu verder niet moeilijk vallen, reeksen te vinden voor *log tang x*, *log cot x*, *log sec x*, *log cosec x*, indien men slechts in het oog houdt, dat

$$log\ tang\ x = log\ sin\ x - log\ cos\ x,$$
$$log\ cot\ x = log\ cos\ x - log\ sin\ x,$$

enz.

39. Wij hebben vroeger gevonden (zie N°. 8)

$$e^{ix} = cos\ x + i\ sin\ x \text{ en } e^{-ix} = cos\ x - i\ sin\ x;$$

derhalve is ook:

$$ix = {}^{e}log\,(1 + i\ tang\ x) + {}^{e}log\ cos\ x$$
$$-ix = {}^{e}log\,(1 - i\ tang\ x) + {}^{e}log\ cos\ x$$

en na aftrekking

$$x = \frac{1}{2i}\,{}^{e}log\,\frac{1 + i\ tang\ x}{1 - i\ tang\ x},$$

en omdat (§ 32, 9) ${}^{e}log\,\frac{1+x}{1-x} = 2\,(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots)$, is

$$x = tang\ x - \tfrac{1}{3}\,tang^3 x + \tfrac{1}{5}\,tang^5 x - \tfrac{1}{7}\,tang^7 x + \ldots$$

Stelt men hierin $tang\ x = y$ en $x = boog\ tang\ y$, dan is

$$boog\ tang\ y = y - \tfrac{1}{3}\,y^3 + \tfrac{1}{5}\,y^5 - \tfrac{1}{7}\,y^7 + \ldots \quad (E)$$

Stelt men hierin $boog\ tang\ y = \frac{\pi}{4}$, dus $y = 1$;

en $boog\ tang\ y = \frac{1}{6}\pi$, dus $y = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

dan vindt men:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \ldots \quad (F)$$

$$\pi = 6\sqrt{3}\,(1 - \frac{1}{3\,3} + \frac{1}{5.3^2} - \frac{1}{7.3^3} + \ldots) \quad (G)$$

Aangezien deze formules slechts langzaam convergeeren, stelt men:

$$boog\ tang\ x + boog\ tang\ y = boog\ tang\ \frac{x+y}{1-xy},$$

welke altijd doorgaat; indien men dus voor x en y eene echte breuk neemt, en x en y zoodanig kiest, dat men heeft:

$$\frac{x+y}{1-xy}=1, \qquad \text{dus } y=\frac{1-x}{1+x},$$

dan gaat de vorige vergelijking over in:

$$boog\ tang\ x + boog\ tang\ \frac{1-x}{1+x} = \frac{\pi}{4}.$$

Het eerste lid dezer vergelijking, volgens de formule (E) ontwikkelende, vindt men:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \ldots\ldots\ldots \\ &+ \frac{1-x}{1+x} - \tfrac{1}{3}\left\{\frac{1-x}{1+x}\right\}^3 + \tfrac{1}{5}\left\{\frac{1-x}{1+x}\right\}^5 - \ldots\end{aligned}\right\} \ldots (H)$$

Neemt men nu hierin $x=\frac{1}{2}$, dan heeft men eindelijk:

$$\frac{\pi}{4} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{2})^3 + \tfrac{1}{5}(\tfrac{1}{2})^5 - \tfrac{1}{7}(\tfrac{1}{2})^7 + \ldots\ldots$$
$$+ \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3}\cdot(\tfrac{1}{3})^3 + \tfrac{1}{5}(\tfrac{1}{3})^5 - \ldots\ldots$$

Door de waarde van *boog tang x* te substitueeren in de formule

$$boog\,(cot\,x) = \frac{\pi}{2} - boog\ tang\ x,$$

wordt ook *boog cot x* in eene reeks uitgedrukt.

Aanmerking. De formules in dit en het vorig N°. behandeld en gewoonlijk cyclometrische reeksen genoemd, zijn bijna tegelijker tijd gevonden door Fac. Gregory, Leibnitz en Newton, 1675 en 1676. De formule (H) is van Euler en komt voor in zijne *Introd. in Anal. inf.* Lobatto (*Lessen over de Hoogere Alg.*) geeft nog eenige convergeerende reeksen voor de berekening van π.

Aan Bertrand van Genève danken wij nog de volgende:

$$\frac{\pi}{2} = 4\left\{\tfrac{1}{5} - \frac{1}{3\,5^3} + \frac{1}{5\,5^5} - \frac{1}{7.5^7} + \ldots.\right\}$$
$$-\left\{\frac{1}{239} - \frac{1}{3(239)^3} + \frac{1}{5(239)^5} - \frac{1}{7(239)^7} + \ldots.\right\}$$

Men vergelijke hiermede Garnier, *Anal. alg.* II, *pag.* 243 sqq.

40. In N°. 8 hebben wij gevonden:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \text{ en } \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Schrijven wij hierin iy voor x, dan heeft men:

$$\cos iy = \frac{e^{y} + e^{-y}}{2} \text{ en } \sin iy = i\,\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}.$$

Schrijft men $u + iy$ voor x, dan heeft men algemeener:

$$\cos(u+iy) = \frac{e^{i(u+iy)} + e^{-i(u+iy)}}{2} = \frac{e^{iu-y} + e^{-iu+y}}{2}$$

$$\sin(u+iy) = -i.\frac{e^{i(u+iy)} - e^{-i(u+iy)}}{2} = -i.\frac{e^{iu-y} - e^{-iu+y}}{2},$$

of wanneer e^{iu} en e^{-iu} uitgedrukt worden door $\cos u$ en $\sin u$:

$$\cos(u+iy) = \cos u\,\frac{e^{y} + e^{-y}}{2} - i\sin u\,\frac{e^{y} - e^{-y}}{2} \quad . . \quad (\alpha)$$

$$\sin(u+iy) = \sin u\,\frac{e^{y} + e^{-y}}{2} + i\cos u\,\frac{e^{y} - e^{-y}}{2} \quad . . \quad (\beta)$$

welke formules door substitutie van de waarden voor $\cos iy$ en $\sin iy$ overgaan in:

$$\cos(u+iy) = \cos u\cos iy - \sin u\sin iy \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$
$$\sin(u+iy) = \sin u\cos iy + \cos u\sin iy \quad . \quad . \quad . \quad (B)$$

door welke formulen wij zien, dat de grondformulen, waarvan wij bij onze beschouwingen zijn uitgegaan, ook waar blijven voor complexe vormen.

Op soortgelijke wijze kan men de overige goniometrische functiën voor complexe vormen afleiden. — Zoo zal men vinden:

$$\tan(u+iy) = \frac{\sin(u+iy)}{\cos(u+iy)} = \frac{2\sin 2u + i(e^{2y} - e^{-2y})}{2\cos 2u + (e^{2y} + e^{-2y})} \quad . . \quad (C)$$

$$\cot(u+iy) = \frac{\cos(u+iy)}{\sin(u+iy)} = \frac{2\sin 2u - i(e^{2y} - e^{-2y})}{-2\cos 2u + (e^{2y} + e^{-2y})} \quad . . \quad (D)$$

$$\sec(u+iy) = \frac{1}{\cos(u+iy)} = \frac{2\cos(u-iy)}{\cos 2u + \cos(2iy)} \quad . . . . . \quad (E)$$

$$\operatorname{cosec}(u+iy) = \frac{1}{\sin(u+iy)} = \frac{2\sin u(e^{y} + e^{-y}) - i\cos u(e^{y} - e^{-y})}{-2\cos 2u + (e^{2y} + e^{-2y})} \quad (F)$$

Aanmerking. Op het voetspoor van vele buitenlandsche schrijvers heb ik hier den naam *complex* ingevoerd voor vormen, die uit de som of het verschil van een reëel en een imaginair getal bestaan. — De aangewezen herleidingen blijven tot oefening aan den Lezer.

41. Door *boog sin* $(u+iv)$ verstaan wij dien boog, die voor $u+iv=0$ verdwijnt en wiens sinus gelijk is aan $u+iv$.

Stellen wij dus *boog sin* $(u+iv)=x+iy$, dan moet men omgekeerd hebben:

$$sin(x+iy)=u+iv$$

en wel zoodanig, dat voor $u=0$ en $v=0$, tegelijkertijd $x=0$ en $y=0$ wordt.

Op grond van het vorige N°. hebben wij nu:

$$sin\,x\,\frac{e^y+e^{-y}}{2}+i\,cos\,x\,\frac{e^y-e^{-y}}{2}=u+iv,$$

en door vereeniging der reëele en der imaginaire gedeelten:

$$sin\,x\,\frac{e^y+e^{-y}}{2}=u \quad \text{en} \quad cos\,x\,\frac{e^y-e^{-y}}{2}=v$$

of

$$\frac{e^y+e^{-y}}{2}=\frac{u}{sin\,x} \quad \text{en} \quad \frac{e^y-e^{-y}}{2}=\frac{v}{cos\,x},$$

waaruit

$$e^y=\frac{u}{sin\,x}+\frac{v}{cos\,x} \quad \text{en} \quad e^{-y}=\frac{u}{sin\,x}-\frac{v}{cos\,x} \quad \ldots \quad (\varepsilon)$$

en door vermenigvuldiging:

$$1=\frac{u^2}{sin^2x}-\frac{v^2}{cos^2x},$$

en na substitutie van $sin^2x=1-cos^2x$:

$$cos^4x+(u^2+v^2-1)cos^2x-v^2=0$$

$$cos^2x=\tfrac{1}{2}\left\{1-v^2-u^2\pm\sqrt{[(1-v^2-u^2)^2+4v^2]}\right\} \quad \ldots \quad (\zeta)$$

Dewijl cos^2x niet negatief kan zijn, heeft men slechts het bovenste teeken in aanmerking te nemen, omdat verder $cos^2x+sin^2x=1$ is volgt uit (ζ):

$$cos^2 x = \tfrac{1}{2}\left\{1 - v^2 - u^2 + \sqrt{[(1 - v^2 - u^2)^2 + 4v^2]}\right\},$$

$$sin^2 x = \tfrac{1}{2}\left\{1 + v^2 + u^2 - \sqrt{[(1 - v^2 - u^2)^2 + 4v^2]}\right\},$$

of $$sin^2 x = \tfrac{1}{2}\left\{1 + v^2 + u^2 - \sqrt{[(1 + v^2 + u^2)^2 - 4u^2]}\right\}.$$

en

$$cos\, x = \pm\sqrt{[\tfrac{1}{2}\left\{1 - v^2 - u^2 + \sqrt{[(1 - v^2 - u^2)^2 + 4v^2]}\right\}]} = \pm X,$$

$$sin\, x = \pm\sqrt{[\tfrac{1}{2}\left\{1 + v^2 + u^2 - \sqrt{[(1 + v^2 + u^2)^2 - 4u^2]}\right\}]} = \pm Y$$

Hieruit volgt onmiddellijk:

$$x = boog\ sin \pm Y = \pm\, boog\ sin\, Y,$$

waarin x verdwijnt, indien u en v = nul worden.

Neemt men $v = 0$ en beschouwt men u als eene positieve echte breuk, dan is $x = \pm\, boog\ sin\ (\sqrt{u^2})$; dewijl echter $x = boog\ sin\, u$ tusschen 0 en $\frac{1}{2}\pi$ ligt, geldt hier slechts het bovenste teeken. Is daarentegen u eene negatieve echte breuk, dan ligt x tusschen 0 en $-\frac{1}{2}\pi$; in beide gevallen blijft de cosinus van x steeds positief.

Uit de eerste der formules (s) volgt:

$$y = {}^e log\left(\frac{u}{sin\, x} + \frac{v}{cos\, x}\right),$$

derhalve vinden wij eindelijk:

$$boog\ sin\ (u + iv) = boog\ sin\ (\pm Y) + i\, {}^e log\left\{\pm\frac{u}{Y} + \frac{v}{X}\right\} \ldots (A)$$

waarin de bovenste of onderste teekens genomen worden, naar gelang u grooter of kleiner dan 0 is.

Verder heeft men:

$$boog\ cos\ (u + iv) = \frac{\pi}{2} - boog\ sin\ (u + iv)$$

$$= \frac{\pi}{2} - boog\ sin\ (\pm Y) - i\, {}^e log\left\{\pm\frac{u}{Y} + \frac{v}{X}\right\}$$

$$= boog\ cos\ (\pm Y) - i\, {}^e log\left\{\pm\frac{u}{Y} + \frac{v}{X}\right\} \ldots (B)$$

Op soortgelijke wijze kan men eene uitdrukking vinden voor den boog, welks tangens complex is. Verstaan wij namelijk

onder *boog tang* $(u + iv)$ dien boog, welke voor $u + iv = 0$ verdwijnt, en welks tangens de waarde $u + iv$ heeft, en stellen wij dus:

$$boog\ tang(u + iv) = x + iy$$

en

$$tang(x + iy) = u + iv,$$

dan wordt:

$$tang(x + iy) = \frac{sin(x + iy)}{cos(x + iy)};$$

indien wij in deze ontwikkeling $\frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$ door Q vervangen, dan vindt men:

$$Q = \frac{1}{2v}\left\{1 + u^2 + v^2 \pm \sqrt{[(1+u^2+v^2)^2 - 4v^2]}\right\};$$

stelt men verder:

$$z = \sqrt{\left\{(1 + u^2 + v^2)^2 - 4v^2\right\}},$$

dan heeft men eindelijk:

$$boog\ tang(u + iv) = boog\ tang\ \frac{2u}{1 - u^2 - v^2 + z} + i\,\tfrac{1}{2}\,{}^e log\ \frac{u^2 + (1 + v)^2 - z}{z - u^2 - (1 - v)^2} \quad \ldots\ (C)$$

Aanmerking. Deze herleidingen zijn grootendeels overgenomen uit SCHLÖMILCH's *Alg. An.* Ik meende daarover niet uitvoeriger te moeten zijn, omdat de Lezer later bij de Diff. en Integr. rekening middelen zal leeren kennen om deze reeksen gemakkelijker te vinden.

42. Aan het einde van § 23 verwezen wij naar deze §, om de *dubbele* reeksen te behandelen. Laat gegeven zijn:

$$\left.\begin{array}{l} t_{0,0},\ t_{0,1},\ t_{0,2},\ t_{0,3},\ \ldots\ldots t_{0,m}\ \ldots\ldots \\ t_{1,0},\ t_{1,1},\ t_{1,2},\ t_{1,3},\ \ldots\ldots t_{1,m}\ \ldots\ldots \\ t_{2,0},\ t_{2,1},\ t_{2,2},\ t_{2,3},\ \ldots\ldots t_{2,m}\ \ldots\ldots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ t_{n,0},\ t_{n,1},\ t_{n,2},\ t_{n,3},\ \ldots\ldots t_{n,m}\ \ldots\ldots \end{array}\right\} \quad \ldots\ (1)$$

zoodanig in horizontale en verticale rijen gerangschikt, dat ieder

dezer rijen een oneindig aantal termen bevat, dan noemt men zoodanige reeks, waarvan de algemeene term

$$t_{n,m}$$

is, eene *dubbele reeks*. Even eens kan men zich eene reeks voorstellen, wier algemeene term wordt aangeduid door

$$t_{n,m,v};$$

zoodanige reeks noemt men eene *drievoudige reeks*, enz.

Indien de som van een eindig of oneindig aantal termen voorgesteld wordt door $S_{n,n}$, en deze som alle termen bevat, die aangewezen worden, door aan n alle waarden toe te kennen van 0 af tot n toe; indien verder deze som convergeert tot eene limiet S, dan zegt men, dat de dubbele reeks *convergent* is; in het tegengestelde geval is zij divergent. Stelt men in het eerste geval

$$S = S_{n,n} + r_{n,n}, \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

dan zal, indien de reeks convergent is, de limiet van $r_{n,n}$ voor toenemende waarden van n meer en meer tot 0 moeten naderen.

Stelt men verder

$$\begin{aligned} v_0 &= S_{1,1} \\ v_1 &= S_{2,2} - S_{1,1} \\ &\ldots\ldots\ldots \\ v_n &= S_{n+1,n+1} - S_{n,n} \end{aligned}$$

dan zal de enkele reeks $v_0, v_1, v_2 \ldots\ldots v_n \ldots\ldots$ eene convergente reeks zijn, wier limiet S, wier algemeene term v_n en wier rest $r_{n,n}$ zal zijn.

Is de reeks convergent, dan blijft zij zulks, al veranderen alle positieve termen of eenige daarvan in negatieve; zoodat eene dubbele reeks convergeeren zal, indien zulks het geval is met de absolute waarde harer termen.

Dewijl verder de geheele reeks verondersteld wordt convergent te zijn, moet zulks ook het geval zijn met elk der horizontale en elk der verticale reeksen:

$$\begin{aligned} &t_{0,0}, t_{0,1}, t_{0,2}, \ldots\ldots \\ &\quad t_{1,0}, t_{1,1}, t_{1,2} \ldots\ldots \\ &\quad\quad t_{2,0}, t_{2,1}, t_{2,2} \ldots\ldots \end{aligned}$$

en

$$t_{0,0}, t_{1,0}, t_{2,0} \cdots\cdots$$
$$t_{0,1}, t_{1,1}, t_{2,1} \cdots\cdots$$
$$t_{0,2}, t_{1,2}, t_{2,2} \cdots\cdots$$

omdat zij een bestanddeel zijn van de dubbele reeks. Is namelijk S_m de som van de m eerste horizontale rijen, dan is S_m de limiet van $S_{m,n}$ voor oneindige waarden van n; laten wij nu nog m tot in het oneindige toenemen, dan is $lim\ S_m = S$; enz.

43. Stelling. *Wanneer de absolute waarden van de termen eener dubbele reeks, in horizontale reeksen samengenomen, convergeerende reeksen vormen en de eenvoudige reeks, die men uit de afzonderlijke horizontale rijen kan vormen, ook convergeert, dan is ook de dubbele reeks convergent, en het is dan hetzelfde of men hare termen in horizontale of verticale reeksen vereenigt.*

Bewijs. Zij gegeven de dubbele reeks:

$$\left.\begin{array}{l} t_{0,0}, t_{0,1}, t_{0,2}, t_{0,3} \cdots\cdots t_{0,m} \\ t_{1,0}, t_{1,1}, t_{1,2}, t_{1,3} \cdots\cdots t_{1,m} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ t_{n,0}, t_{n,1}, t_{n,2}, t_{n,3} \cdots\cdots t_{n,m} \end{array}\right\}, \ldots (1)$$

dan zullen voor oneindig toenemende waarden van m en n

$$\left.\begin{array}{l} r_{0,m} = t_{0,m+1} + t_{0,m+2} + \cdots\cdots \\ r_{1,m} = t_{1,m+1} + t_{1,m+2} + \cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_{n,m} = t_{n,m+1}, t_{n,m+2} + \cdots\cdots \end{array}\right\}, \ldots (2)$$

en

$$\left.\begin{array}{l} r_{n,0} = t_{n+1,0} + t_{n+2,0} + \cdots\cdots \\ r_{n,1} = t_{n+1,1} + t_{n+2,1} \cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_{n,n} = t_{n+1,m} + t_{n+2,m} \cdots\cdots \end{array}\right\} \ldots (3)$$

volgens de veronderstelling en vroeger aangenomen notatiën (r toch stelt den sluitterm voor van convergente reeksen) meer

en meer tot nul naderen, en dus kleiner gemaakt kunnen worden dan de kleinste willekeurige grootheid.

Beschouwt men dus de reeks:

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ t_{0,m+1},\ t_{0,m+2}\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ t_{1,m+1},\ t_{1,m+2}\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ t_{n-1,m+1},\ t_{n-1,m+2}\ \cdot \\ t_{n,0},\ t_{n,1}\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ t_{n,m+1},\ t_{n,m+2}\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ t_{n+1,0},\ t_{n+1,1}\ \cdot\ \cdot\ t_{n+1,m+1},\ t_{n+1,m+2}\ \cdot \end{array}\right\},\ \ldots (4)$$

waaruit een *eindig aantal termen* $=0$ weggevallen is, dan kan men haar ook aanmerken als eene dubbele reeks; terwijl bovendien door m en n groot genoeg te nemen hare som zoo klein gemaakt kan worden, als men verkiest.

Voegen wij nu bij de oneindige dubbele reeks (4) de eindige reeks (1), dan zal deze som blijven convergeeren.

44. Zij z eene functie van x, y. Opdat deze functie ontwikkeld kunne worden in eene convergeerende reeks, gerangschikt volgens de gehcele positieve machten van x en y, wier som gelijk zij aan z, is het niet voldoende, dat z ontwikkeld wordt in eene convergente reeks, gerangschikt volgens de opklimmende machten van x, terwijl de coëfficiënten van x ontwikkeld kunnen worden in convergeerende reeksen, volgens de opklimmende machten van y, zoodat men heeft:

$$z = t_0 + t_1 x + t_2 x^2 + t_3 x^3 + \ldots\ldots\ldots (1)$$

waarin

$$\left.\begin{array}{l} t_0 = u_{0,0} + u_{0,1} y + u_{0,2} y^2 \\ t_1 = u_{1,0} + u_{1,1} y + u_{1,2} y^2 \\ t_2 = \ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right\};\ \ldots (2)$$

maar z zal ook ontwikkeld moeten kunnen worden in eene convergeerende reeks, gerangschikt volgens de geheele positieve machten van x en y:

$$\left.\begin{array}{llll} u_{0,0} & u_{0,1}y & u_{0,2}y^2 & \ldots\ldots \\ u_{1,0}x & u_{1,1}xy & u_{1,2}xy^2 & \ldots\ldots \\ u_{2,0}x^2 & u_{2,1}x^2y & u_{2,2}x^2y^2 & \ldots\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \end{array}\right\} \ldots (3)$$

Wij willen dit door voorbeelden ophelderen.

Zij gevraagd $z=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-y}$ *te ontwikkelen volgens de positieve opklimmende machten van* x *en* y.

Voor alle waarden van x en y zoodanig, dat $x^2<1$ en $y^2<1$, is:

$$\left.\begin{array}{l} z=\frac{1}{x-1}\cdot\frac{1}{1-y}=\frac{1}{1-y}+\frac{x}{1-y}+\frac{x^2}{1-y}+\ldots \\ \text{verder is } \frac{1}{1-y}=1+y+y^2+y^3+\ldots\ldots \end{array}\right\} \ldots (4)$$

bijgevolg

$$\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-y}=(1+y+y^2+\ldots)(1+y+y^2+\ldots)x+(1+y+y^2+\ldots)x^2+$$

$$\left.\begin{array}{l} =1+y+y^2+y^3+\ldots\ldots \\ \quad x+xy+xy^2+xy^3+\ldots\ldots \\ \quad x^2+x^2y+x^2y^2+x^2y^3+\ldots \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \ldots (5)$$

van welke dubbele reeks de horizontale en verticale rijen voor de opgegeven waarden convergeeren, terwijl zulks ook het geval is voor de som van alle termen, indien men ze diagonaalsgewijze in ééne horizontale rij schrijft:

$$1,\ x+y,\ x^2+xy+y^2,\ x^3+x^2y+xy^2+y^3,\ \text{enz.}\ldots (6)$$

waarvan de algemeene term wordt voorgesteld door

$$\frac{x^n-y^n}{x-y}.$$

Op soortgelijke wijze kan men in eene dubbele reeks ontwikkelen:

$$\frac{1}{1-x-y} = \frac{1}{1-y} + \frac{x}{(1-y)^2} + \frac{x^2}{(1-y)^3} + \frac{x^3}{(1-y)^4} + \ldots$$

$$= \left.\begin{array}{llll} 1 + & y + & y^2 + & y^3 + \ldots \\ x + & 2xy + & 3xy^2 + & 4xy^3 + \ldots \\ x^2 + & 3x^2y + & 6x^2y^2 + & 10x^2y^3 + \ldots \\ x^3 + & 4x^3y + & 10x^3y^2 + & 20x^3y^3 + \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right\} \ldots (7)$$

welke diagonaalsgewijze de som is van de eenvoudige reeks

$$1,\ (x+y),\ (x+y)^2,\ (x+y)^3,\ (x+y)^4 \ldots\ldots (8)$$

Opdat nu de dubbele reeks convergeere, wordt er vereischt, dat $x+y$ gelegen zij tusschen $+1$ en -1, hierdoor zal de reeks (8) convergent zijn. — Bovendien wordt voor de convergentie der horizontale en verticale reeksen nog vereischt, dat men heeft:

$$y^2 < 1 \quad \text{en} \quad x^2 < (1-y)^2.$$

45. Wanneer gegeven is de dubbele reeks:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}) - \frac{1}{3}(1-\frac{1}{3}) + \frac{1}{4}(1-\frac{1}{4}) - \frac{1}{5}(1-\frac{1}{5}) + \frac{1}{6}(1-\frac{1}{6}) - \ldots \\ + \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{3}(1-\frac{1}{3})^2 + \frac{1}{4}(1-\frac{1}{4})^2 - \frac{1}{5}(1-\frac{1}{5})^2 + \frac{1}{6}(1-\frac{1}{6})^2 - \ldots \\ + \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})^3 - \frac{1}{3}(1-\frac{1}{3})^3 + \frac{1}{4}(1-\frac{1}{4})^3 - \frac{1}{5}(1-\frac{1}{5})^3 + \frac{1}{6}(1-\frac{1}{6})^3 - \ldots \\ + \ldots \end{array}\right\} \quad (1)$$

dan vindt men schijnbaar voor de som der horizontale reeksen achtereenvolgens:

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^3 + (\frac{1}{2})^4 + \ldots\right\} = \frac{1}{2}; \ldots\ldots (2)$$

Voor de som der verticale reeksen vindt men:

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \frac{5}{6} - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Volgens (2) is de reeks convergent, volgens (3) is zij divergent, daar zij nooit tot een bepaalden limiet nadert, maar zich altijd heen en weer beweegt tusschen $-\frac{1}{2}$ en $+1\frac{1}{2}$.

Deze schijnbare tegenstrijdigheid ligt daarin, dat ook de horizontale reeksen niet convergent zijn, maar even als de som der verticale reeksen eene heen en weêr slingerende waarde krijgen, naar gelang men met een positieven of negatieven term eindigt.

Men ziet hieruit, dat men de stelling van N°. 42 met zeer veel omzichtigheid moet toepassen.

Aanmerking. De reeks, in dit N°. behandeld, komt voor in SCHLÖMILCH's *Handb. der Alg. Anal.*, pag. 140—143. Door eene geheel andere redeneering, komt de schrijver tot hetzelfde resultaat.

46. Veronderstellen wij

$$z = \frac{1}{1-y} \quad \text{en} \quad y = 1 - \frac{1-e^{-x}}{x} \ldots\ldots (1)$$

derhalve:

$$z = 1 + y + y^2 + y^3 + \ldots\ldots\ldots (2)$$

voor $y < 1$; en

$$y = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^3}{2.3.4} - \text{enz.} \ldots\ldots\ldots (3)$$

voor alle waarden van x, dan vindt men eindelijk:

$$\left.\begin{aligned} s = \frac{x}{1-e^{-x}} = 1 &+ \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^3}{2.3.4} - \ldots\right) + \\ &+ \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^3}{2.3.4} - \ldots\right)^2 \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} (4)$$

of

$$\left.\begin{aligned} z = 1 &+ \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} - \frac{x^4}{120} + \ldots\right) \\ &+ \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{6} + \frac{5x^4}{72} + \ldots\ldots\ldots \\ &+ \frac{x^3}{8} - \frac{x^4}{8} + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \ldots (5)$$

geldende deze ontwikkeling voor alle waarden van x, die y^2 kleiner maken dan 1, derhalve voor alle positieve waarden van x, en voor alle negatieve waarden tusschen 0 en $-1{,}250\ldots$ zijnde hierin 1,250 de eenige positieve wortel der vergelijking

$$\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^3}{2.3.4} + \frac{x^4}{2.3.4.5} + \ldots = 1 \text{ of van } \frac{e^x - 1}{x} = 2.$$

Werkt men deze reeks verder uit, dan vindt men:

$$z = 1 + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{6}\cdot\frac{x^2}{1.2} - \tfrac{1}{30}\cdot\frac{x^4}{1.2.3.4} + \tfrac{1}{42}\cdot\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} - \text{enz.} \quad (6)$$

Het is gemakkelijk aan te toonen, dat deze reeks geene oneven machten van x bevat boven de eerste, want men heeft:

$$z - \tfrac{1}{2}x = \frac{x}{1-e^{-x}} - \tfrac{1}{2}x = \tfrac{1}{2}x\frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}} = \tfrac{1}{2}\frac{x(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}})}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}},$$

welke vorm niet van waarde verandert, indien men het teeken van x verandert. Zulks kan dus ook niet het geval zijn met de ontwikkeling, van het tweede lid der vergelijking (6), verminderd met den term $\frac{1}{2}x$, derhalve enz.

De getallen $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{42}$ .... zijn bekend onder den naam van getallen van BERNOULLI.

Aanmerking. Het bestek van dit werk gedoogt niet uitvoeriger te handelen over de getallen van BERNOULLI; ik bepaal mij dus tot het geven van de volgende bepaling:

Indien men de getallen α, β, γ, δ, ε, ζ ..... bepaalt uit de volgende vergelijkingen:

$$0 = \alpha - \frac{1}{2.1.2.3},$$

$$0 = \beta - \frac{\alpha}{1.2.3} + \frac{3}{2.1.2.3.4.5},$$

$$0 = \gamma - \frac{\beta}{1.2.3} + \frac{\alpha}{1.2.3.4.5} - \frac{5}{2.1.2..7},$$

$$0 = \delta - \frac{\gamma}{1.2.3} + \frac{\beta}{1.....5} - \frac{\alpha}{1.2....7} + \frac{7}{2.1.2.....9},$$

enz.

en daarna $\overset{1}{B} = 1.2.\alpha,$

$$\overset{3}{B} = 1.2.3.4.\beta,$$

$$\overset{5}{B} = 1.2.3.4.5.6.\gamma,$$

$$\overset{7}{B} = 1.2.3.4.5.6.7.8.\delta$$

enz.

neemt, dan zijn $\overset{1}{B}$, $\overset{3}{B}$, $\overset{5}{B}$, $\overset{7}{B}$ ..... het eerste, het tweede, enz. getal van BERNOULLI.

Deze getallen zijn achtereenvolgens

$$\overset{1}{B} = \frac{1}{6} \qquad \overset{11}{B} = \frac{691}{2730}$$

$$\overset{3}{B} = \frac{1}{30} \qquad \overset{13}{B} = \frac{7}{6}$$

$$\overset{5}{B} = \frac{1}{42} \qquad \overset{15}{B} = \frac{3617}{510}$$

$$\overset{7}{B} = \frac{1}{30} \qquad \overset{17}{B} = \frac{43867}{798}$$

$$\overset{9}{B} = \frac{5}{66} \qquad \overset{19}{B} = \frac{174611}{330}.$$

Het vijfentwintigste getal van BERNOULLI is:

$$\overset{49}{B} = \frac{495057205241079648212477525}{66}.$$

Van het 18de tot het 25ste zijn zij berekend door ROTHE. BERNOULLI heeft er slechts vijf medegedeeld; EULER heeft er 17 berekend en bekend gemaakt in de *Comm. Petrop. novis.* T. XIV. Hen, die nader met deze getallen en hunne eigenschappen bekend willen worden, verwijzen wij naar de *Ars conjectandi* van JACOB BERNOULLI. Bas. 1713. pag. 97 sqq. en naar GRUNERT's *S. auf* KLÜGEL I, pag. 55; naar EULER's *Inst. Calc. diff.* II, § 122 e. a.

47. Indien de termen van de dubbele reeks, die wij in N°. 41 beschouwd hebben, allen imaginaire getallen bevatten, dan noemt men zoodanige reeks eene imaginaire dubbele reeks. Zoodanige reeks zal convergeeren of divergeeren, naar gelang zulks het geval is met den modulus der termen. Afzonderlijke gevallen zal het wel niet noodig zijn hierbij aan te voeren.

Aanmerking. Hetgeen hier medegedeeld is over de dubbele reeksen, is grootendeels ontleend aan CAUCHY's *Cours d'analyse algébrique* en aan de *Résumés analytiques* van denzelfden schrijver. Voor uitvoeriger behandeling moet ik naar die werken verwijzen.

§ 34. De Kettingbreuken.

1. Indien men de verhouding wil bepalen tusschen twee gelijksoortige grootheden of twee getallen A en B, dan zal men voor 't geval, dat $A > B$ en B geen deeler van A is, kunnen stellen:

$$\frac{A}{B} = a_1 + \frac{r_1}{B} = a_1 + \frac{1}{\frac{B}{r_1}}.$$

Zij nu $$\frac{B}{r_1} = a_2 + \frac{r_2}{r_1},$$

dan volgt daaruit:

$$\frac{A}{B} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{r_2}{r_1}} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}}.$$

Heeft men nu verder

$$\frac{r_1}{r_2} = a_3 + \frac{r_3}{r_2}, \quad \frac{r_2}{r_3} = a_4 + \frac{r_4}{r_3}, \text{ enz.,}$$

dan is de verhouding tusschen A en B:

$$\frac{A}{B} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a^4 + \cfrac{1}{\text{enz.}}}}}$$

Zoodanige breuk nu, wier noemer bestaat uit een willekeurig getal en een gebroken, welks noemer wederom uit een willekeurig getal en eene breuk bestaat, noemt men eene *kettingbreuk*.

Uit de wijze, waarop wij de getallen a_1, a_2, a_3 .... verkregen, blijkt ons, dat zij niets anders zijn, dan de achtereenvolgende quotiënten, die men verkrijgt, door den grootsten gemeenen deeler van twee getallen te bepalen.

Ontwikkelt men dus $\frac{37}{29}$ in eene kettingbreuk, dan heeft men:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 2 & \\ \hline 73 & 29 & 8 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & 5 & 3 & 2 & 1 & & \end{array}$$

derhalve

$$\frac{37}{29} = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}}$$

Omdat de kettingbreuk de juiste verhouding tusschen twee getallen uitdrukt, zullen de breuken, echt of onecht, wier teller en noemer relatieve priemgetallen zijn, in kettingbreuken overgebracht, dezelfde quotiënten opleveren, als hare onvereenvoudigde vormen.

De getallen $a_1, a_2, a_3, \ldots a_k$ noemt men de *wijzergetallen der kettingbreuk.* Omdat men uit de wijzergetallen de kettingbreuk kan samenstellen, indien namelijk alle tellers $= 1$ zijn, schrijft men ook:

$$\frac{A}{B} = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$$

$$\frac{37}{29} = \{1, 3, 1, 1, 1, 2\}.$$

De vormen, tusschen accoladen geplaatst, noemt men *betrekkingswijzer;* elk getal is een *term* van den betrekkingswijzer. Dewijl men verder bij 't zoeken van den grootsten gemeenen deeler steeds op eene rest $= 0$ komt, kan de verhouding tusschen twee geheele getallen altijd uitgedrukt worden door eene eindige kettingbreuk.

Het is intusschen niet noodig, dat de tellers altijd gelijk zijn aan de eenheid. De algemeene gedaante der kettingbreuken is:

$$\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\cfrac{a_3}{b_3+\cfrac{a_4}{b_4+\text{enz.}}}}} = \left\{\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \frac{a_4}{b_4}, \ldots\ldots\right\},$$

waarin men $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3} \ldots\ldots \frac{a_k}{b_k}$ de *termen der kettingbreuk* noemt. Ook zoodanige kettingbreuk wordt gewoonlijk verkort voorgesteld. Veranderen de tellers van de termen der kettingbreuk in $+1$ of -1, dan noemt men de kettingbreuk *eenvoudig*.

Eene zelfde verhouding wordt niet noodzakelijk door eene zelfde kettingbreuk uitgedrukt. Door de absoluut kleinste resten te nemen volgens zekeren modulus, heeft men:

$$\tfrac{13}{8} = \{1, 1, 1, 1, 2\} = \{2, -3, 3\}$$

$$\tfrac{153}{165} = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2\}$$

en $\tfrac{153}{165} = \{2, -3, 3, -2, -3, 3, -4\}$.

Evenzoo zal men vinden:

$$\tfrac{13}{5} = 4 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{2}}} = 3 - \cfrac{1}{2+\frac{1}{2}} = 4 + \cfrac{1}{2-\frac{1}{2}} = \text{enz.}$$

Verder valt nog op te merken, dat de waarde eener breuk en harer reciproke waarde door den zelfden betrekkingswijzer wordt aangewezen. Om nu aan te duiden, dat de eerste term van den wijzer geheelen zijn, dat dus de betrekkingswijzer bij eene onechte breuk behoort, scheiden wij verder den eersten term door een punt komma van de overige termen, zoodat:

$$\tfrac{13}{5} = \{4; 1, 1, 2\} \quad \text{en} \quad \tfrac{5}{13} = \{4, 1, 1, 2\}.$$

De kettingbreuk, die uit de eerste k termen der geheele kettingbreuk bestaat, wordt de $k$de *naderende breuk* genoemd van de volledige kettingbreuk van n termen. Zoo is

5 de eerste, $5 + \frac{1}{1}$ de tweede, $5 + \cfrac{1}{1+\frac{1}{1}}$ de derde,

$5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}$ de vierde, $5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}$ de vijfde

naderende breuk van de volledige kettingbreuk

$$\tfrac{415}{215} = \{5;\ 1,\ 1,\ 1,\ 3,\ 2\}.$$

Evenzoo zijn $\frac{a_1}{b_1}$, $\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2}}$, $\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\cfrac{a_3}{b_3}}}$, enz.

de 1e, 2e, 3e naderende breuken van de algemeene kettingbreuk:

$$\frac{A}{B} = \left\{\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \frac{a_3}{b_3},\ \ldots\ldots\right\}.$$

Wij zullen thans overgaan tot het bewijzen van eenige stellingen, bij welke wij, zoo zulks niet uitdrukkelijk anders wordt bepaald, steeds de algemeene kettingbreuken op het oog hebben.

2. Stelling. *Eene kettingbreuk verandert niet, wanneer men teller en noemer van één term der breuk en den teller van den volgenden term met hetzelfde getal vermenigvuldigt of daardoor deelt.*

Bewijs. $$\frac{a_k}{b_k+\cfrac{a_{k+1}}{b_{k+1}}} = \frac{a_k \times n}{n\left\{b_k+\cfrac{a_{k+1}}{b_{k+1}}\right\}} = \frac{na_k}{nb_k+\cfrac{na_{k+1}}{b_{k+1}}}.$$

Door verplaatsing van de leden dezer vergelijking blijkt het omgekeerde.

3. Stelling. *Vormt men de beide reeksen:*

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= a_1 & \beta_1 &= b_1\\
\alpha_2 &= \alpha_1 b_2 & \beta_2 &= \beta_1 b_2 + a_2\\
\alpha_3 &= \alpha_2 b_3 + \alpha_1 a_3 & \beta_3 &= \beta_2 b_3 + \beta_1 a_3\\
\alpha_4 &= \alpha_3 b_4 + \alpha_2 a_4 & \beta_4 &= \beta_3 b_4 + \beta_2 a_4\\
&\ldots\ldots\ldots & &\ldots\ldots\ldots\\
\alpha_k &= \alpha_{k-1} b_k + \alpha_{k-2} a_k & \beta_k &= \beta_{k-1} b_k + \beta_{k-2} a_k,
\end{aligned}$$

dan is $\frac{\alpha_k}{\beta_k}$ *de* k*de naderende breuk en* $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$ *de volledige waarde, indien de kettingbreuk uit* n *termen bestaat.*

Bewijs. De $(k+1)^{\text{le}}$ naderende breuk wordt gevonden, door b_k te vervangen door $b_k + \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}$. Is dus de $k$de naderende breuk $\frac{\alpha_k}{\beta_k}$, dan heeft de $(k+1)$de breuk de waarde:

$$\frac{\alpha_{k-1}\left(b_k + \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}\right) + \alpha_{k-2}a_k}{\beta_{k-1}\left(b_k + \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}\right) + \beta_{k-2}a_k} =$$

$$= \frac{\left(\alpha_{k-1}b_k + \alpha_{k-2}a_k\right)b_{k+1} + \alpha_{k-1}a_{k+1}}{\left(\beta_{k-1}b_k + \beta_{k-2}a_k\right)b_{k+1} + \beta_{k-1}a_{k+1}} =$$

$$= \frac{\alpha_k b_{k+1} + \alpha_{k-1}a_{k+1}}{\beta_k b_{k+1} + \beta_{k-1}a_{k+1}} = \frac{\alpha_{k+1}}{\beta_{k+1}}.$$

Is de stelling dus waar voor k gevallen, dan is zij zulks ook voor één geval meer.

Nu is:

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{a_1}{b_1}; \quad \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2}} = \frac{a_1 b_2}{b_1 b_2 + a_2} = \frac{\alpha_1 b_2}{\beta_1 b_2 + a_2} = \frac{\alpha_2}{\beta_2};$$

$$\frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_2}{b_3}}} = \frac{a_1 b_2 b_3 + a_1 a_2}{(b_1 b_2 + a_2)b_3 + b_1 a_2} = \frac{\alpha_2 b_3 + \alpha_1 a_2}{\beta_2 b_3 + \beta_1 a_2} = \frac{\alpha_3}{\beta_3}$$

derhalve enz.

4. Indien men in aanmerking neemt, dat men voor $\alpha_1 = a_1$ ook schrijven kan $a_1 = 0 \cdot b_1 + a_1 \times 1$ en voor $\beta_1 = b_1$ ook $\beta_1 = b_1 \times 1 + a_1 \times 0$; dat verder

$$\frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{\alpha_1 b_2 + 0}{\beta_1 b_2 + a_2 \times 1},$$

dan kan men uit de in het vorig N°. bewezen stelling een eenvoudig middel afleiden, om eene kettingbreuk onmiddellijk samen te stellen uit haren betrekkingswijzer. Immers heeft men:

		$\frac{a_1}{b_1}$	$\frac{a_2}{b_2}$	$\frac{a_3}{b_3}$	
$\frac{1}{0}$,	$\frac{0}{1}$	$\frac{b_1\times 0+a_1\times 1}{b_1\times 1+a_1\times 0}=\frac{\alpha_1}{\beta_1}$	$\frac{b_2\alpha_1+a_2\,.\,0}{b_2\beta_1+a_2\times 1}=\frac{\alpha_2}{\beta_2}$	$\frac{b_3\,.\,\alpha_2+a_3\times\alpha_1}{b_3\times\beta_2+a_3\times\beta_1}=\frac{\alpha_3}{\beta_3}$	enz.

Vooreerst hebben wij hier de oneigenlijke breuken $\frac{1}{0}$ en $\frac{0}{1}$ neêrgeschreven, om daarachter de naderende breuken in hare natuurlijke volgorde te plaatsen. Boven de doorloopende horizontale lijn zijn de achtereenvolgende termen van den betrekkingswijzer geplaatst.

Men vermenigvuldigt nu teller en noemer der onmiddellijk voorgaande breuk $\frac{0}{1}$ met den noemer b_1 van den eersten term des betrekkingswijzers en vermeerdert die beide producten, ieder in 't bijzonder met de producten, die men verkrijgt door den teller van den eersten term der betrekkingswijzers met teller en noemer der laatst voorgaande breuk $\frac{1}{0}$ te vermenigvuldigen. Zoodoende vindt men de eerste naderende breuk. Door nu met de eerste naderende breuk en de breuk $\frac{0}{1}$, welke haar onmiddellijk vooraf gaat, op analooge wijze te handelen, vindt men de tweede naderende breuk, enz.

Ter toepassing diene het volgende

Vraagstuk. *Welke breuk heeft tot betrekkingswijzer*

$$\left\{\frac{2}{5},\ \frac{3}{6},\ \frac{4}{7},\ \frac{5}{8}\right\}?$$

		$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{5}{8}$
$\frac{1}{0}$,	$\frac{0}{1}$	$\frac{0+2}{5+0}=\frac{2}{5}$	$\frac{12+0}{30+3}=\frac{12}{33}$	$\frac{84+8}{231+20}=\frac{92}{251}$	$\frac{736+60}{2008+165}=\frac{796}{2173}$

Deze handelwijze wordt veel eenvoudiger, zoodra alle tellers gelijk zijn aan de eenheid. Men ziet aanstonds, dat in zoodanig geval de $k$de naderende breuk gevonden zal worden door teller en noemer der k—1de breuk te vermenigvuldigen met het $k$de

wijzergetal en bij die producten respectievelijk teller en noemer van de k—2de naderende breuk op te tellen.

Vraagstuk. *Welke verhouding heeft tot betrekkingswijzer*

$$\{2;\ 3,\ 4,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2\}\ ?$$

		2	3	4	1	2	1	2
$\frac{1}{0}$,	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{13}{30}$	$\frac{16}{37}$	$\frac{45}{104}$	$\frac{61}{141}$	$\frac{167}{386}$

De gevraagde verhouding is derhalve $\frac{386}{167}$.

Mochten onder de termen van den betrekkingswijzer sommigen negatief zijn, dan ondergaat de bewerking daardoor hoegenaamd geene verandering.

Vraagstuk. *Welke verhouding behoort bij den betrekkingswijzer*

$$\{2,\ -1,\ -2,\ 3,\ -1,\ -5\}\ ?$$

		2	−1	−2	3	−1	−5
$\frac{1}{0}$,	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{-1}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{8}{11}$	$\frac{-5}{-7}$	$\frac{33}{46}$

5. Stelling. *Wanneer* $\frac{\alpha_{k-1}}{\beta_{k-1}}$, $\frac{\alpha_k}{\beta_k}$ *twee op elkaâr volgende naderende breuken zijn van de verhouding* $\frac{A}{B}$ *en* $\frac{1}{r}$ *de rest der kettingbreuk voorstelt, d. i. indien* $\frac{1}{r}$ *de kettingbreuk voorstelt, die men vormen kan uit de termen* $\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}$, $\frac{a_{k+2}}{b_{k+2}}, \ldots \frac{a_n}{b_n}$, *dan heeft men:*

$$\frac{A}{B} = \frac{\alpha_k r + \alpha_{k-1}}{\beta_k r + \beta_{k-1}}.$$

Bewijs. Uit de $k$de naderende breuk kan men de laatste vinden, indien men den noemer β_k vervangt door $\beta_k + \frac{1}{r}$; men heeft alzoo:

$$\frac{A}{B}=\frac{\alpha_{k-1}\left(b_k+\frac{1}{r}\right)+\alpha_{k-2}a_k}{\beta_{k-1}\left(b_k+\frac{1}{r}\right)+\beta_{k-2}a_k}=$$

$$=\frac{\left(\alpha_{k-1}b_k+\alpha_{k-2}a_k\right)r+\alpha_{k-1}}{\left(\beta_{k-1}b_k+\beta_{k-2}a_k\right)r+\beta_{k-1}}=\frac{\alpha_k r+\alpha_{k-1}}{\beta_k r+\beta_{k-1}}.$$

Uit deze stelling zien wij, dat men den betrekkingswijzer van eenige verhouding in twee of meer deelen splitsen kan, om zoodoende eindelijk de geheele verhouding te bepalen.

Werd bijv. gevraagd de verhouding te vinden, die behoort bij den betrekkingswijzer

$$\{2;\ -3,\ 1,\ -2,\ -5,\ -3\},$$

dan splitsen wij dezen betrekkingswijzer en stellen daartoe

$$\frac{1}{r}=\{-2,\ -5,\ -3\},$$

dan is

		−2	−5	−3
1	0	1	−5	16
0	1	−2	+11	−35

$r=-\frac{16}{11}$.

Voor de kettingbreuk, behoorende bij $\{2;\ -3,\ 1\}$ vinden wij $\frac{3}{5}$, zoodat de waarde van de geheele breuk overgaat in $\frac{35}{11}$, welke waarde wij zonder splitsing onmiddellijk zullen vinden.

6. Stelling. *Het verschil tusschen twee op elkaár volgende naderende breuken is gelijk aan het product van de tellers van alle voorafgaande termen der breuk en van de beide termen, die bij de naderende breuken behooren, vermenigvuldigd met de negatieve eenheid, verheven tot de macht, die gelijk is aan het aantal factoren der tellers, terwijl het product gedeeld moet worden door het product van de noemers der twee op elkander volgende naderende breuken, d. i.*

$$\frac{\alpha_{k-1}}{\beta_{k-1}}-\frac{\alpha_k}{\beta_k}=\frac{(-1)^k a_1 a_2 a_3 \ldots\ldots a_k}{\beta_{k-1}\beta_k}.$$

Eveneens is:

$$\frac{A}{B} - \frac{\alpha_k}{\beta_k} = \frac{(-1)^k a_1 a_2 a_3 \ldots\ldots a_k}{\beta_k(\beta_k r + \beta_{k-1})}.$$

Bewijs.

$$\alpha_{k-1}\beta_k - \alpha_k\beta_{k-1} = \alpha_{k-1}(\beta_{k-1}b_k + \beta_{k-2}a_k) - \beta_{k-1}(\alpha_{k-1}b_k + \alpha_{k-2}a_k)$$
$$= -a_k(\alpha_{k-2}\beta_{k-1} - \alpha_{k-1}\beta_{k-2});$$

$$\alpha_{k-2}\beta_{k-1} - \alpha_{k-1}\beta_{k-2} = \alpha_{k-2}(\beta_{k-2}b_{k-1} + \beta_{k-3}a_{k-1}) -$$
$$- \beta_{k-2}(\alpha_{k-2}b_{k-1} + \alpha_{k-3}a_{k-1}) = -a_{k-1}(\alpha_{k-3}\beta_{k-2} - \alpha_{k-2}\beta_{k-3})$$

. . . . . .

$$\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = a_1(b_1b_2 + a_2) - a_1b_1b_2 = (-1)^2 a_1a_2.$$

Daaruit volgt in 't algemeen:

$$\frac{\alpha_{k-1}}{\beta_{k-1}} - \frac{\alpha_k}{\beta_k} = \frac{\alpha_{k-1}\beta_k - \alpha_k\beta_{k-1}}{\beta_{k-1}\beta_k} = (-1)^k \cdot \frac{a_1a_2 \ldots a_k}{\beta_{k-1}\beta_k}.$$

Verder is:

$$\frac{A}{B} - \frac{\alpha_k}{\beta_k} = \frac{a_k r + \alpha_{k-1}}{\beta_k r + \beta_{k-1}} - \frac{\alpha_k}{\beta_k} = \frac{\alpha_{k-1}\beta_k - \alpha_k\beta_{k-1}}{\beta_k(\beta_k r + \beta_{k-1})} =$$

$$= (-1)^k \frac{a_1a_2a_3 \ldots\ldots a_k}{\beta_k(\beta_k r + \beta_{k-1})}.$$

Stelt men alle tellers gelijk aan de positieve eenheid, dan vindt men voor 't verschil van twee op elkaâr volgende breuken:

$$\pm \frac{1}{\beta_{k-1}\beta_k}.$$

en wel + of − naar gelang k even of oneven is.

Eveneens heeft men:

$$\frac{A}{B} - \frac{\alpha_k}{\beta_k} = \pm \frac{1}{\beta_k(\beta_k r + \beta_{k-1})}.$$

7. Stelling. *Wanneer de getallen $a_1, a_2, \ldots b_1, b_2, \ldots$ allen positief zijn, dan zijn de verschillen beurtelings positief en negatief. Elk verschil is absoluut kleiner dan het voorgaande;*

de naderende breuken van oneven rangorde vormen eene dalende reeks, die van even rangorde eene klimmende, die meer en meer tot de juiste waarde naderen.

Bewijs. Het eerste gedeelte dezer stelling blijkt onmiddellijk uit het voorgaande N°. Stelt men het $n$de verschil voor door v_n, dan is:

$$v_{k-1} = (-1)^k \frac{a_1 a_2 \ldots a_k}{\beta_{k-1}\beta_k} \text{ en } v_k = (-1)^{k+1} \frac{a_1 a_2 \ldots a_{k+1}}{\beta_k \beta_{k+1}},$$

dus ook: $$v_k = -v_{k-1} \frac{\beta_{k-1} a_{k+1}}{\beta_{k+1}}$$

Verder is:

$$\frac{\beta_{k-1} a_{k+1}}{\beta_{k+1}} = \frac{\beta_{k-1} a_{k+1}}{\beta_k b_{k+1} + \beta_{k-1} a_{k+1}} = \frac{1}{1 + \frac{\beta_k b_{k+1}}{\beta_{k-1} a_{k+1}}} < 1,$$

dus absoluut genomen

$$v_1 < v_2 < v_3 < v_4 \ldots\ldots$$

Hieruit volgt verder:

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} - \frac{\alpha_2}{\beta_2} > \frac{\alpha_3}{\beta_3} - \frac{\alpha_2}{\beta_2} > \frac{\alpha_3}{\beta_3} - \frac{\alpha_4}{\beta_4} > \ldots\ldots$$

dus ook:

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} > \frac{\alpha_3}{\beta_3} > \frac{\alpha_5}{\beta_5} > \ldots\ldots$$

$$\frac{\alpha_2}{\beta_2} < \frac{\alpha_4}{\beta_4} < \frac{\alpha_6}{\beta_6} < \ldots\ldots$$

Het is om deze eigenschap, dat men de achtereenvolgende breuken *naderende breuken* noemt.

8. Stelling. *Wanneer alle tellers gelijk zijn aan de eenheid en alle termen positief zijn, dan zijn de naderende breuken onvereenvoudigbaar; bovendien drukken zij de geheele verhouding nauwkeuriger uit dan kleinere geheele positieve getallen.*

Bewijs. **1°.** Indien de naderende breuk $\frac{\alpha_k}{\beta_k}$ vereenvoudigd kan

worden, dan is ook het verschil van $\frac{\alpha_k}{\beta_k}$ en $\frac{\alpha_{k-1}}{\beta_{k-1}}$ door hetzelfde getal deelbaar, want $\frac{pm}{qm} - \frac{r}{s}$, waarin m, p, q, r en s relatief priem zijn, is gelijk aan $\frac{(ps-qr)m}{qsm}$.

Nu is

$$\frac{\alpha_{k-1}}{\beta_{k-1}} - \frac{\alpha_k}{\beta_k} = \frac{\beta_k\alpha_{k-1} - \alpha_k\beta_{k-1}}{\beta_k\beta_{k-1}} = \frac{\pm 1}{\beta_k\beta_{k-1}}$$

de teller heeft intusschen geen enkelen deeler, kan dus met den noemer geen deeler gemeen hebben, enz.

2°. De breuk ligt tusschen $\frac{\alpha_{k-1}}{\beta_{k-1}}$ en $\frac{\alpha_k}{\beta_k}$; kon men hare waarde nauwkeuriger voorstellen door $\frac{a}{b}$ dan door $\frac{\alpha_k}{\beta_k}$, terwijl $\alpha_k > a$ en $\beta_k > b$, dan zou:

$$\frac{\alpha_{k-1}}{\beta_{k-1}} - \frac{\alpha_k}{\beta_k} > \frac{\alpha_{k-1}}{\beta_{k-1}} - \frac{a}{b} \text{ of } \frac{1}{\beta_{k-1}\beta_k} > \frac{b\alpha_{k-1} - a\beta_{k-1}}{b\beta_{k-1}}$$

of $$b > \beta_k\ (b\alpha_{k-1} - a\beta_{k-1}).$$

Dewijl nu $b\alpha_{k-1} - a\beta_{k-1}$ niet gelijk kan zijn aan 0 en alle daarin voorkomende getallen geheele getallen zijn, is $b > \beta_k$ (absoluut genomen) enz.

9. Indien men eene naderende breuk $\frac{\alpha_k}{\beta_k}$ schrijft in plaats van de volledige waarde der kettingbreuk, dan is het juiste verschil

$$(-1)^k \frac{a_1 a_2 \cdots\cdots a_k}{\beta_k(\beta_k r + \beta_{k-1})}.$$

Worden nu alle tellers $= 1$ en alle termen positief, dan is

de absolute onnauwkeurigheid, wanneer men $\frac{a_k}{\beta_k}$ neemt in plaats van $\frac{A}{B}$, kleiner dan $\frac{1}{(\beta_k)^2}$.

Neemt men dus in plaats van eenige verhouding eene of andere naderende breuk, dan zal men kunnen bepalen welken graad van nauwkeurigheid men bereikt heeft. — Voorbeelden hiervan bij te brengen zal wel onnoodig zijn.

10. Tot nog toe hebben wij gesproken van eindige kettingbreuken. Eene oneindig voortloopende kettingbreuk bestaat uit een oneindig aantal termen, hetzij deze in zekere volgorde terugkeeren, hetzij allen verschillend zijn. De eerste soort noemt men *wederkeerende* of *periodieke* kettingbreuken. Keeren een zeker aantal wijzergetallen in bepaalde volgorde terug, dan zullen wij, even als bij de tiendeelige breuken, het eerste en laatste wijzergetal der periode doorstreepen. Zoo is:

$$\{4; 3, 1, 8, 9, 6, 5\} =$$
$$= \{4; 3,1,8,9,6,5, 3,1,8,9,6,5, 3,1,8,9,6,5, \text{enz.}\}$$

11. Stelling. *Oneindig voortloopende kettingbreuken met positieve termen convergeeren, indien voor elke willekeurige waarde van k de breuk* $\frac{b_k b_{k-1}}{a_{k+1}}$ *grooter blijft dan* 0.

Bewijs. Stelt men voor elke willekeurige waarde van k, de waarde der opgegeven breuk $> c$ en $c > 0$, dan heeft men:

$$\frac{\beta_{k-1}a_{k+1}}{\beta_{k+1}} = \frac{\beta_{k-1}a_{k+1}}{\beta_k b_{k+1} + \beta_{k-1}a_{k+1}} = \frac{1}{1 + \frac{\beta_k b_{k+1}}{\beta_{k-1}a_{k+1}}} =$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{b_{k+1}(\beta_{k-1}b_k + \beta_{k-2}a_k)}{\beta_{k-1}a_{k+1}}} = \frac{1}{1 + \frac{b_{k+1}b_k}{a_{k+1}}\left(1 + \frac{\beta_{k-2}a_k}{\beta_{k-1}b_k}\right)}.$$

Hieruit volgt onmiddellijk:

$$\frac{\beta_{k-1}a_{k+1}}{\beta_{k+1}} < \frac{1}{1+c}.$$

Berekent men nu op grond van N°. 7, de achtereenvolgende verschillen der naderende breuken, dan vindt men:

$$v_2 = -v_1 \frac{\beta_1 a_2}{\beta_2}$$

$$v_3 = -v_2 \frac{\beta_2 a_3}{\beta_3} = (-1)^2 v_1 \frac{\beta_1 a_2}{\beta_2} \times \frac{\beta_2 a_3}{\beta_3}$$

$$v_n = (-1)^{n-1} v_1 \frac{\beta_1 a_2}{\beta_2} \cdot \frac{\beta_2 a_3}{\beta_3} \cdot \ldots \cdot \frac{\beta_{n-1} a_{n+1}}{\beta_{n+1}};$$

dus op grond van het betoogde en absoluut genomen

$$v_n < v_1 \left(\frac{1}{1+c}\right)^{n-1}.$$

Met het toenemen van n verdwijnt dus de waarde van de breuk $\left(\frac{1}{1+c}\right)^{n-1}$; het $n$de verschil nadert dus meer en meer tot nul; de kettingbreuk is alzoo convergent.

12. Stelling. *Wanneer $a_1, a_2 \ldots\ldots a_n$ positieve getallen zijn grooter dan één, dan is de eenheid de limiet voor de waarde der kettingbreuk:*

$$\cfrac{a_1}{a_1 + 1 + \cfrac{-a_2}{a_2 + 1 + \cfrac{-a_3}{a_3 + 1 + \cfrac{-a_4}{a_4 + 1 + \text{enz.}}}}}$$

Bewijs. Door k groot genoeg te nemen, worden de getallen a_k en β_k grooter dan eenig aan te geven getal, want volgens N°. 3 is:

$$a_k = a_{k-1}(a_k + 1) - a_{k-2}a_k$$

of

$$a_k - a_{k-1} = (a_{k-1} - a_{k-2})\, a_k,$$

omdat hier

$$b_k = a_k + 1.$$

Nu is verder $\alpha_2 - \alpha_1 = a_1 a_2$, derhalve:

$$\alpha_3 - \alpha_2 = a_1 a_2 a_3 \ldots\ldots \text{ enz.}$$

Verder is volgens hetzelfde N°.:

$$\beta_k - \alpha_k = (\beta_{k-1} - \alpha_{k-1})\, b_k + (\beta_{k-2} - \alpha_{k-2}) a_k$$
$$= (\beta_{k-1} - \alpha_{k-1})(a_k + 1) - (\beta_{k-2} - \alpha_{k-2}) a_k.$$

Verder is:

$$\beta_1 - \alpha_1 = a_1 + 1 - a_1 = 1,$$
$$\beta_2 - \alpha_2 = (\beta_1 - \alpha_1)(a_2 + 1) - a_2 = 1$$
enz.
$$\beta_k - \alpha_k = 1.$$

Men heeft dus $\frac{\alpha_k}{\beta_k} = \frac{1}{1 + \frac{1}{a_k}}$ en voor toenemende waarden van k, $lim\, \frac{\alpha_k}{\beta_k} = 1$.

13. Stelling. *Wanneer $a_1, a_2 \ldots\ldots b_2, b_2 \ldots\ldots$ positieve getallen zijn, grooter dan 1 en $b_k - a_k$ voor alle waarden van k grooter is dan één, dan convergeert de kettingbreuk*

$$\cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{-a_2}{b_2 + \cfrac{-a_3}{b_3 + \text{enz.}}}}$$

en hare waarde zal steeds kleiner blijven dan één.

Bewijs. De getallen $\alpha_1, \alpha_2 \ldots\ldots \beta_1, \beta_2 \ldots\ldots$ zijn steeds positief en vormen klimmende reeksen, terwijl $\beta_k - \alpha_k$ op grond van de vorige stelling grooter moet zijn dan één. Verder is:

$$v_{n-1} = (-1)^{n-2} v_1 \times \frac{\beta_1 a_2}{\beta_2} \times \frac{\beta_2 a_3}{\beta_3} \times \ldots \frac{\beta_{n-1} a_{n+1}}{\beta^{n+1}},$$

waarin $v_1 = \frac{a_1}{b_1} - \frac{a_1 b_2}{b_1 b_2 - a_2} = -\frac{a_1 a_2}{b_1(b_1 b_2 - a_2)}$

negatief is; behalve den factor $(-1)^{n-2}$ heeft men nog $(n-1)$ negatieve factoren; v_{n-1} is dus altijd negatief; de breuken

$\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \ldots\ldots$ vormen dus eene klimmende reeks; elke volgende breuk is grooter dan de voorgaande.

Maar omdat

$$\frac{\alpha_k}{\beta_k} = \frac{1}{\frac{\beta_k}{\alpha_k}} = \frac{1}{1+\frac{\nu}{\alpha_k}}, \text{ waarin } \nu > 1,$$

heeft men:

$$lim \frac{\alpha_k}{\beta_k} < 1.$$

14. Stelling. *Wanneer* $a_1, a_2 \ldots\ldots b_1, b_2, \ldots\ldots$ *geheele positieve getallen zijn en* $b_k - a_k > 1$ *voor elke waarde van* k, *dan zijn de oneindig voortloopende kettingbreuken*

$$\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\cfrac{a_3}{b_3+\text{enz.}}}} \quad \text{en} \quad \cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{-a_2}{b_2+\cfrac{-a_3}{b_3+\text{enz.}}}}$$

irrationeel.

Bewijs. Volgens N°. 7 kan de eerste kettingbreuk nooit grooter worden dan 1, volgens het vorige N°. is zulks ook het geval met de tweede. Nemen wij nu aan, dat de opgegeven kettingbreuken de verhouding aanwijzen van rationeele getallen, dan kunnen wij stellen, omdat in dat geval elke rest rationeel is:

$$\frac{c_1}{c} = \cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{c_2}{c_1}}, \quad \frac{c_2}{c_1} = \cfrac{a_2}{b_2+\cfrac{c_3}{c_2}}, \text{ enz.,}$$

waarin $c > c_1 > c_2 > c_3 >$ enz. respectievelijk de twee rationeele getallen en de achtereenvolgende resten voorstellen.

Verder is $$c_1 = \frac{cc_1a_1}{c_1b_1 + c_2},$$

$$c_2 = \frac{c_1c_2a_2}{c_2b_2 + c_3},$$

of $$c\,a_1 = c_1b_1 + c_2,\ c_1a_2 = c_2b_2 + c_3, \ldots\ldots;$$

$c_2, c_3, c_4, \ldots\ldots$ zijn dus geheele getallen, welker rij afneemt tot nul en daar dit met de veronderstelling strijdt, dat iedere rest moet liggen tusschen 0 en 1, kan de kettingbreuk niet rationeel zijn.

15. Om een willekeurig gebroken, welks termen oneindig voortloopende reeksen zijn, tot eene kettingbreuk te herleiden, volgt men de gewone handelwijze. Wordt bijv. gevraagd tot eene kettingbreuk te herleiden

$$Q = \frac{b + b' + b'' + b''' + \text{enz.}}{a + a' + a'' + a''' + \text{enz.}},$$

dan vindt men:

$$Q = \frac{1}{\dfrac{a + a' + a'' + a''' + \text{enz.}}{b + b' + b'' + b''' + \text{enz.}}}$$

$$\text{en } \frac{a + a' + a'' + a''' + \text{enz.}}{b + b' + b'' + b''' + \text{enz.}} =$$

$$= \frac{a}{b} + \frac{\left(a' - \frac{ab'}{b}\right) + \left(a'' - \frac{ab''}{b}\right) + \left(a''' - \frac{ab'''}{b}\right) + \text{enz.}}{b \quad + \quad b' \quad + \quad b''}$$

Stelt men daarin:

$$a' - \frac{ab'}{b} = c, \quad a'' - \frac{ab''}{b} = c', \quad a''' - \frac{ab'''}{b} = c''' \text{ enz.},$$

dan heeft men:

$$Q = \frac{1}{\dfrac{a}{b} + \dfrac{1}{\dfrac{b + b' + b'' + b''' + \text{enz.}}{c + c' + c'' + c''' + \text{enz.}}}}$$

Stelt men in deze ontwikkeling

$$b' - \frac{bc'}{c} = d, \quad b'' - \frac{bc''}{c} = d', \quad b''' - \frac{bc'''}{c} = d''', \text{ enz.},$$

dan heeft men:

$$Q = \frac{1}{\dfrac{a}{b} + \dfrac{1}{\dfrac{b}{c} + \dfrac{d + d' + d'' + d''' + \text{enz.}}{c + c' + c'' + c''' + \text{enz.}}}}$$

Op analooge wijze voortgaande vindt men:

$$Q = \cfrac{1}{\frac{a}{b} + \cfrac{1}{\frac{b}{c} + \cfrac{1}{\frac{c}{d} + \cfrac{1}{\frac{d}{e} + \text{enz.},}}}}$$

waarin:

$$\left.\begin{array}{l} c = a' - \frac{ab'}{b} \\ c' = a'' - \frac{ab''}{b} \\ \ldots\ldots\ldots \\ c^{(k)} = a^{(k+1)} - \frac{ab^{(k+1)}}{b} \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{l} d = b' - \frac{bc'}{c} \\ \ldots\ldots\ldots \\ d^{(k)} = b^{(k+1)} - \frac{bc^{(k+1)}}{c} \end{array}\right| \text{ enz.}$$

Door middel van deze kettingbreuk kunnen alle wortels uit een- en veeltermige vormen, zoowel als alle oneindig voortloopende reeksen tot eene kettingbreuk herleid worden. Laat bijv. gevraagd worden, tot eene kettingbreuk te herleiden den vorm $\frac{x}{(y^2-1)^{\frac{1}{2}}}$, dan kan men daarvoor schrijven:

$$\cfrac{x + 0 + 0 + 0 + 0}{y - \frac{1}{2}y^{-1} - \frac{1}{8}y^{-3} - \frac{1}{16}y^{-5} - \frac{1}{128}y^{-7} - \text{enz.}}$$

Men stelle dus:

$$b = x,\ b' = b'' = b''' = \text{enz.} = 0$$

en $a = y,\ a' = -\frac{1}{2}y^{-1},\ a'' = -\frac{1}{8}y^{-3}$, enz.

Hierdoor vindt men:

$$c = -\tfrac{1}{2}y^{-1},\ d = -\tfrac{1}{4}xy^{-2},\ e = \tfrac{1}{8}y^{-3},\ \text{enz.};$$

zoodat men voor den opgegeven vorm eindelijk schrijven kan:

$$\frac{x}{(y^2-1)^{\frac{1}{2}}} = \cfrac{1}{\frac{y}{x} + \cfrac{1}{\frac{x}{-\frac{1}{2}y^{-1}} + \cfrac{1}{\frac{-\frac{1}{2}y^{-1}}{-\frac{1}{4}xy^{-2}} + \cfrac{1}{\frac{-\frac{1}{4}xy^{-2}}{\frac{1}{8}y^{-3}} + \text{enz.}}}}}$$

welke breuk na behoorlijke herleiding overgaat in:

$$\cfrac{x}{y-\cfrac{1}{2y-\cfrac{1}{2y-\cfrac{1}{2y-\text{enz.}}}}}$$

Wij hebben vroeger gevonden:

boog tang $x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \text{enz.}$

Stellen wij hierin:

$$a = 1\,,\ a' = a'' = a''' = \text{enz.} = 0$$
$$b = x\,,\ b' = -\tfrac{1}{3}x^3\,,\ b'' = \tfrac{1}{5}x^5\,,\ \text{enz.},$$

dan vindt men na behoorlijke herleiding:

$$\textit{boog tang}\ x = \cfrac{1}{\cfrac{1}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{3}{x}+\cfrac{4}{\cfrac{5}{x}+\cfrac{9}{\cfrac{7}{x}+\text{enz.}}}}}$$

16. Eene andere leerwijze om eene reeks tot eene kettingbreuk te herleiden is de volgende:

Zij gegeven: $s = \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} - \text{enz.},$

dan is: $\frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_1} = \cfrac{1}{\cfrac{u_0u_1 - u_0^2 + u_0^2}{u_1 - u_0}} = \cfrac{1}{u_0 + \cfrac{u_0^2}{u_1 - u}}.$

Vervangt men in deze vergelijking $\frac{1}{u_1}$ door $\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2}$, of wat hetzelfde is, substitueert men daarin $u_1 + \cfrac{u_1^2}{u_2 - u_1}$ voor u_1, dan zal men vinden:

$$\frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} = \cfrac{1}{u_0 + \cfrac{u_0^2}{u_1 + \cfrac{u_1^2}{u_2 - u_1} - u_0}} = \cfrac{1}{u_0 - \cfrac{u_0^2}{u_1 - u_0 + \cfrac{u_1^2}{u_2 - u_1}}}.$$

Vervangt men hierin $\frac{1}{u_2}$ door $\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_3}$, dan vindt men:

$$\frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_3} = \cfrac{1}{u_0 + \cfrac{u_0^2}{u_1 - u_0 + \cfrac{u_1^2}{u_2 - u_1 + \cfrac{u_2^2}{u_3 - u_2}}}}$$

Nemen wij ter toepassing:

$$^e log\, 2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \text{enz.}$$

dan is:

$$elog\, 2 = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{4}{1 + \cfrac{9}{1 + \cfrac{16}{1} + \text{enz.}}}}}$$

Eveneens verandert de reeks:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \text{enz.}$$

in

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2} + \text{enz.}}}}}$$

Aanmerkingen. De laatste kettingbreuk is van *Mylord* Brouncker, die door deze kettingbreuk de verhouding uitdrukte van den cirkel en den omgeschreven vierhoek; men weet intusschen niet, hoe hij aan deze verhouding gekomen is. Wallis geeft het middel aan de hand om kettingbreuken te herleiden tot gewone; maar de bijzondere eigenschappen der breuken schijnen onbekend gebleven te zijn, tot dat Huyghens in zijn *Automatum planetarium*, de eerste theorie der kettingbreuken schreef. Euler heeft den naam *fractio continua* ingevoerd; de naam *kettingbreuk* dagteekent uit het laatst der voorgaande eeuw. Met

een en ander kan men vergelijken: LAGRANGE's *Additions aux Éléments d' Algèbre par* M. L. EULER 1774; GAUSS *Disq. circa seriem inf.* 1812. KLÜGEL's W. III. en S. II.; BALTZER's *Elemente*; VORSELMAN DE HEER's *De fract. cont.*, e. a.

17. Om de reeks

$$S=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_1a_2a_3}-\frac{1}{a_1a_2a_3a_4}+\ldots.$$

tot eene kettingbreuk te herleiden, heeft men:

$$\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_1a_2}=\frac{1}{\frac{a_1a_2-a_1+a_1}{a_2-1}}=\frac{1}{a_1+\frac{a_1}{a_2-1}};$$

Om nu de som van drie termen tot eene kettingbreuk te vervormen, moet men $\frac{1}{a_1a_2}$ vervangen door $\frac{1}{a_1a_2}-\frac{1}{a_1a_2a_3}$, of wat het zelfde is:

$$a_2 \text{ door } \frac{1}{\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_2a_3}}=a_2+\frac{a_2}{a_3-1};$$

waardoor de reeks overgaat in:

$$\cfrac{1}{a_1+\cfrac{a_1}{a_2-1+\cfrac{a_2}{a_3-1}}}.$$

Gaat men op deze wijze voort, telkens één' term der reeks meer gebruikende, dan vindt men:

$$S=\cfrac{1}{a_1+\cfrac{a_1}{a_2-1+\cfrac{a_2}{a_3-1+\cfrac{a_3}{a_4-1+\cfrac{a_4}{a_5-1+\text{enz.}}}}}}$$

Door deze ontwikkeling toe te passen op de reeks

$$1-\frac{1}{e}=1-\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}-\frac{1}{1.2.3.4},$$

vindt men:

$$1-\frac{1}{e}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{4}{4+\text{enz.}}}}}}$$

18. Eene andere zeer fraaie ontwikkeling eener reeks in eene kettingbreuk is de volgende. Stellen wij, dat wij hebben de reeks:

$$\varphi(x)=1+\frac{a}{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{x(x+1)}+\frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{a^3}{x(x+1)(x+2)}+\text{enz}$$

dan is ook:

$$\varphi(x+1)=1+\frac{a}{x+1}+\frac{1}{1.2}\frac{a^2}{(x+1)(x+2)}+$$
$$+\frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{a^3}{(x+1)(x+2)(x+3)}+\text{enz.}$$

waaruit door aftrekking volgt, omdat men in het algemeen heeft,

$$\frac{a^n}{1.2.3...n}\cdot\frac{1}{x(x+1)...(x+n-1)}-\frac{a^n}{1.2...n}\frac{1}{(x+1)...(x+n)}=$$
$$=\frac{a^n}{1.2....n}\cdot\frac{n}{x(x+1)...(x+n)}:$$

$$\varphi(x)-\varphi(x+1)=\frac{a}{x(x+1)}+\frac{a^2}{x(x+1)(x+2)}+$$
$$+\frac{1}{1.2}\frac{a^3}{x(x+1)...(x+3)}+\text{enz.}$$
$$=\frac{a}{x(x+1)}\Big(1+\frac{a}{x+2}+\frac{1}{1.2}\cdot\frac{a^2}{(x+2)(x+3)}+$$
$$+\frac{1}{1.2.3}\frac{a^3}{(x+2)(x+3)(x+4)}+\text{enz.}\Big)=\frac{a}{x(x+1)}\varphi(x+2).$$

Men heeft dus:

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)}-1=\frac{a}{x(x+1)\varphi(x+1)}\varphi(x+2).$$

Stellen wij hierin:

$$\psi(x)=\frac{a\varphi(x+1)}{x\varphi(x)},\ \text{dus}\ \psi(x+1)=\frac{a\varphi(x+2)}{(x+1)\varphi(x+1)},$$

dan vinden wij $\psi(x)=\dfrac{a}{x+\psi(x+1)}$;

en hiermede analoog:

$$\psi(x+1)=\frac{a}{(x+1)+\psi(x+2)}$$

$$\psi(x+2)=\frac{a}{(x+2)+\psi(x+3)}$$

. . . . . .

zoodat men eindelijk kan schrijven:

$$\psi(x)=\frac{a}{x+\psi(x+1)}=\frac{a}{x+\dfrac{a}{(x+1)+\psi(x+2)}}=\frac{a}{x+\dfrac{a}{(x+1)+\dfrac{a}{(x+2)+\psi(x+3)}}}=\text{enz.},$$

waarin

$$\psi(x)=\frac{a\varphi(x+1)}{x\varphi(x)}=\frac{a}{x}\cdot\frac{1+\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{1}{1.2}\cdot\dfrac{a^2}{(x+1)(x+2)}+\text{enz.}}{1+\dfrac{a}{x}+\dfrac{1}{1.2}\dfrac{a^2}{x(x+1)}+\text{enz.}}$$

Nemen wij hierin $x=\frac{1}{2}$, dan vindt men:

$$2a\cdot\frac{1+\dfrac{4a}{2.3}+\dfrac{16a^2}{2.3.4.5}+\dfrac{64a^3}{2.3.4.5.6.7}+\text{enz.}}{1+\dfrac{4a}{2}+\dfrac{16a^2}{2.3.4}+\dfrac{64a^3}{2.3.4.5.6}+\text{enz.}}=\cfrac{2a}{1+\cfrac{4a}{3+\cfrac{4a}{5+\cfrac{4a}{7+\text{enz.}}}}}$$

Wordt in de formule

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^4}{2.3.4}+\text{enz.}$$

x gelijk aan $2\sqrt{a}$ en $-2\sqrt{a}$ gesteld, dan vindt men door aftrekking en optelling, deeling en eindelijk vermenigvuldiging met $\sqrt{a}$

$$\frac{e^{2\sqrt{a}} - e^{-2\sqrt{a}}}{e^{2\sqrt{a}} + e^{-2\sqrt{a}}} \cdot \sqrt{a} = 2a \frac{1 + \frac{4a}{2.3} + \frac{16a^2}{2.3.4.5} + \text{enz.}}{1 + \frac{4a}{2} + \frac{16a^2}{2.3.4} + \text{enz.}} =$$

$$= \cfrac{2a}{1 + \cfrac{4a}{3 + \cfrac{4a}{5 + \text{enz.}}}}$$

Stellen wij hierin wederom $2\sqrt{a} = x$, dan gaat de formule over in:

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{3 + \cfrac{x^2}{5 + \cfrac{x^2}{7 + \text{enz.}}}}}$$

Nemen wij eindelijk nog de omgekeerde waarde van de breuk en stellen wij daarna $x = \frac{1}{2}$, dan vinden wij:

$$\frac{e^{\frac{1}{2}} + e^{-\frac{1}{2}}}{e^{\frac{1}{2}} - e^{-\frac{1}{2}}} = 1 + \frac{2}{e-1} = 2 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \text{enz.}}}}$$

of eindelijk:

$$\frac{e-1}{2} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \text{enz.}}}}$$

$$+ \cfrac{1}{4n + 2 + \ldots}$$

Aanmerking. Deze laatste formule, de gemakkelijkste om het getal e te berekenen, is van EULER. De ontwikkeling der reeks $\varphi(x)$ is van LEGENDRE.

19. Laat thans gevraagd worden

$$F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ x)=1+\frac{\alpha\,\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1).\beta(\beta+1)}{1.\ \ 2.\ \ \gamma(\gamma+1)}x^2+$$
$$+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2).\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.\ \ 2.\ \ 3\ \ \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\text{enz. . . (1)}$$

te ontwikkelen in eene kettingbreuk.

Uit (1) volgt aanstonds

$$F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)=1+\frac{\alpha(\beta+1)}{1.(\gamma+1)}x+\frac{\alpha(\alpha+1)(\beta+1)(\beta+2)}{1.\ \ 2\ \ (\gamma+1)(\gamma+2)}x^2+$$
$$+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ (\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)}x^3+\text{enz. . . . (2)}$$

en $F(\alpha+1,\ \beta+1,\ \gamma+2,\ x)=1+\dfrac{(\alpha+1)(\beta+1)}{1.\ \ (\gamma+2)}x+$

$$+\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)(\beta+1)(\beta+2)}{1.\ \ 2.\ \ (\gamma+2)(\gamma+3)}x^2+$$
$$+\frac{(\alpha+1)(\alpha+2(\alpha+3)(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ (\gamma+2)(\gamma+3)(\gamma+4)}x^3+\text{enz. . . . (3)}$$

Vermindert men nu de vergelijking (2) met (1), dan bekomt men:

$$F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)-F(\alpha,\beta,\gamma,x)=\frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)}x\times F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2,x);\ (4)$$

Stelt men hierin

$$\frac{F(\alpha,\ \beta+1,\ \gamma+1,\ x)}{F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ x)}=G(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ x),$$

dan heeft men ook, door verwisseling van α met β:

$$\frac{F(\alpha+1,\ \beta,\ \gamma+1,\ x)}{F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ x)}=\frac{F(\beta,\ \alpha+1,\ \gamma+1,\ x)}{F(\beta,\ \alpha,\ \gamma,\ x)}=G(\beta,\alpha,\gamma,x)$$

Uit (4) volgt na deeling door $F(\alpha,\ \beta+1,\ \gamma+1,\ x)$:

$$1-\frac{1}{G(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ x)}=\frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)}x\,.\,G(\beta+1,\ \alpha,\ \gamma+1,\ x)$$

of $$G(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ x)=\frac{1}{1-\dfrac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)}x\,.\,G(\beta+1,\ \alpha,\ \gamma+1,\ x)}$$

waaruit door verwisseling van letters gemakkelijk wordt afgeleid:

$$G(\beta+1,\alpha,\gamma+1,x)=\frac{1}{1-\frac{(\beta+1)(\gamma+1-\alpha)}{(\gamma+1)(\gamma+2)}x\,G(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2,x)},$$

$$G(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2,x)=\frac{1}{1-\frac{(\alpha+1)(\gamma+1-\beta)}{(\gamma+2)(\gamma+3)}x\,G(\beta+2,\alpha+1,\gamma+3,x)},$$

enz.

Stelt men dus:

$$\frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)}=a, \qquad \frac{(\beta+1)(\gamma+1-\alpha)}{(\gamma+1)(\gamma+2)}=b,$$

$$\frac{(\alpha+1)(\gamma+1-\beta)}{(\gamma+2)(\gamma+3)}=c, \qquad \frac{(\beta+2)(\gamma+2-\alpha)}{(\gamma+3)(\gamma+4)}=d,$$

enz.

dan heeft men ten slotte:

$$G(\alpha,\beta,\gamma,x)=\cfrac{1}{1-\cfrac{ax}{1-\cfrac{bx}{1-\cfrac{cx}{1-\cfrac{dx}{1-\text{enz.}}}}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Nemen wij hierin verder $\beta = 0$, dan is:

$$F(\alpha,0,\gamma,x) = 1,$$

en dus $G(\alpha,0,\gamma,x) = F(\alpha,1,\gamma+1,x)$,

$$G(\alpha,0,\gamma-1,x) = F(\alpha,1,\gamma,x);$$

d. i.: $$F(\alpha,1,\gamma,x)=\cfrac{1}{1-\cfrac{a'x}{1-\cfrac{b'x}{1-\cfrac{c'x}{1-\cfrac{d'x}{1-\text{enz.}}}}}} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

waarin: $a' = \frac{\alpha}{\gamma}$ $\quad b' = \frac{\gamma-\alpha}{\gamma(\gamma+1)}$

$c' = \frac{(\alpha+1)\gamma}{(\gamma+1)(\gamma+2)}$ $\quad d' = \frac{2(\gamma+1-\alpha)}{(\gamma+2)(\gamma+3)}$

$e' = \frac{(\alpha+2)(\gamma+1)}{(\gamma+3)(\gamma+4)}$ $\quad f' = \frac{3(\gamma+2-\alpha)}{(\gamma+4)(\gamma+5)}$.

enz.

Stelt men in (1) $\alpha = -n$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$ en $x = -x$, dan vindt men:

$$F(-n, 1, 1, -x) = (1+x)^n$$

Neemt men nu in (6) $\alpha = -n$, $\gamma = 1$ en $x = -x$, dan heeft men:

$$(1+x)^n = \cfrac{1}{1 - \cfrac{nx}{1 + \cfrac{\frac{n+1}{2}x}{1 - \cfrac{\frac{n-1}{2.3}x}{1 - \cfrac{\frac{2(n+2)}{3.4}x}{1 - \cfrac{\frac{2(n-2)}{4.5}x}{1 - \text{enz.}}}}}}}$$

waarvoor men ook schrijven kan:

$$(1+x)^n = \cfrac{1}{1 - \cfrac{nx}{1 + \cfrac{1(n+1)x}{2 - \cfrac{1(n-1)x}{3 + \cfrac{2(n+2)x}{4 - \cfrac{2(n-2)x}{5 + \cfrac{3(n+3)x}{6 - \text{enz.}}}}}}}}$$

Schrijft men hierin $x = \frac{z}{n}$ en laat men n tot in oneindige toenemen, dan vindt men:

$$e^z = \cfrac{1}{1-\cfrac{z}{1+\cfrac{1z}{2-\cfrac{1z}{3+\cfrac{2z}{4-\cfrac{2z}{5+\cfrac{3z}{6-\text{enz.}}}}}}}}$$

Omdat $xF(1,1,2,-x) = x(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3+\ldots) =$
$= {}^{e}log\,(1+x)$

heeft men:

$$^{e}log\,(1+x) = \cfrac{x}{1+\cfrac{\frac{1}{2}x}{1+\cfrac{\frac{1}{6}x}{1+\cfrac{\frac{3}{6}x}{1+\ldots}}}} + \cfrac{\frac{n}{4n-2}x}{1+\cfrac{\frac{n}{4n+2}x}{1+\text{enz.}}}$$

Wordt γ oneindig groot, dan heeft men nog:

$$F\left(\frac{m}{n}, 1, \gamma, -n\gamma x\right) = 1 - mx + m(m+n)x^2 -$$
$$- m(m+n)(m+2n)x^3 + \ldots\ldots \text{enz.}$$
$$= \cfrac{1}{1+\cfrac{mx}{1+\cfrac{nx}{1+\cfrac{(m+n)x}{1+\cfrac{2nx}{1+\text{enz.}}}}}}$$

Op soortgelijke wijze kan men nog verschillende andere reeksen in kettingbreuken veranderen.

Aanmerking. Deze fraaie ontwikkeling danken wij aan GAUSS. *Disquisitio circa seriem infinitam* (Abh. Gött.

Geselsch. der Wiss. 1812) — Verder ligt het voor de hand, dat eene oneindige kettingbreuk zal convergeeren, zoodra zij ontstaat uit eene convergente reeks.

20. Om den vierkantswortel uit eenig getal in eene kettingbreuk te ontwikkelen, handele men op de volgende wijze. Zij A een getal, welks wortel men bepalen wil, a^2 het grootste vierkant, dat daarin begrepen is en b de rest, dan heeft men:

$$x = \sqrt{A} = a + \frac{\sqrt{A} - a}{1} = a + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{A} - a}}$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{A} - a} = \frac{\sqrt{A} + a}{b} = \text{enz.}$$

Indien wij op deze wijze voortgaande, eindelijk gekomen zijn aan het quotiënt $x_n = y = \frac{\sqrt{A} + n}{m}$, waarin μ de geheele voorstellen, die in y begrepen zijn, dan is de rest

$$\frac{\sqrt{A} + n - m\mu}{m}.$$

Stellen wij deze rest voor door $\frac{1}{y'}$, dan is analoog met het voorgaande

$$y' = \frac{\sqrt{A} + n'}{m'} \text{ en ook } y' = \frac{m}{\sqrt{A} + n - \mu m}.$$

Door gelijkstelling van deze waarden van y' vindt men de beide vergelijkingen:

$$n - m\mu + n' = 0 \quad \text{en} \quad A + nn' - mn'\mu = nm'$$

$$n' = m\mu - n \qquad\qquad m' = \frac{A - n'^2}{m};$$

hierdoor is de wet opgespoord, volgens welke uit het quotiënt $\frac{\sqrt{A} + n}{m}$ het volgende moet worden afgeleid.

Zijn nu $\frac{\alpha_{k-1}}{\beta_{k-1}}$ en $\frac{\alpha_k}{\beta_k}$ twee op elkaâr volgende naderende breu-

THEORIE

DER

ALGEBRA,

DOOR

G. A. VORSTERMAN VAN OIJEN,

Onderwijzer in de Wis- en Natuurkunde.

Tweede Deel.

SCHOONHOVEN,

S. E. VAN NOOTEN.

1870.

VOORBERICHT.

Na de voltooiing van het tweede deel mijner *Theorie der Algebra* heb ik weinig te voegen bij hetgeen door mij reeds gezegd werd in de opdracht aan den Lezer, welke vóór de eerste aflevering geplaatst is geworden. — De verschillende schrijvers, die door mij geraadpleegd, somtijds ook gevolgd zijn, zijn in aanmerkingen bij den tekst opgegeven. — Aangaande het laatste hoofdstuk *Over de determinanten*, dien ik nog mede te deelen, dat dit gedeeltelijk eene vertaling is van BALTZER's meesterstuk over hetzelfde onderwerp. Ik achtte het namelijk onmogelijk om op een dertigtal bladzijden, die mij nog overbleven, een eenigszins duidelijk begrip van dit belangrijk gedeelte der wiskunde te geven, indien ik mij niet uitsluitend bepaalde tot eene aaneengeschakelde verhandeling over de meest elementaire gedeelten, welke verhandeling zich aan kon sluiten bij de vele werken daarover in het buitenland verschenen. — Mocht dit weinige onze jonge beoefenaren der Wiskunde aansporen die grootere en meer volledige handleidingen te bestudeeren!

Aangaande de vraagstukken, die het geheel besluiten, zij opgemerkt, dat zij deels oorspronkelijk, deels ontleend zijn aan buitenlandsche werken en tijdschriften. Indien mij de noodzakelijkheid daarvan mocht blijken, zal ik ze later afzonderlijk uitgeven met hunne oplossingen.

Voor de gebreken, die mijn werk aankleven, roep ik ieders welwillende beoordeeling in; opgaven van fouten en misstellingen zullen mij aangenaam zijn. Later zal ik een errata op het tweede deel mededeelen. De meeste misslagen kunnen intusschen met de pen verbeterd worden.

En hiermede, heil den gebruiker!

Aardenburg, DE SCHRIJVER.
Kerstmis '69.

ken van $\sqrt{A}$, en $\frac{\sqrt{A}+n}{m}$ het volledig quotiënt, dat met $\frac{\alpha_k}{\beta_k}$ overeenkomt, dan is:

$$\sqrt{A}=\frac{\alpha_k\left(\frac{\sqrt{A}+n}{m}\right)+\alpha_{k-1}}{\beta_k\left(\frac{\sqrt{A}+n}{m}\right)+\beta_{k-1}}=\frac{\alpha_k\sqrt{A}+\alpha_k n+m\alpha_{k-1}}{\beta_k\sqrt{A}+\beta_k n+m\beta_{k-1}}.$$

Hieruit volgen de twee vergelijkingen:

$$\alpha_k n+\alpha_{k-1}m=\beta_k A$$
$$\beta_k n+m\beta_{k-1}=\alpha_k,$$

waaruit men vindt:

$$(\alpha_k\beta_{k-1}-\alpha_{k-1}\beta_k)m=\alpha_k^2-A\beta_k^2 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$
$$(\alpha_k\beta_{k-1}-\alpha_{k-1}\beta_k)n=\beta_k\beta_{k-1}A-\alpha_k\alpha_{k-1} \quad . \quad (2)$$

Omdat van de termen dezer kettingbreuk de tellers $+1$ zijn, is

$$\alpha_k\beta_{k-1}-\alpha_{k-1}\beta_k=\pm 1$$

en wel $+1$, indien $\frac{\alpha_k}{\beta_k}>\sqrt{A}$ en -1 indien $\frac{\alpha_k}{\beta_k}<A$; zoodat

$$\alpha_k^2-A\beta_k^2 \quad \text{en} \quad \alpha_k\beta_{k-1}-\alpha_{k-1}\beta_k$$

steeds hetzelfde teeken hebben; m is derhalve positief.

Uit de vergelijking $\beta_k n+\beta_{k-1}m=\alpha_k$ volgt:

$$\frac{\beta_{k-1}}{\beta_k}=\left(\frac{\alpha_k}{\beta_k}-n\right):m$$

en omdat $\beta_{k-1}<\beta_k$ moet $m>\frac{\alpha_k}{\beta_k}-n$ of $n>\sqrt{A}-n$.

Verder is

$$\frac{\sqrt{A}+n}{m}>\mu \text{ dus } m<\sqrt{A}n$$

't geen onmogelijk zou zijn, indien n negatief was; n is dus ook positief.

Uit $m' = \frac{A - n'^2}{m}$ volgt:

$$A - n'^2 = mm'$$

of in 't algemeen:

$$A - n_k^2 = m_{k-1} m_k,$$

derhalve $n_k < A$ en omdat

$$n + n' = m\mu$$

is $2a$ de limiet van m en μ.

Ter toepassing herleiden wij $\sqrt{28}$ tot eene kettingbreuk.

Het grootste vierkant in 28 begrepen is 25, wij schrijven derhalve:

$$\sqrt{28} = 5 + \frac{\sqrt{28} - 5}{1} = 5 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{28} - 5}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{28} - 5} = \frac{\sqrt{28} + 5}{3} = 3 + \frac{\sqrt{28} - 4}{3} = 3 + \frac{1}{\frac{3}{\sqrt{28} - 4}}$$

$$\frac{3}{\sqrt{28} - 4} = \frac{\sqrt{28} + 4}{4} = 2 + \frac{\sqrt{28} - 4}{4} = 2 + \frac{1}{\frac{4}{\sqrt{28} - 4}}$$

$$\frac{4}{\sqrt{28} - 4} = \frac{\sqrt{28} + 4}{3} = 3 + \frac{\sqrt{28} - 5}{3} = 3 + \frac{1}{\frac{3}{\sqrt{28} - 5}}$$

$$\frac{3}{\sqrt{28} - 5} = \frac{\sqrt{28} + 5}{1} = 10 + \frac{\sqrt{28} - 5}{1} = 10 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{28} - 5}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{28} - 5} =$$

Wij zien, dat hier de bewerking wederom van voren aan begint, dat dus de kettingbreuk periodiek is, en schrijven daarom

$$\sqrt{28} = \{5;\ 3,\ 2,\ 3,\ 10\}.$$

Om zoodanige periodieke kettingbreuk tot eene wortelgroot-

heid te herleiden, stellen wij de periode $= y$, dan is, de geheele waarde door x voorstellende:

$$x = \{5;\ 3,\ 2,\ 3,\ 10,\ y\}$$

$$y = \{3,\ 2,\ 3,\ 10,\ y\}.$$

		3	2	3	10	y
$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{0}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{24}{7}$	$\frac{247}{72}$	$\frac{247y+24}{72y+7}$

		5	3	2	3	10	y
$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{0}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{16}{3}$	$\frac{37}{7}$	$\frac{127}{24}$	$\frac{1307}{247}$	$\frac{1307y+127}{247y+24}$

Uit $y = \frac{247y+24}{72y+7}$ volgt

$$72y^2 - 240y - 24 = 0$$

of

$$y = \tfrac{5}{3} \pm \tfrac{1}{3}\sqrt{28}.$$

Nu is $x = \frac{1307y+127}{247y+24} = \frac{6916 \pm 1307\sqrt{28}}{1307 \pm 247\sqrt{28}} = \pm\sqrt{28}.$

Op soortgelijke wijze handelende, zal men vinden:

$$\sqrt{19} = \{4;\ 2,\ 1,\ 3,\ 1,\ 2,\ 8\}$$

$$\sqrt{21} = \{4;\ 1,\ 7,\ 2,\ 7,\ 1,\ 8\}$$

$$\sqrt{23} = \{4;\ 1,\ 3,\ 1,\ 8\}.$$

Ook de derdemachtswortel uit eenig getal, kan men in eene kettingbreuk ontwikkelen; de berekeningen en herleidingen, die hierbij voorkomen, maken zoodanige ontwikkeling nog al omslachtig. Trekt men den derdemachtswortel uit 19, dan vindt men de volgende bewerking:

$$x = \sqrt[3]{19} = 2 + \frac{\sqrt[3]{19} - 2}{1} = 2 + \frac{1}{x_1}$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{19} - 2} = \frac{\sqrt[3]{361} + 2\sqrt[3]{19} + 4}{11} = 1 + \frac{1}{x_2}$$

$$x_2 = \frac{11}{\sqrt[3]{361} + 2\sqrt[3]{19} - 7} = 2 + \frac{\sqrt[3]{361} + 3\sqrt[3]{19} - 15}{8} = 2 + \frac{1}{x_3}$$

enz.

21. Stelling. *Wanneer A geen volkomen vierkant is, dan wordt $\sqrt{A}$ bij ontwikkeling in eene kettingbreuk periodiek. De periode zal eindigen op het dubbel van den wortel van het grootste vierkant, dat in A begrepen is; rekent men dezen term van de periode niet mede, dan is zij symmetriek; d. i. de periode bevat van voren naar achteren en van achteren naar voren dezelfde termen.*

Bewijs. Wij hebben in het vorige N°. gezien, dat m en n positieve geheele getallen zijn, die slechts een beperkt aantal waarden kunnen krijgen; de kettingbreuk moet dus eindig zijn of periodiek. Het eerste is onmogelijk, enz.

Zijn de achtereenvolgende quotiënten

$$a;\ \alpha,\ \beta, \ldots\ldots \lambda,\ \mu;\ \alpha,\ \beta, \ldots\ldots \lambda,\ \mu; \ldots\ldots$$

en de naderende breuken

$$\frac{1}{0},\ \frac{a}{1} \ldots\ldots \frac{\alpha_{k-1}}{\beta_{k-1}},\ \frac{\alpha_k}{\beta_k},\ \frac{\alpha_{k+1}}{\beta_{k+1}} \ldots\ldots$$

Indien nu $\frac{\alpha_k}{\beta_k}$ de naderende breuk is, die met het wijzergetal μ overeenkomt, en wij het daarmede overeenstemmende geheele quotiënt z noemen, dan is

$$\sqrt{A} = \frac{\alpha_k z + \alpha_{k-1}}{\beta_k z + \beta_{k-1}}$$

en $\quad z - \mu = \sqrt{A} - a \quad$ of $\quad z = \sqrt{A} + (\mu - a)$.

Brengt men de waarde van z in de vorige vergelijking over, dan vindt men:

$$\sqrt{A} = \frac{\alpha_k \sqrt{A} + \alpha_k(\mu - a) + \alpha_{k-1}}{\beta_k \sqrt{A} + \beta_k(\mu - a) + \beta_{k-1}}$$

waaruit de twee volgende vergelijkingen voortvloeien:

$$\alpha_k(\mu - a) + \alpha_{k-1} = A\beta_k \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\beta_k(\mu - a) + \beta_{k-1} = \alpha_k \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Uit de laatste dezer vergelijkingen volgt:

$$\mu - a + \frac{\beta_{k-1}}{\beta_k} = \frac{\alpha_k}{\beta_k},$$

derhalve is $\mu - a$ het grootste geheele getal, dat in $\frac{\alpha_k}{\beta_k}$ begrepen is; dit getal is a, daarom heeft men

$$\mu - a = a \quad \text{of} \quad \mu = 2a;$$

waardoor het tweede gedeelte der stelling bewezen is.

Uit (2) volgt verder:

$$\beta_{k-1} = \alpha_k - a\beta_k$$

en dewijl $\frac{\alpha_k - a\beta_k}{\beta_k}$ eene naderende breuk is van $\sqrt{A} - a$ en voorafgegaan wordt door de naderende breuk $\frac{\alpha_{k-1} - a\beta_{k-1}}{\beta_{k-1}}$, d. i. door $\frac{\alpha_{k-1} - a\beta_{k-1}}{\alpha_k - a\beta_k}$ zullen de wijzergetallen in tegengestelde volgorde terugkeeren, want:

$$\beta_k = \mu\beta_{k-1} + \beta_{k-2}, \text{ dus } \frac{\beta_{k-1}}{\beta_k} = \frac{\beta_{k-1}}{\mu\beta_{k-1} + \beta_{k-2}} = \frac{1}{\mu + \frac{\beta_{k-2}}{\beta_{k-1}}},$$

$$\beta_{k-1} = \lambda\beta_{k-2} + \beta_{k-3}, \text{ dus } \frac{\beta_{k-2}}{\beta_{k-1}} = \frac{\beta_{k-2}}{\lambda\beta_{k-2} + \beta_{k-3}} = \frac{1}{\lambda + \frac{\beta_{k-3}}{\beta_{k-2}}},$$

enz.

Waardoor ook het derde gedeelte der stelling bewezen is.

22. Wij willen deze § besluiten met het oplossen van een paar vraagstukken, door middel der kettingbreuken.

Wanneer A en B twee relatieve priemgetallen zijn, zal men de vergelijking

$$Ax - By = 1$$

op kunnen lossen door middel der kettingbreuken. Ontwikkelt men $\frac{A}{B}$ in eene kettingbreuk en berekent men daarvan de achtereenvolgende naderende breuken, dan zal, indien $\frac{\alpha_{n-1}}{\beta_{n-1}}$ de voorlaatste dier breuken is

$$A\beta_{n-1} - B\alpha_{n-1} = \pm 1.$$

Is het teeken $+$, dan heeft men onmiddellijk:

$$x = \beta_{n-1} \text{ en } y = \alpha_{n-1}.$$

Is het teeken $-$, dan kan men schrijven:

$$x = B - \beta_{n-1} \text{ en } y = A - \alpha_{n-1},$$

welke waarden in dat geval aan de vergelijking zullen blijken te voldoen.

Heeft men nu de meer algemeene vergelijking:

$$Ax - By = C,$$

dan stelle men daarin

$$x = Cx_1 + Bz \quad \text{en} \quad y = Cy_1 + Az,$$

waarin z geheel onbepaald is, en de vergelijking gaat over in:

$$Ax_1 - By_1 = 1,$$

waaruit x_1 en y_1 onmiddellijk bepaald kunnen worden.

Ware gegeven de vergelijking:

$$Ax + By = C,$$

dan stelt men:

$$x = Cx_1 - Bz \quad \text{en} \quad y = Cy_1 + Az,$$

waardoor ook deze vergelijking tot het eerste geval is teruggebracht. Wanneer men bij de tweede vergelijking naar positieve waarden der onbekenden vraagt, is dit aantal natuurlijk beperkt (Vergel. Deel I, § 16, bladz. 170). Lossen wij ter toepassing op de vergelijking

$$20x - 17y = 10.$$

Wij stellen: $x = 10x_1 + 17z$

$y = 10y_1 + 20z$

en vinden $20x_1 - 17y_1 = 1.$

De voorlaatste naderende breuk is $\frac{7}{8}$, derhalve

$$x_1 = 6 \quad \text{en} \quad y_1 = 7.$$

Deze waarden gesubstitueerd geeft:

$$x = 60 + 17z$$
$$y = 70 + 20z,$$

waarin men voor z achtereenvolgens $0, 1, 2, 3 \ldots, n, -1, -2, \ldots$ kan stellen, om telkens een ander antwoord te vinden.

Zij nog ter oplossing voorgesteld de vergelijking:

$$3x + 5y = 9.$$

Hierin stellen wij:

$$x = 9x_1 - 5z$$
$$y = -9y_1 + 3z$$

en vinden dan de vergelijking:

$$3x_1 - 5y_1 = 1,$$

waaraan voldaan wordt door $x_1 = 2$ en $y_1 = 1$, zoodat men heeft:

$$x = 18 - 5z \quad \text{en} \quad y = 3z - 9.$$

Mogen hieraan nu alleen positieve getallen voldoen, dan heeft men:

$$18 > 5z \quad \text{en} \quad z > 3,$$

derhalve mogen voor z slechts waarden genomen worden tusschen

$$3 \text{ en } 3\tfrac{1}{5}.$$

Indien $\frac{\alpha_k}{\beta_k}$ de naderende breuk is, overeenkomende met het wijzergetal $2a$ van eene periodieke kettingbreuk, voortvloeiende uit de ontwikkeling van $\sqrt{A}$, dan volgt nog uit N°. 20, dat men heeft:

$$\alpha_k^2 - A\beta_k^2 = \pm 1.$$

Want voor het quotiënt $2a$ zal (zie N°. 19) de vergelijking $n + n' = m\mu$, waarin n en n' niet grooter kunnen zijn dan a, opleveren $n = n' = a$ en $m = 1$, zoodat dan de vergelijking

$$\alpha_k^2 - A\beta_k^2 = m(\alpha_k\beta_{k-1} - \alpha_{k-1}\beta_k) \text{ (N°. 19, (1))}$$

overgaat in

$$\alpha_k^2 - A\beta_k^2 = \pm 1.$$

Is derhalve A irrationeel, dan levert deze beschouwing ons de oplossing van het

Vraagstuk. *Geheele getallen te vinden, die voldoen aan de vergelijking*

$$x^2 - Ay^2 = \pm 1.$$

Is het aantal termen der periode even, dan zullen de naderende breuken, die met $2a$ overeenkomen $> \sqrt{A}$ en alleen voldoen aan de vergelijking $x^2 - Ay^2 = +1$. Is het aantal termen der periode oneven, dan zal de eerste naderende breuk, die met $2a$ overeenkomt $< \sqrt{A}$, de tweede $> \sqrt{A}$, de derde $< \sqrt{A}$ enz.; zoodat in dat geval de beide vergelijkingen oplosbaar zijn.

Aanmerking. Zij, die zich op zoodanige beschouwingen willen toeleggen, kunnen zich met vrucht bedienen van de *Théorie des nombr.* van LEGENDRE, van de *Disq. arithm.* van GAUSS e. a.

---

§ 35. Over de Determinanten.

1. De elementen van eene complexie, waaruit permutatiën zullen afgeleid worden, worden door nummers onderscheiden. Men noemt een element *hooger* dan een ander, wanneer het een hooger nummergetal heeft. Men zegt, dat twee elementen eener complexie eene *inversie*, *variatie*, (*dérangement*) vormen, wanneer het eerste element hooger is dan het tweede. — De permutatie $a_3a_4a_1a_2$ heeft de volgende inversies

$$a_3a_1,\ a_3a_2,\ a_4a_1,\ a_4a_2.$$

2. Stelling. *Wanneer men in eene permutatie twee elementen met elkander verwisselt, terwijl de overige hunne plaatsen behouden, dan verandert het aantal inversies met een oneven aantal.*

Bewijs. Wanneer g en h de beide elementen zijn, die men met elkander verwisselt, dan kan men de gegeven permutatie voorstellen door

$$Ag\,BhC,$$

waarin A eene groep elementen vóór g, B eene groep elementen tusschen g en h en C eene groep elementen na h voorstellen. Indien nu de groep B, β_1 elementen bevat, hooger dan g en β_2 hooger dan h, dan vindt men, indien B, β elementen bevat, in de complexie gBh

ten eerste $\beta - \beta_1$ inversies van g met de elementen van de groep B;
daarna β_2 inversies van de elementen van B met h;
de complexie gBh heeft dus, de inversies van B niet medegerekend,

$$\beta - \beta_1 + \beta_2$$

inversies. — Schrijft men nu hBg in plaats van gBh, dan heeft men:
van h op g ééne inversie;
van h met de elementen van B, $\beta - \beta_2$ inversies;
van de elementen van B met g, β_1 inversies;
zoodat er in dat geval

$$\beta - \beta_2 + \beta_1 + 1$$

inversies aanwezig zijn.

$$\beta - \beta_2 + \beta_1 + 1 - (\beta - \beta_1 + \beta_2) = 2\beta_1 - 2\beta_2 + 1$$

is oneven, derhalve is de stelling bewezen.

3. Indien men de permutatiën van een gegeven aantal elementen verdeelt in twee klassen, waarvan de eerste die permutatiën bevat met een even aantal, de tweede die met een oneven aantal inversies, dan volgt uit de vorige stelling:

Indien men door verwisseling telkens van twee elementen alle permutatiën eener gegevene complexie vormt, dan zijn de daarin voorkomende inversies beurtelings even en oneven; dewijl verder het aantal permutatiën even is, zijn er evenveel permutatiën der eerste als der tweede klasse. De eersten kan men door een even aantal, de tweeden door een oneven aantal verwisselingen uit eene complexie der eerste klasse vormen. — Twee permutatiën behooren tot dezelfde klasse, indien zij door een even aantal verwisselingen uit elkander, of uit eene derde complexie kunnen worden afgeleid.

4. Men noemt de verwisseling van de elementen eener complexie *cyklisch*, wanneer ieder element vervangen wordt door het volgende en het laatste door het eerste.

Dewijl eene cyklische verwisseling verkregen wordt door het

eerste element te verwisselen met het tweede, derde, vierde enz., verkrijgt men haar door $n-1$ verwisselingen van twee elementen.

Door eene cyklische verwisseling van alle elementen, verkrijgt men uit eene gegevene permutatie eene andere van dezelfde, of niet van dezelfde klasse, naar gelang het aantal elementen oneven of even is.

Verder ziet men gemakkelijk in, dat men door partiëele cyklische verwisselingen elke andere permutatie af kan leiden.

Is bijv. gegeven de permutatie

$$a_7\ a_5\ a_2\ a_1\ a_3\ a_6\ a_4\ a_8\ ,$$

en verlangt men daaruit af te leiden de permutatie

$$a_5\ a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_6\ a_8\ a_7\ ,$$

dan vervangt men

a_7 door a_5, a_5 door a_1, a_1 door a_3, a_3 door a_4, a_4 door a_8 en a_8 door a_7,

hiermede is de eerste cyklische verwisseling volbracht. Verwisselt men daarna a_2 met a_6 en a_6 met a_2, dan heeft men door twee cyklische verwisselingen de begeerde permutatie verkregen.

Indien men eene permutatie van n elementen heeft, en men wil daaruit door cyklische verwisseling eene andere permutatie afleiden, dan kan zulks plaats hebben door de elementen in p groepen te verdeelen, die respectievelijk uit a_1, a_2, a_3.... elementen bestaan. De cyklische verwisselingen der p groepen kunnen nu geschieden door

$$(a_1-1)+(a_2-1)+(a_3-1)+\ldots\ =n-p$$

verwisselingen telkens van 2 elementen. Om de elementen der eerste groep op hunne plaats te brengen, zijn niet minder dan a_1-1 verwisselingen telkens van twee elementen noodzakelijk, enz.; daarom kan uit eene gegevene permutatie eene andere door niet minder dan $n-p$ verwisselingen telkens van 2 elementen afgeleid worden. In het vorige voorbeeld is $n=8$ en $p=2$, derhalve behooren de beide permutatiën tot dezelfde klasse.

5. Wanneer m horizontale rijen van n elementen, of wat het-

zelfde is, n verticale rijen van m elementen moeten gebruikt worden, dan kan men de plaats van elk element aanwijzen door dubbele indices, bijv.:

$$\begin{array}{cccccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdot & \cdot & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdot & \cdot & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \cdot & \cdot & a_{m,n} \end{array}$$

Wordt hierin $m = n$, dan noemt men $a_{1,1}, a_{2,2} \ldots a_{n,n}$ de *diagonaalrij* van het quadraat der elementen.

Door de *determinante* van een systeem van n^2 elementen, die in n rijen van n elementen staan, verstaat men de som van de producten van n elementen, die allen in verschillende verticale en horizontale rijen voorkomen. De eerste term der determinante is het product van de elementen der diagonaalrij; uit dien eersten term worden de andere termen afgeleid door permutatie der tweede nummers. De verschillende termen worden positief of negatief genomen, naar gelang de permutatiën der nummers, waaruit zij ontstaan zijn, tot dezelfde klasse behooren als de eerste complexie of niet. — Zoo heeft men:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} ab_1c_2d_3 - ab_1c_3d_2 + ab_2c_3d_1 - ab_2c_1d_3 + ab_3c_1d_2 - ab_3c_2d_1 \\ - a_1bc_2d_3 + a_1bc_3d_2 + a_1b_2cd_3 - a_1b_2c_3d + a_1b_3c_2d - a_1b_3cd_2 \\ + a_2bc_1d_3 - a_2b_1cd_3 + a_2b_1c_3d - a_2b_3c_1d + a_2b_3cd_1 - a_2bc_3d_1 \\ - a_3bc_1d_2 + a_3b_1cd_2 - a_3b_1c_2d + a_3b_2c_1d - a_3b_2cd_1 + a_3bc_2d_1 \end{array}$$

De determinante van n^2 elementen is van den $n$den graad, omdat hare termen producten zijn van n elementen; zij heeft n termen, waarvan de eene helft positief, de andere helft negatief is, en waaronder geene absoluut gelijke voorkomen, zoolang de afzonderlijke termen in geene bijzondere betrekkingen tot elkander staan. Men wijst gewoonlijk de determinante aan, zooals wij dit in het eerste lid deden, door alle rijen tusschen verticale lijnen te plaatsen; ook geschiedt zulks door den eersten term der determinante te schrijven en daarvóór het gewone teeken van optelling (integraalteeken) te plaatsen, aldus:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \cdots a_{1,n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} \cdots a_{n,n} \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_{1,1} \quad a_{2,2} \cdots a_{n,n}$$

Men kan ook de determinante uit de diagonaalrij afleiden, door de eerste nummers te permuteeren en de tweede onveranderd te laten. In het eerste geval neemt men uit de achtereenvolgende horizontale rijen een term, die tot de volgende verticale rij behoort; in het tweede geval neemt men uit de achtereenvolgende verticale rijen een term, die tot de volgende horizontale rij behoort. Men ziet gemakkelijk in, dat hierdoor geene andere determinante ontstaat, zoodat men in 't algemeen heeft:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \cdots\cdots a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \cdots\cdots a_{2,n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} \cdots\cdots a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} \cdots\cdots a_{n,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \cdots\cdots a_{n,2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} \cdots\cdots a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Ter opheldering dienen nog de volgende voorbeelden:

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

$$\begin{vmatrix} ac \\ cb \end{vmatrix} = ab - c^2$$

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = abc - af^2 + 2hgf - ch^2 - bg^2.$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a_1 a_2 a_3 \\ b_0 & 0 \; b_2 \; b_3 \\ c_0 & c_1 \; 0 \; c_3 \\ d_0 & d_1 d_2 \; 0 \end{vmatrix} = \begin{array}{r} a_1 b_0 c_3 d_2 - a_1 b_2 c_0 d_2 - a_1 b_2 c_3 d_0 - a_2 b_0 c_3 d_1 \\ + a_2 b_3 c_0 d_1 - a_2 b_3 c_1 d_0 - a_3 b_0 c_1 d_2 \\ - a_3 b_2 c_0 d_1 + a_3 b_2 c_1 d_0. \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & h & g \\ b & h & 0 & f \\ c & g & f & 0 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a^2 f^2 + b^2 g^2 + c^2 h^2 \\ -(2abfg + 2acfh + 2bcgh). \end{array}$$

6. Stelling. *Wanneer men in de determinante twee parallelle rijen met elkander verwisselt, verandert de determinante van teeken. Wanneer alle elementen van twee parallelle rijen, in dezelfde volgorde genomen, aan elkander gelijk zijn, dan is de determinante gelijk aan nul.*

Bewijs. Door verwisseling van twee parallelle rijen heeft men in den eersten term der determinante twee eerste of twee tweede nummers verwisseld; de eerste termen der beide determinanten hebben dus tegengestelde teekens. Leidt men nu uit dien eersten term de andere termen af, zoodanig, dat zij beurtelings van teeken verwisselen, dan ziet men aanstonds de waarheid van het gestelde. Zijn de parallelle rijen gelijk en heeft er dan één verwisseling plaats, dan verandert volgens het eerste D in $-D$; maar omdat de rijen gelijk zijn, blijft D onveranderd, derhalve

$$D = -D \text{ of } D = 0.$$

Door deze stelling ziet men gemakkelijk in, dat de determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$ deelbaar is door $a - b$,

want nemen wij $a = b$, dan worden twee rijen identiek en de determinante wordt gelijk aan 0; eveneens is zij deelbaar door $a - c$ en door $b - c$. Omdat de determinante van den derden graad is, volgt daaruit onmiddellijk:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(b-c).$$

Aanmerking. Gemakshalve zullen wij de determinante voorstellen door de letter D of R, de aanvangsletters van *determinante* of *resultante*, welke laatste benaming door LAPLACE is ingevoerd.

7. Stelling. *Wanneer de in eene rij staande elementen van een systeem op één na verdwijnen, dan is de determinante*

van dat systeem gelijk aan 't product van bedoeld element en de determinante van den naast lageren graad.

Bewijs. Indien gegeven is:

$$R = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix},$$

en in de rij $a_{k,1}\ a_{k,2}\ a_{k,3} \cdots a_{k,n}$

slechts $a_{k,i}$ geen nul is, dan kan men de rijen zoolang verschikken, totdat de rij $a_{k,i} \cdots$ de eerste is, hetgeen plaats heeft door $k-1$ verwisselingen van horizontale en van $i-1$ verwisselingen van verticale rijen. Hierdoor vindt men:

$$\varepsilon R = \begin{vmatrix} a_{k,i} & a_{k,1} \cdots a_{k,k-1} & a_{k,k+1} \cdots a_{k,n} \\ a_{1,i} & a_{1,1} \cdots a_{1,k-1} & a_{1,k+1} \cdots a_{1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,i} & a_{n,1} \cdots a_{n,k-1} & a_{n,k+1} \cdots a_{n,n} \end{vmatrix},$$

waarin $\varepsilon = (-1)^{k+i}$. Volgens de veronderstelling verdwijnen alle termen van εR, waarin het eerste nummer k en het tweede nummer geen i is, derhalve wordt εR beperkt tot de termen, die uit den eersten term der determinante $a_{k,i}\ a_{1,1}\ a_{2,2} \cdots a_{n,n}$ gevormd kunnen worden door permutatie der tweede nummers met uitsluiting van i: de determinante is dus het product van $a_{k,i}$ en de resultante van een ander systeem, dat van den $(n-1)^{\text{den}}$ graad is.

Zoo heeft men:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^5 \begin{vmatrix} c_3 & 0 & 0 & 0 \\ c & a & b & d \\ c_1 & a_1 & b_1 & d_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 & d_2 \end{vmatrix} = -c_3 \begin{vmatrix} a & b & d \\ a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \end{vmatrix}.$$

Men ziet gemakkelijk in, dat men iedere determinante ook voor kan stellen als eene determinante van hoogeren graad; zoo is:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ 0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ e_2 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ e_3 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ e_4 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}$$

enz.

Wanneer alle elementen verdwijnen, die aan de eene zijde der diagonaalrij staan, dan bestaat de determinante slechts uit haren eersten term.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & 0 & c_3 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_1 b_2 c_3 d_4 = a_1 b_2 c_3 d_4$$

8. Om die termen van D over te houden, waarin $a_{i,k}$ voorkomt, d. i. m. a. w. om de coëfficiënt van $a_{i,k}$ te vinden, stelt men de elementen eener horizontale rij, waarin $a_{i,k}$ voorkomt, gelijk aan nul, uitgezonderd het element $a_{i,k}$ zelf. Schrijft men dan 1 in de plaats van $a_{i,k}$ en stelt men den begeerden coëfficiënt voor door $\alpha_{i,k}$, dan heeft men:

$$\alpha_{i,k} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,k} & a_{i-1,k+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & & 0 \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,k} & a_{i+1,k+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,k} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Hiervan kan men door $(i-1)+(k-1)$ verwisselingen van parallelle rijen eene determinante maken, die een graad lager is, bijgevolg is:

$$\alpha_{i,k}=(-1)^{i+k}\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Wanneer elke term $a_{i,k}$, waarvan $k > 1$, gelijk aan 0 wordt, dan verdwijnen alle elementen aan de eene zijde der diagonaalrij, terwijl ook nog elementen uit de diagonaal gelijk aan nul worden; daaruit volgt onmiddellijk $D = 0$.

Wil men den coëfficiënt van een product bepalen, bijv. van $a_{i,k}$ en $a_{r,s}$, dan schrijft men in plaats van deze elementen de eenheid en voor de overige elementen van de rij, waarin zij voorkomen, nullen; hierdoor vindt men eene determinante van den graad $n-2$. Dit op een bepaald aantal termen toepassende, vindt men voor den coëfficiënt van $b_2 d_2$ in het systeem

$$\begin{matrix} a\ b\ c\ d \\ a_1 b_1 c_1 d_1 \\ a_2 b_2 c_2 d_2 \\ a_3 b_3 c_3 d_3 \end{matrix} \qquad \beta_2 \delta_2 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & a & c & d \\ b_1 & a_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^4 \begin{vmatrix} a & c & d \\ a_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^6 \begin{vmatrix} d & a & c \\ d_1 & a_1 & c_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d & a & c \\ d_1 & a_1 & c_1 \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} = ac_1 - a_1 c.$$

Indien men op soortgelijke wijze handelt, kan men de determinante uitdrukken in de som van de coëfficiënten van de elementen, die in eene zelfde rij voorkomen. Zoo is:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - a_1 \begin{vmatrix} b & c \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} =$$

$$a \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} + a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b & c \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}.$$

Is de determinante van oneven graad, dan zal men zien, dat men den coëfficiënt $\alpha_{i,k}$ uit $\alpha_{1,1}$ kan afleiden, zonder dat er verwisseling van teeken plaats heeft, enz.

9. Stelling. *Zij $\alpha_{i,k}$ de coëfficiënt van het element $a_{i,k}$ in de determinante D, en dus $\alpha_{i,k}\, a_{i,k}$ de som van alle termen van D, waarin het element $a_{i,k}$ voorkomt, dan zijn de sommen*

$$a_{i,1}\ \alpha_{k,1} + a_{i,2}\ \alpha_{k,2} + a_{i,3}\ \alpha_{k,3} + \ldots\ldots$$

$$a_{1,i}\ \alpha_{1,k} + a_{2,i}\ \alpha_{2,k} + a_{3,i}\ \alpha_{3,k} + \ldots\ldots$$

gelijk aan D of aan 0, naar gelang i en k aan elkander gelijk zijn of niet.

Bewijs. Ieder term der determinante bevat één der elementen

$$a_{i,1},\ a_{i,2},\ a_{i,3}, \ldots\ldots$$

welke de i^{de} horizontale rij uitmaken. Volgens de veronderstelling heeft men dus aanstonds de identieke vergelijkingen, waarvan de juistheid moest bewezen worden. Wordt $i = k$ dan zijn er twee parallelle rijen in dezelfde volgorde met elkander gelijk, de determinante is in dat geval $= 0$ (N°. 6).

Tot opheldering zie men nog het voorgaande voorbeeld.

10. Indien men de determinante met een factor wil vermenigvuldigen, moet men daarmede de elementen van eene horizontale of verticale rij vermenigvuldigen, want

$$p \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} pa_1 & a_2 & a_3 \\ pb_1 & b_2 & b_3 \\ pc_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} pa_1 & pa_2 & pa_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Om eene determinante door een getal te deelen, moet men eene horizontale of eene verticale rij, door dat getal deelen:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b_1 & c_1 \\ a & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & b_1 & c_1 \\ 1 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c_1 & d_1 \\ a & b & c_2 & d_2 \\ a & b & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = ab \begin{vmatrix} 1 & 1 & c & d \\ 1 & 1 & c_1 & d_1 \\ 1 & 1 & c_2 & d_2 \\ 1 & 1 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Om eene determinante het tegengestelde teeken te geven, moet men aan eene rij elementen het tegengestelde teeken geven:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -a & b & c \\ -a_1 & b_1 & c_1 \\ -a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Zijn alle elementen eener rij sommen van m termen, dan kan men de determinante veranderen in de som van m determinanten.

Want indien men heeft:

$$a_{i,1} = p_1 + q_1 + r_1 + \ldots\ldots$$
$$a_{i,2} = p_2 + q_2 + r_2 + \ldots\ldots$$

heeft men ook:

$$\begin{aligned} D &= a_{i,1}\ \alpha_{i,1} + a_{i,2}\ \alpha_{i,2} + a_{i,3}\ \alpha_{i,3} + \text{enz.} \\ &= p_1\,\alpha_{i,1} + p_2\,\alpha_{i,2} + \ldots\ldots \\ &+ q_1\,\alpha_{i,1} + q_2\,\alpha_{i,2} \ldots\ldots\ldots \\ &+ r_1\,\alpha_{i,1} + r_2\,\alpha_{i,2} \ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

De afzonderlijke determinanten, waarin men D splitsen kan, ontstaan uit D, indien men $a_{i,1}$, $a_{i,2}$ ..... achtereenvolgens vervangt door hunne termen. Zoo is bijv.:

$$\begin{vmatrix} a + a' + a'' & a_1 & a_2 \\ b + b' + b'' & b_1 & b_2 \\ c + c' + c'' & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & a_1 & a_2 \\ b' & b_1 & b_2 \\ c' & c_1 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'' & a_1 & a_2 \\ b'' & b_1 & b_2 \\ c'' & c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

De waarde eener determinante blijft onveranderd, indien men

bij de elementen eener rij de elementen van eene andere rij, ieder met hetzelfde getal vermenigvuldigd, opteld.

$$\begin{vmatrix} a+a_1 p & a_1 & a_2 \\ b+b_1 p & b_1 & b_2 \\ c+c_1 p & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 p & a_1 & a_2 \\ b_1 p & b_1 & b_2 \\ c_1 p & c_1 & c_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \end{vmatrix} + p \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_1 & b_2 \\ c_1 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \end{vmatrix} + 0.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & -a & y & -b \\ 1 & x_1 & -a & y_1 & -b \\ 1 & x_2 & -a & y_2 & -b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & -a+a & y & -b+b \\ 1 & x_1 & -a+a & y_1 & -b+b \\ 1 & x_2 & -a+a & y_2 & -b+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

Bij de tweede verticale rij heeft men de eerste geteld, vermenigvuldigd met a, bij de derde de eerste vermenigvuldigd met b.

Op grond van 7 kan men schrijven:

$$\begin{vmatrix} x & -a & y & -b \\ x_1 & -a & y_1 & -b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x & -a & y & -b \\ 1 & x_1 & -a & y_1 & -b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & -a & b & -b \\ 1 & x & -b & y & -b \\ 1 & x_1 & -a & y_1 & -b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \end{vmatrix}.$$

Vermenigvuldigt men in de determinante

$$R = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & \ldots\ldots & b_n \\ b_{0,1} & b_{1,1} & \ldots\ldots & b_{n,1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{0,n} & b_{1,n} & \ldots\ldots & b_{n,n} \end{vmatrix}$$

de $n+1$de verticale rij met b_{n-1}, de $n$de rij met b_n, en trekt men deze van elkander af; handelt men zoo met de $n$de en $(n-1)$de verticale rij enz., dan vindt men:

$$R\, b_0 b_1 b_2 \ldots b_{n-1} = \begin{vmatrix} b_0 & b_0 b_1 & -b_1 b_0 & \ldots & b_{n-1} b_n & -b_n b_{n-1} \\ b_{0,1} & b_0 b_{1,1} & -b_1 b_{0,1} & \ldots & b_{n-1} b_{n,1} & -b_n b_{n-1,1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{0,n} & b_0 b_{1,n} & -b_1 b_{0,n} & \ldots & b_{n-1} b_{n,n} & -b_n b_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

en daaruit:

$$R b_1 b_2 \ldots b_{n-1} = \begin{vmatrix} b_0 b_{1,1} - b_1 b_{0,1} & \ldots\ldots & b_{n-1} b_{n,1} - b_n b_{n-1,1} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ b_0 b_{1,n} - b_1 b_{0,n} & \ldots\ldots & b_{n-1} b_{n,n} - b_n b_{n-1,n} \end{vmatrix}.$$

$$\frac{1}{x}\begin{vmatrix} ax + by + cz & b & c \\ a'x + b'y + c'z & b' & c' \\ a''x + b''y + c''z & b'' & c'' \end{vmatrix} = \frac{1}{x}\begin{vmatrix} ax & b & c \\ a'x & b' & c' \\ a''x & b'' & c'' \end{vmatrix} + \frac{1}{x}\begin{vmatrix} by & b & c \\ b'y & b' & c' \\ b''y & b'' & c'' \end{vmatrix} + \frac{1}{x}\begin{vmatrix} cz & b & c \\ c'z & b' & c' \\ c''z & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} + \frac{y}{x}\begin{vmatrix} b & b & c \\ b' & b' & c' \\ b'' & b'' & c'' \end{vmatrix} + \frac{z}{x}\begin{vmatrix} c & b & c \\ c' & b' & c' \\ c'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix},$$

wanneer namelijk x, y en z geen van drieën nul zijn.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 16.$$

De determinante

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$$

is deelbaar door $a+b+c+d$, $a-b-c+d$, $a-b+c-d$, $a+b-c-d$, dus door het product dezer factoren. Het quotiënt is alsdan gelijk aan 1.

$$R = \begin{vmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & (a+m) & (a+m+1)\ldots(a+2m-1) \\ 1 & (a+m+1) & (a+m+2)\ldots(a+2m) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & (a+2m) & (a+2m+1)\ldots(a+3m-1) \end{vmatrix} = 1.$$

Want telt men elke voorgaande horizontale rij, negatief genomen, op bij de onmiddellijk volgende, dan vindt men, op grond van de relatie,

$$(a+m)^{k} - (a+m-1)^{k} = (a+m-1)^{k-1}:$$

$$R = \begin{vmatrix} 1 & (a+m)^{1} & (a+m+1)^{2} & \ldots\ldots & (a+2m-1)^{m} \\ 0 & 1 & (a+m+1)^{1} & & (a+2m-1)^{m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \end{vmatrix}$$

Zet men deze aftrekkingen voort, dan worden de elementen der diagonaalrij $= 1$, terwijl alle elementen aan de eene zijde dier rij gelijk aan 0 worden, derhalve is R, onafhankelijk van a en m, gelijk aan 1.

Vermenigvuldigt men in de determinante:

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & b_1 & & & & \\ a_1 & -b_0 & b_2 & & & \\ a_2 & 0 & -b_1 & b_2 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ a_{n-1} & 0 & 0 & 0 \ldots\ldots & -b_{n-2} & \\ a_n & 0 & 0 & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 & -b_{n-1} \end{vmatrix}$$

de horizontale rijen respectievelijk met b_0, b_1, $b_2 \ldots\ldots b_n$ en telt men bij elke rij de volgende rijen, dan vindt men:

$$R\, b_0 b_1 b_2 \ldots b_n = (-1)^n (a_0 b_0 + a_1 b_1 + \ldots a_n b_n)\, b_0 b_1\, b_2 b_{n-1} b_n$$

Dus ook:

$$R = (-1)^n (a_0 b_0 + a_1 b_1 \ldots\ldots + a_n b_n) b_1 b_2 b_{n-1}.$$

11. Stelling. *Wanneer de elementen $a_{i,k}$ en $a_{k,1}$ aan elkander gelijk zijn en ieder element $a_{i,i}$, dat in de diagonaalrij staat, gelijk is aan de som van de overige elementen, die in dezelfde horizontale rij voorkomen, met het tegengestelde teeken, dan wordt de determinante $\Sigma \pm a_{1,1}\, a_{2,2} \ldots$ gelijk aan nul en alle elementen hebben in de determinante gelijke coëfficiënten.*

Bewijs. Alle elementen van de determinante verdwijnen, indien men bij eene zelfde verticale rij alle overige verticale rijen optelt. De determinante wordt derhalve gelijk aan 0.

Wanneer men in den coëfficiënt van $a_{0,0}$

$$\alpha_{0,0} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix},$$

de overige horizontale rijen optelt bij de $i$de, dan komen in die rij de elementen

$$-a_{0,1} \quad -a_{0,2} \cdots -a_{0,n}.$$

Telt men daarna bij de $k$de verticale rij de overige verticale rijen, dan heeft men in de $k$de verticale rij de elementen:

$$-a_{1,0} \cdots -a_{i-1,0}, \; a_{0,0} \; -a_{i+1,0} \cdots -a_{n,0}.$$

Schrijft men nu de veranderde rijen vooraan, dan vindt men:

$$\alpha_{0,0} = (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} a_{0,0} \cdots a_{0,k-1} & a_{0,k+1} \cdots a_{0,n} \\ \cdots \cdots \cdots & \cdots \cdots \cdots \\ a_{i-1,0} & \\ a_{i+1,0} & \\ \cdots \cdots & \\ a_{n,0} & \end{vmatrix} = \alpha_{i,k}.$$

Bijvoorbeeld. In de determinante

$$\begin{vmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & a_{0,2} & a_{0,3} \\ a_{0,1} & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{0,2} & a_{1,2} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{0,3} & a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} \end{vmatrix} \text{ is } \alpha_{0,0} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ -a_{0,1} & -a_{0,2} & -a_{0,3} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^3 \begin{vmatrix} a_{0,1} & a_{0,2} & a_{0,3} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix};$$

indien wij voor i de derde horizontale rij nemen. Nemen wij nu voor k de tweede verticale, dan is

$$(-1)^3 \begin{vmatrix} a_{0,1} & a_{0,2} & a_{0,3} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} a_{0,1} & -a_{0,0} & a_{0,3} \\ a_{1,1} & -a_{0,1} & a_{1,3} \\ a_{1,2} & -a_{0,2} & a_{2,3} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & a_{0,3} \\ a_{0,1} & a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{0,2} & a_{1,2} & a_{2,3} \end{vmatrix} = (-1)^5 \alpha_{3,2}$$

12. Stelling. *De determinante van den* n^{den} *graad, die men vormt uit* $2n-1$ *elementen*

$$D = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_n \\ a_{n-1} & a_n & a_{2n-2} \end{vmatrix}$$

blijft onveranderd, wanneer men in de plaats harer termen de eerste termen schrijft van de reeksen hunner verschillen.

Bewijs. Trekt men in D van elke verticale rij de onmiddellijk voorgaande en neemt men de gewone notatie voor de verschillen van rekenkundige reeksen aan, te weten

$$\begin{array}{ccccccc} a_0 & & a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 \\ & \Delta_{1,0} & & \Delta_{1,1} & & \Delta_{1,2} & & \Delta_{1,3} & \\ & & \Delta_{2,0} & & \Delta_{2,1} & & \Delta_{2,2} & & \end{array}$$

enz.

dan heeft men:

$$D = \begin{vmatrix} a_0 & \Delta_{1,0} & \Delta_{1,1} & \cdots\cdots & \Delta_{1,n-2} \\ a_1 & \Delta_{1,1} & \Delta_{1,2} & \cdots\cdots & \Delta_{1,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1} & \Delta_{1,n-1} & \Delta_{1,n} & \cdots\cdots & \Delta_{1,2n-3} \end{vmatrix}$$

Herhaalt men deze bewerking met de verticale rijen der laatste determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_0 & \Delta_{1,0} & \Delta_{2,0} \cdots\cdots \Delta_{n-1,0} \\ a_1 & \Delta_{1,1} & \Delta_{2,1} \cdots \vdots \cdots \Delta_{n-1,1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1} & \Delta_{1,n-1} & \Delta_{2,n-1} \cdots\cdots \Delta_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

Trekt men nu eindelijk de horizontale rijen van elkander, op soortgelijke wijze als wij met de verticale gedaan hebben, dan vindt men:

$$D = \begin{vmatrix} a_0 & \Delta_1 & \Delta_2 \cdots\cdots\cdots \Delta_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta_{n-1} & \Delta_n & \Delta_{n+1} \cdots\cdots \Delta_{2n-2} \end{vmatrix}$$

Aanmerking. Wanneer $a_{i,k} = a_{k,i}$, dan noemt men het systeem $a_{1,1} \cdots\cdots a_{n,n}$ *symmetrisch*. Het systeem, dat wij in dit nummer beschouwd hebben, wordt *persymmetrisch* of ook *orthosymmetrisch* genoemd.

13. Verdeeling eener determinante in gedeeltelijke determinanten.

Wanneer men uit een stelsel van n^2 elementen m horizontale rijen uitkiest, en uit deze m horizontale tevens m verticale rijen neemt, dan noemt men de determinante van den m^{den} graad

$$P = \begin{vmatrix} a_{f,r} & a_{f,s} & a_{f,t} & * \\ a_{g,r} & a_{g,s} & a_{g,t} & * \\ a_{h,r} & a_{h,s} & a_{h,t} & * \\ * & * & * & \end{vmatrix}$$

eene *gedeeltelijke, partiëele* of *minor determinante.*

De partiëele determinante P, vermenigvuldigd met een bepaalden coëfficiënt Q, levert de geheele determinante

$$R = \Sigma \pm a_{1,1}\ a_{1,2} \cdots\cdots a_{n,n},$$

die daaruit ontstaat, dat men zoowel de m nummers f, g, h, als ook de overige $n-m$ nummers van de reeks $1, 2, 3 \ldots n$ met elkander op alle mogelijke wijzen verwisselt of ook daar-

door, dat men zulks met de nummers r, s, t.... doet. Daaruit volgt, dat Q eene partiëele determinante is van den graad $n-m$, welke men op de volgende wijze bepalen kan. Zijn

$$f, g, h, \ldots\ldots \varphi, \chi, \psi \ldots\ldots$$
$$r, s, t, \ldots\ldots \varrho, \sigma, \tau \ldots\ldots$$

permutatiën van $1, 2 \ldots\ldots n$, dan is

$$\Sigma \pm a_{fr}\, a_{gs}\, a_{ht} \ldots\ldots a_{\varphi\varrho}\, a_{\chi\sigma}\, a_{\psi\tau} = \pm R,$$

waarin het teeken $+$ of $-$ gebruikt wordt, naar gelang de permutatiën van eene zelfde klasse zijn of niet. Nu heeft P in $\pm R$ denzelfden coëfficiënt als het product $a_{fr}\, a_{gs}\, a_{ht} \ldots\ldots$, bijgevolg is

$$\pm Q = \Sigma \pm a_{\varphi\varrho}\, a_{\chi\sigma}\, a_{\psi\tau} \ldots\ldots$$

Omdat voor $a_{fr} = a_{gs} = a_{ht} = 1$ — mits de elementen, die met a_{fr}, a_{gs}, a_{ht}..... in eene zelfde horizontale of verticale rij staan, gelijk aan nul worden — R in Q overgaat, worden de partiëele determinanten P en Q door CAUCHY *complementair* genoemd.

14. Stelling. *Vormt men alle coëfficiënten, die a_{ff}, $a_{ff}\, a_{gg}$, $a_{ff}\, a_{gg}\, a_{hh}$, ... in de determinante R hebben en duidt men de waarden, die R in deze partiëele determinanten aannemen, wanneer alle elementen der diagonaal door nullen vervangen worden, aan door D, D_f, D_{fg}, D_{fgh}, dan heeft men:*

$$R = D + \Sigma\, a_{ff} D_f + \Sigma\, a_{ff}\, a_{gg}\, D_{fg} + \ldots + a_{1,1}\, a_{2,2} \ldots a_{n,n}.$$

NB. *Hierin moet men voor f alle nummers $1, 2 \ldots\ldots n$, voor gh alle permutatiën dier nummers twee aan twee, ...: substitueeren.*

Bewijs. De termen van R, die geen enkel der elementen $a_{1,1}$, $a_{2,2}$, $a_{3,3}$..... bevatten, komen overeen met D. Uit de vereeniging van die termen van R, welke het product bevatten van m bepaalde elementen der diagonaal $a_{ff}\, a_{gg}\, a_{hh}$ .....

vindt men die termen van R, welke behalve die elementen geen ander element der diagonaal bevatten, door de overige elementen der diagonaal door nullen te vervangen. Voor de vereeniging dezer termen vindt men:

$$a_{ff}\, a_{gg}\, a_{hh} \cdots\cdots D_{fgh} \cdots\cdots$$

Door alzoo de som te nemen van alle op zoodanige wijze gevormde termen vindt men alle termen van R.

15. Stelling. *De ontwikkeling van de determinante*

$$f(z) = \begin{vmatrix} a_{11}+z & a_{12} \cdots\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+z \cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots\cdots\cdots a_{nn}+z \end{vmatrix}$$

volgens de opklimmende machten van z levert:

$$R_n + z\,\Sigma R_{n-1} + z^2\,\Sigma R_{n-2} + \cdots\cdots z^{n-1}\,\Sigma R_1 + z^n,$$

waarin

$$R_m = \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ik} \cdots\cdots \\ a_{ki} & a_{kk} \cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \end{vmatrix}$$

eene partiëele determinante is van den $m$den graad, welker diagonaal uit elementen bestaat van de diagonaal R_n en waarin ΣR_m de som voorstelt van de determinanten, die uit R_m voortvloeien, wanneer men voor i en k alle combinatiën m aan m neemt uit de elementen $1, 2 \ldots\ldots n$.

Bewijs. Dat de eerste term R_n met $f(0)$ overeenkomt en dat de laatste term z^n juist is, ziet men onmiddellijk. De termen, die z^m bevatten, ontstaan uit de termen van de determinante $f(z)$, waarin m willekeurige elementen der diagonaal voorkomen. Stelt nu $i, k, \ldots$ eene in opklimming gerangschikte combinatie van m nummers uit de rij $1, 2, \ldots\ldots n$ en $r, s, \ldots\ldots$ de rij der overige nummers voor, dan is volgens N°. 6:

$$f(z) = \begin{vmatrix} a_{ii}+z & a_{ik} \cdots a_{ir} & a_{is} \cdots \\ a_{ki} & a_{kk}+z \cdots a_{kr} & a_{ks} \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{ri} & a_{rk} \cdots a_{rr}+z & a_{rs} \cdots \\ a_{si} & a_{sk} \cdots a_{sr} & a_{ss}+z \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

Uit deze gedaante van $f(z)$ ziet men, dat de ontwikkeling van het product

$$\begin{vmatrix} a_{ii}+z & a_{ik} \cdots \\ a_{ki} & a_{kk}+z \cdots \\ \cdots & \cdots \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{rr}+z & a_{rs} \cdots \\ a_{sr} & a_{ss}+z \cdots \\ \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

een gedeelte vormt van de gezochte ontwikkeling van de determinante $f(z)$. De ontwikkeling van den eersten factor volgens machten van z eindigt met z^n, die van den tweeden factor begint met:

$$\begin{vmatrix} a_{rr} & a_{rs} \cdots \\ a_{sr} & a_{ss} \cdots \\ \cdots & \cdots \end{vmatrix},$$

daarom is:

$$z^m \begin{vmatrix} a_{rr} & a_{rs} \cdots \\ a_{sr} & a_{ss} \cdots \\ \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

de algemeene vorm voor een term van $f(z)$, waarin z^m voorkomt. Indien men voor i, k, alle mogelijke combinatiën van elke m nummers uit de rij $1, 2 \ldots n$, bij gevolg voor r, s, ... alle mogelijke combinatiën van $n - m$ nummers uit dezelfde rij schrijft, vindt men alle termen van $f(z)$, waarin de factor z^m voorkomt.

16. Wanneer $R = \Sigma \pm a_{11}, a_{12} \ldots a_{nn}$, en men een aantal m der veranderlijke nummers in ééne groep en de over-

blijvende $n-m$ nummers in eene tweede groep vereenigt; daarna de nummers der beide groepen op alle mogelijke wijze permuteert; vervolgens alle mogelijke groepen van m en $n-m$ nummers vormt en hiermede eveneens handelt, dan krijgt men natuurlijk alle permutatiën van de m veranderlijke nummers. Stelt men dus, dat men eerst kiest de m nummers

$$f, g, h \ldots\ldots$$

en daarvan de gedeeltelijke determinante vormt

$$P = \Sigma \pm a_{f,1}\, a_{g,2}\, a_{h,3} \ldots\ldots$$

en dat er $n-m$ nummers $r, s, t, \ldots\ldots$ overblijven, zoodat

$$Q = \Sigma \pm a_{r,m+1}\, a_{s,m+2}\, a_{t,m+3} \ldots\ldots$$

dan is ook

$$R = \Sigma \varepsilon PQ,$$

waarin ε de waarde $+1$ of -1 heeft, naar gelang de rijen

$$\begin{matrix} f, g, h, \ldots\ldots \\ r, s, t, \ldots\ldots \\ 1, 2, 3 \ldots\ldots n \end{matrix}$$

tot dezelfde klasse van permutatiën behooren of niet.

Hieruit ziet men dat:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_2 & d_2 \\ c_3 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_3 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b & d \\ c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c & d \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c & d \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix}.$$

17. Men kan eene determinante ook verdeelen in eene som van producten uit meer dan twee partiëele determinanten.

Daartoe kieze men uit de nummers $1, 2 \ldots n$ in de eerste plaats een aantal α, bijv. $f, g, h \ldots$; uit de overigen een

aantal β, bijv. $p, q, r \ldots$.; dan uit de overigen een aantal γ, bijv. $t, u, v, \ldots\ldots$ enz., zoodanig dat men heeft

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots\ldots = n;$$

vervolgens vorme men de partiëele determinanten van den α^{den} β^{den}, γ^{den}, enz. graad:

$$A = \Sigma \pm a_{f,1}\, a_{g,2}\, a_{h,3} \ldots\ldots$$

$$B = \Sigma \pm a_{p,\alpha+1}\, a_{q,\alpha+2}\, a_{r,\alpha+3} \ldots\ldots$$

$$C = \Sigma \pm a_{t,\alpha+\beta+1}\, a_{u,\alpha+\beta+2}\, a_{v,\alpha+\beta+3}$$

enz.,

dan zal $$R = \Sigma\, s\, ABC \ldots\ldots$$

de som zijn van

$$\frac{1.\ 2.\ 3. \ldots\ldots n}{1.\ 2 \ldots \alpha \,.\, 1.\ 2 \ldots \beta \,.\, 1.\ 2 \ldots \gamma \ldots}$$

termen, welke ontstaan, indien men A, B, $C \ldots$ op alle mogelijke wijzen vormt; terwijl s de positieve of negatieve eenheid beteekent, naar gelang de reeks

$$f, g, h, \ldots\ldots, p, q, r, \ldots\ldots, t, u, v, \ldots\ldots$$

eene permutatie van de eerste of tweede orde is van

$$1.\ 2.\ 3.\ 4 \ldots\ldots n.$$

18. Wanneer uit twee verschillende stelsels van elementen

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,p} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,p} \end{vmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{vmatrix} b_{1,1} & \ldots & b_{1,p} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n,1} & \ldots & b_{n,p} \end{vmatrix}$$

een derde stelsel gevormd wordt

$$\begin{vmatrix} c_{1,1} & & c_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n,1} & & c_{n,n} \end{vmatrix}$$

zoodanig, dat een element $c_{i,k}$ daardoor ontstaat, dat men de

elementen der $i$de horizontale rij in het eerste stelsel, achtereenvolgens vermenigvuldigt met de $k$de horizontale rij in het tweede stelsel en deze producten bij elkaâr optelt, d. i. indien men heeft

$$c_{i,k} = a_{i,1}\ b_{k,1} + a_{i,2}\ b_{k,2} + \ldots\ldots + a_{i,p}\ b_{k,p},$$

dan kan de determinante $R = \Sigma \pm c_{1,1}\ c_{2,2} \ldots\ldots c_{n,n}$ van het afgeleide stelsel berekend worden uit determinanten van systemen der gegevene elementen.

Om zulks te doen vorme men uit eene willekeurige combinatie van n verticale rijen van het eerste stelsel de determinante P en uit P door verwisseling van a met b de determinante Q, wier elementen tot het tweede stelsel behooren, dan is $R = \Sigma PQ$ de som van alle mogelijke producten PQ. Is $p = n$, dan verandert R in het enkele product PQ, is $p < n$, dan verdwijnt R identiek.

Want indien elk der n nummers $r, s, t, \ldots\ldots$ respectievelijk de waarden $1, 2, \ldots\ldots p$ verkrijgt, dan is volgens de veronderstelling de eerste term der determinante R

$$c_{11}\ c_{22} \ldots\ldots c_{nn} = (\Sigma_r\ a_{1r}\ b_{1r})\ (\Sigma_s\ a_{2s}\ b_{2s})\ (\Sigma_t\ a_{3t}\ b_{3t}) \ldots\ldots$$

$$= \Sigma_{r,s,t\ldots}\ a_{1r}\ a_{2s}\ a_{3t} \ldots\ldots b_{1r}\ b_{2s}\ b_{3t} \ldots\ldots$$

Daaruit vindt men de overige termen van R, wanneer de tweede nummers van de elementen c gepermuteerd worden en de eerste nummers onveranderd blijven. Hierbij worden naast of onder het teeken van sommeering slechts de eerste nummers van de elementen c gepermuteerd en de anderen worden niet verwisseld. Daarom is:

$$R = \sum_{r,s,t\ldots} (a_{1r}\ a_{2s}\ a_{3t} \ldots\ldots \Sigma \pm b_{1r}\ b_{2s}\ b_{3t} \ldots\ldots)$$

$$= \sum_{r,s,t\ldots} a_{1r}\ a_{2s}\ a_{3i} \ldots\ldots Q.$$

De determinante Q verdwijnt, wanneer onder de nummers $r, s, t, \ldots\ldots$ twee gelijke voorkomen, derhalve vindt men alle termen van de te vinden som, wanneer men voor $r, s, t, \ldots$

alle complexies schrijft van n verschillende nummers uit de reeks $1, 2 \ldots . p$.

Is nu $p < n$, dan is $R = 0$; want $r, s, t, \ldots .$ die men moet nemen uit de rij $1, 2, 3, \ldots . p$ en wier aantal $= n$ is, kunnen niet allen verschillend zijn; derhalve is bij iedere keus $Q = 0$.

Is $p = n$, dan kunnen voor $r, s, t, \ldots .$ slechts de verschillende permutatiën van $1.2.3.4.5 \ldots . p$ gesteld worden, omdat bij iedere andere bepaling Q gelijk aan 0 zou worden. Door permutatie van $r, s, t, \ldots .$ wordt Q soms in $+ Q$, soms in $- Q$ veranderd, bijgevolg omvat de som R alle termen der determinante $\Sigma \pm a_{1,1}\, a_{2,2}\, a_{3,3} \ldots . a_{n,n}$, die met den factor Q zijn aangedaan, en is

$$R = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots . a_{1n} \\ \ldots \ldots \\ a_{n1} \ldots . a_{n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} \ldots . b_{1n} \\ \ldots \ldots \\ b_{n1} \ldots . b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Is $p > n$, dan kunnen voor de complexie der nummers $r, s, t, \ldots .$ alle combinatiën n aan n uit de rij $1, 2 \ldots p$ genomen worden, daardoor vindt men $\overset{p}{C}_n$ termen van de te vormen som, waaruit men de anderen kan afleiden, indien men voor iedere combinatie $r, s, t, \ldots .$ hare permutatiën stelt. Nu vormt elk der $\overset{p}{C}_n$ termen met de daaruit afgeleide termen het product van twee determinanten P en Q, derhalve is:

$$R = \Sigma \begin{vmatrix} a_{1r} & a_{1s} & a_{1t} \ldots . \\ a_{2r} & a_{2s} & a_{2t} \ldots . \\ a_{3r} & a_{3s} & a_{3t} \ldots . \\ \ldots \ldots \ldots \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{1r} & b_{1s} & b_{1t} \ldots . \\ b_{2r} & b_{2s} & b_{2t} \ldots . \\ b_{3r} & b_{3s} & b_{3t} \ldots . \\ \ldots \ldots \ldots \end{vmatrix}$$

waarin voor $r, s, t \ldots .$ alle combinatiën n aan n uit de elementen $1.2.3 \ldots . p$ te schrijven zijn.

Wanneer gegeven is

$$d_{ik} = a_i\, f_k + b_i\, g_k + c_i\, h_k,$$

dan is

$$\begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1 & g_1 \\ f_2 & g_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1 & h_1 \\ f_2 & h_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} g_1 & h_1 \\ g_2 & h_2 \end{vmatrix}$$

19. Indien n vergelijkingen van den eersten graad met n onbekenden gegeven zijn, namelijk

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots a_{1n}x_n = p_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots a_{2n}x_n = p_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots a_{3n}x_n = p_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots a_{nn}x_n = p_n \end{array}\right\} (\alpha),$$

dan kan men deze vergelijkingen door de leer der determinanten op eene zeer eenvoudige wijze oplossen.

Nemen wij, om zulks te doen, de determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots & a_{n} \end{vmatrix},$$

en noemen wij $\alpha_{i,k}$ den coëfficiënt van $a_{i,k}$ in de ontwikkeling van D, dan bevat deze coëfficiënt geen enkel element uit de horizontale rij, noch uit de verticale k en is, het teeken daargelaten, de determinante, die men verkrijgt door de $i$de rij en de $k$de kolom uit D weg te laten. Men heeft dus:

$$D = a_{1k}\ \alpha_{1k} + a_{2k}\ \alpha_{2k} + \ldots a_{nk}\ \alpha_{nk} \text{ (Zie N°. 9) } \ldots (\beta)$$

Indien wij verder de elementen van de $k$de verticale rij vervangen door de overeenkomstige elementen van de $i$de, dan wordt de determinante identiek gelijk aan 0. Men zal dus hebben

$$a_{1,k}\ a_{1,i} + a_{2,k}\ a_{2,i} + \ldots + a_{n,k}\ a_{n,i} = 0, \quad \ldots\ldots\ (\gamma)$$

waarin i en k niet aan elkander gelijk zijn.

Vermenigvuldigen wij nu de opgegeven vergelijkingen achtereenvolgens met

$$a_{1,k},\ a_{2,k},\ a_{3,k}, \ldots\ldots a_{n,k},$$

dan zal de coëfficiënt van x_i juist het eerste lid zijn van de vergelijking (γ) en zal dus identiek gelijk zijn aan nul. In het eerste lid zal dus geen andere term overblijven dan de term x_k, die volgens (β) voorgesteld wordt door Dx_k, zoodat men alsdan zal hebben:

$$Dx_k = a_{1k}\ p_1 + a_{2k}\ p_2 \ldots\ldots a_{nk}\ p_n.$$

Het tweede lid van deze vergelijking is de determinante D, waarin men de elementen van de $k$de verticale rij vervangen heeft door p_1, p_2, p_3 ..... Men kan daarvoor dus schrijven:

$$Dx_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots a_{1k-1} & p_1 & a_{1,k+1} \ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots\ldots a_{2,k-1} & p_2 & a_{2,k+1} \ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots\ldots a_{n,k-1} & p_n & a_{n,k+1} \ldots\ldots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Hieruit ziet men, dat de algemeene noemer van de waarden der onbekenden de determinante is, die gevormd wordt uit de coëfficiënten van alle onbekenden. Vervangt men in deze determinante de coëfficiënten van eene onbekende door de standvastige termen, die in het tweede lid der vergelijking voorkomen, dan vindt men den teller van de breuk, die de waarde dezer onbekende uitdrukt.

20. Om uit $n+1$ vergelijkingen met n onbekenden van den eersten graad de onbekenden op te lossen, kiezen wij het volgende voorbeeld:

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1&=0\\ a_2x+b_2y+c_2&=0\\ a_3x+b_3y+c_3&=0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (\alpha)$$

Stellen wij hierin $x=\frac{x'}{z'}$ en $y=\frac{y'}{z'}$, dan gaan de vergelijkingen (α) over in

$$\left.\begin{aligned} a_1x'+b_1y'+c_1z'&=0\\ a_2x'+b_2y'+c_2z'&=0\\ a_3x'+b_3y'+c_3z'&=0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (\beta)$$

aan welke vergelijkingen voldaan zal worden door een oneindig aantal eindige waarden van x', y' en z'. Nu geeft de algemeene oplossing van het vorige nummer

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot z' = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0\\ a_2 & b_2 & 0\\ a_3 & b_3 & 0 \end{vmatrix}$$

en daar deze laatste waarde gelijk is aan nul, zal men, omdat z niet gelijk aan 0 kan zijn, in het algemeen hebben:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Zoodat de eliminatie van n onbekenden uit $n+1$ vergelijkingen — want men ziet gemakkelijk in, dat deze redeneering algemeen is — indien deze vergelijkingen van den eersten graad zijn, verkregen wordt door de determinante van $(n+1)^2$ coëfficiënten gelijk aan nul te stellen.

21. Wanneer de drie hoekpunten van een driehoek ten opzichte van een paar assen, die een hoek μ maken, tot coördinaten hebben (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) en men de hoekpunten doet volgen in de richting van de as der x tot die der y, dan vindt men voor den inhoud van dien driehoek:

$$\tfrac{1}{2}\sin\mu\begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_3 & y_3\end{vmatrix}$$

hetgeen men onmiddellijk kan zien, indien men de determinante uitwerkt.

22. Vraagstuk. *Onder welke voorwaarde zal de rechte*

$$mx + ny + p = 0$$

raaklijn zijn aan de kromme van den tweeden graad

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

De vergelijking van de raaklijn in het punt (x', y') aan de kromme is

$$\left.\begin{matrix}(2Ax' + By' + D)x + (Bx' + 2Cy' + E)y\\ + Dx' + Ey' + 2F\end{matrix}\right\} = 0.$$

Opdat deze vergelijking de zelfde rechte voorstelle als de vergelijking

$$mx + ny + p = 0$$

moeten de coëfficiënten der beide vergelijkingen evenredig zijn, men moet dus hebben:

$$\begin{aligned}2Ax' + By' + D &= \alpha m,\\ Bx' + 2Cy' + E &= \alpha n,\\ Dx' + Ey' + 2F &= \alpha p;\end{aligned}$$

dewijl bovendien het raakpunt in de lijn $mx + ny + p = 0$ gelegen moet zijn, heeft men nog te voldoen aan de vergelijking

$$mx' + ny' + p = 0.$$

Er moeten dus geëlimineerd worden x', y' en α tusschen de vergelijkingen

$$\begin{aligned}2Ax' + By' - \alpha m + D &= 0\\ Bx' + 2Cy' - \alpha n + E &= 0\\ Dx' + Ey' - \alpha p + 2F &= 0\\ mx' + ny' - \alpha.0 + p &= 0.\end{aligned}$$

De uitkomst van deze eliminatie is volgens N°. 20.

$$\begin{vmatrix} 2A & B & -m & D \\ B & 2C & -n & E \\ D & E & -p & 2F \\ m & n & 0 & p \end{vmatrix} = 0,$$

waarvoor men ook schrijven kan:

$$\begin{vmatrix} 2A & B & D & m \\ B & 2C & E & n \\ D & E & 2F & p \\ m & n & p & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

welke determinante symetriek is.

Wil men dat de as der z tangens worde, dan moeten m en p te gelijk nul worden; in dat geval vindt men:

$$D^2 - 4AF = 0.$$

Aanmerking. Het bestek van dit werk laat niet toe, over dit belangrijk onderwerp verder uit te weiden. Hen, die zich met de leer der determinanten in al hare toepassingen willen bekend maken, verwijzen wij naar de schriften van JACOBI, voorkomende in CRELLE's *Journal*, van BRIOSCHI (*La teorica dei determinanti*) naar BALTZER's *Theorie und Anwendung der Determinanten*, van welk laatste werk ook eene Fransche vertaling bestaat, en naar SERRET's *Cours d'algèbre supérieure.*

BIJLAGEN.

I. Over de machtsverheffing van polynomia.

1. Stelling. *Wanneer men eenig polynomium* $(a+b+c+d+e+$ *enz.*$)$ *tot de* n^{de} *macht verheft, dan zal — wanneer* n *een geheel positief getal is — de macht bestaan uit eene som van termen, die ieder bestaan uit* n *factoren* $a, b, c, d, \ldots\ldots$; *terwijl uit den algemeenen term*

$$\frac{1.2.3.4\ldots n}{1.2\ldots\alpha.1.2\ldots\beta.1.2\ldots\gamma.1.2\ldots\delta\ldots}\,a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}d^{\delta}\ldots\ldots$$

elke term wordt afgeleid, door aan $\alpha, \beta, \gamma, \delta\ldots$ *de waarden* $0, 1, 2, 3\ldots\ldots n$ *te geven, zoodanig, dat*

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\ldots\ldots=n.$$

Bewijs. Om het product $a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}d^{\delta}\ldots\ldots$ te vormen, kieze men uit de n polynomia $a+b+c+d+e+\ldots$, α polynomia om het product a^{α} samen te stellen; uit de $n-\alpha$ overblijvende, neme men er β om uit den tweeden term de macht b^{β} te vormen, voor c^{γ} neme men er uit de $n-\alpha-\beta$ overblijvende polynomia een aantal, dat uitgedrukt wordt door γ enz., dan zal men, wanneer men het product $a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}d^{\delta}\ldots\ldots$ op alle mogelijke wijzen heeft samengesteld, de begeerde macht vinden. (Men vergelijke hiermede § 13 mijner *Theorie der Algemeene Rekenkunde.*)

Nu kan men a^{α} uit n polynomia vormen op C^{n}_{α}, b^{β} op $C^{n-\alpha}_{\beta}$,

c^γ op $C_\gamma^{n-\alpha-\beta}$, d^δ op $C_\delta^{n-\alpha-\beta-\gamma}$ wijzen, enz., derhalve is de coëfficiënt van $a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \ldots\ldots$

$$C_\alpha^n \times C_\beta^{n-\alpha} \times C_\gamma^{n-\alpha-\beta} \times \ldots = \frac{1.2.3.\ldots.n}{1.2\ldots\alpha.1.2\ldots\beta \times 1.2\ldots\gamma \times \ldots}$$

2. Moet men bijv. den vorm $(a+b+c+d)$ tot de vierde macht verheffen, dan vormt men de volgende combinatiën voor de exponenten

4	3 1	2 1 1	1 1 1 1
	1 3	1 2 1	
	2 2	1 1 2	

De coëfficiënt van de termen, waarin een letter tot de 4de macht voorkomt, is:

$$\frac{1.2.3.4}{1.2.3.4} = 1.$$

De coëfficiënt van de termen

a^3b en $ab^3 \ldots\ldots$ is gelijk aan $\frac{1.2.3.4}{1.2.3} = 4$,

van $a^2b^2 \ldots\ldots$ $\frac{1.2.3.4}{1.2.1.2} = 6$,

van a^2bc, ab^2c, $abc^2 \ldots\ldots$ $\frac{1.2.3.4}{1.2} = 12$,

van $abcd \ldots\ldots$ $1.2.3.4 = 24$.

Stelt men nu de som van al deze termen achtereenvolgens voor door

$$\Sigma a^4,\ \Sigma a^3b,\ \Sigma a^2b^2,\ \Sigma a^2bc,\ \Sigma abcd,$$

dan is

$$(a+b+c+d)^2 = \Sigma a^4 + 4\Sigma a^3b + 6\Sigma a^2b^2 + \\ + 12\Sigma a^2bc + 24\Sigma abcd.$$

Stelt men hieruit, door alle letters behoorlijk te vervangen, de geheele macht samen, dan vindt men:

Σa^4	$4\Sigma a^3b$	$6\Sigma a^2b^2$	$12\,\Sigma a^2bc$	$24\,\Sigma abcd$
a^4	$4\,a^3b$	$6\,a^2b^2$	$12\,a^2bc$	$24\,abcd.$
b^4	$4\,a^3c$	$6\,c^2b^2$	$12\,a^2dc$	
c^4	$4\,a^3d$	$6\,d^2b^2$	$12\,a^2bd$	
d^4	$4\,b^3a$	$6\,a^2c^2$	$12\,b^2ac$	
	$4\,c^3a$	$6\,a^2d^2$	$12\,b^2ad$	
	$4\,d^3a$	$6\,c^2d^2$	$12\,b^2cd$	
	$4\,b^3c$		$12\,c^2ab$	
	$4\,b^3d$		$12\,c^2bd$	
	$4\,c^3b$		$12\,c^2ad$	
	$4\,c^3d$		$12\,d^2ab$	
	$4\,d^3b$		$12\,d^2ac$	
	$4\,d^3c$		$12\,d^2bc$	

In de formule van N°. 1 eene andere notatie invoerende, heeft men voor den coëfficiënt van $a^\alpha\ b^\beta\ c^\gamma\ d^\delta\ \ldots\ldots$

$$\frac{{}^{n}P_{n}}{{}^{\alpha}P_{\alpha}\times{}^{\beta}P_{\beta}\times{}^{\gamma}P_{\gamma}\times\ldots.}$$

Zoodat men in het algemeen zal vinden:

$$(a+b+c+d+\ldots\ldots)^n=\Sigma\,a^n+\frac{{}^{n}P_{n}}{{}^{\alpha}P_{\alpha}\,.\,{}^{\beta}P_{\beta}}\Sigma\,a^\alpha b^\beta+$$

$$+\frac{{}^{n}P_{n}}{{}^{\alpha}P_{\alpha}\,.\,{}^{\beta}P_{\beta}\,{}^{\gamma}P_{\gamma}}\Sigma\,a^\alpha b^\beta c^\gamma+\frac{{}^{n}P_{n}}{{}^{\alpha}P_{\alpha}\,{}^{\beta}P_{\beta}\,{}^{\gamma}P_{\gamma}\,{}^{\delta}P_{\delta}}a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta+$$

enz.

Het bovenstaande toepassende op de ontwikkeling van de n^{de} macht van het polynomium $a_0+a_1x+a_2x^2+a^3x^3+\ldots..$ volgens de opklimmende machten van x, vindt men voor den algemeenen term der ontwikkeling:

$$\frac{{}^{n}P_{n}}{{}^{\alpha}P_{\alpha}.{}^{\beta}P_{\beta}.{}^{\gamma}P_{\gamma}\ldots}(a_0)^{\alpha}.(a_1x)^{\beta}(a_2x^2)^{\gamma}\ldots\ldots$$

$$=\frac{{}^{n}P_{n}}{{}^{\alpha}P_{\alpha}.{}^{\beta}P_{\beta}\,{}^{\gamma}P_{\gamma}\ldots.}a_0{}^{\alpha}\,a_1{}^{\beta}\,a_2{}^{\gamma}\ldots\ldots\ldots x^{\beta+2\gamma+3\delta}\ldots\ldots,$$

zoodat de coëfficiënt van eenigen term x^k uit zooveel termen zal bestaan als er verschillende wijzen zijn om door geheele positieve getallen, nul daarbij ingesloten, te voldoen aan de vergelijking

$$\beta+2\gamma+3\delta+4\varepsilon+\ldots\ldots=k,\ \text{waarin}$$

α nummers 0, β nummers 1, γ nummers 2, enz. k opleveren.

Nemen wij bij voorbeeld $n=5$ en $k=6$, dan kan men den exponent van x op de volgende wijze samenstellen:

0	0	0	0	6
0	0	0	1	5
0	0	0	2	4
0	0	0	3	3
0	0	1	1	4
0	0	1	2	3
0	0	2	2	2
0	1	1	1	3
0	1	1	2	2
1	1	1	1	2

Men vindt dus tot termen:

$$a_0{}^{4}a_6,\ a_0{}^{3}a_1a_5,\ a_0{}^{3}a_2a_4,\ a_0{}^{3}a_3{}^{2},\ a_0{}^{2}a_1{}^{2}a_4,\ a_0{}^{2}a_1a_2a_3,$$
$$a_0{}^{2}a_2{}^{3},\ a_0a_1{}^{3}a_3,\ a_0a_1{}^{2}a_2{}^{2},\ a_1{}^{4}a_2,$$

waarvoor men door de algemeene formule respectievelijk tot getallencoëfficiënten vindt:

$$5,\ 20,\ 20,\ 10,\ 30,\ 60,\ 10,\ 20,\ 30,\ 5,$$

zoodat thans de geheele coëfficiënt van de x^6 bekend is.

Aanmerking. Over een en ander kan men behalve vele nieuwere werken naslaan: MOIVRE, *Phil. Trans.* en EULER Introd. I cap. 16. — Vergelijk BALTZER, *El.*

II. Het theorema van Girard.

1. Men noemt eene functie van verschillende grootheden *symetriek*, wanneer zij niet verandert, indien men de grootheden, waarvan zij eene functie is, op alle mogelijke wijzen met elkander verwisselt.

De som der wortels, de som der wortels twee aan twee, drie aan drie, ... eener vergelijking zijn dus symetrieke functiën van die wortels. Evenzoo is het ook met de sommen van gelijknamige positieve of negatieve machten van al de wortels eener vergelijking, die wij nu willen uitdrukken in hare coëfficiënten.

Indien a, b, c, d..... wortels zijn van de vergelijking:

$$f(x) = x^m - A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} - \ldots - A_{m-1} x + A_m = 0,$$

dan heeft men de identieke vergelijking:

$$x^m - A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\ldots \quad (1)$$

Dewijl deze vergelijking voor alle waarden van x moet doorgaan, stellen wij $x+k$ voor x, en vinden dan:

$$(x+k)^m - A_1(x+k)^{m-1} + A_2(x+k)^{m-2} + \ldots - A_{m-1}(x+k) + A_m =$$

$$\{(x-a)+k\}\{(x-b)+k\} \times \{(x-c)+k\}\{(x-d)+k\} \times \ldots.$$

Wanneer men de termen dezer vergelijking ontwikkelt, dan zal men hebben voor de coëfficiënten van de eerste machten van k:

$$mx^{m-1} - A_1(m-1)x^{m-2} + A_2(m-2)x^{m-3} + \ldots - A_{m-1} =$$

$$\left.\begin{array}{l} (x-b)(x-c)(x-d) + \ldots \\ (x-a)(x-c)(x-d) + \ldots \\ (x-a)(x-b)(x-d) + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Deelt men nu de vergelijking (2) door de vergelijking (1), dan vindt men aanstonds (zie § 30):

$$\frac{f_1(x)}{f(x)} = \frac{mx^{m-1} - A_1(m-1)x^{m-2} + \ldots\ldots - A_{m-1}}{x^m - A_1x^{m-1} + \ldots\ldots + A_m} =$$

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} + \frac{1}{x-d} + \ldots\ldots \quad (3)$$

welke vergelijking door zal gaan voor alle waarden van x.

Maar

$$\frac{1}{x-a} = \frac{1}{x} + \frac{a}{x^2} + \frac{a^2}{x^3} + \frac{a^3}{x^4} + \ldots\ldots,$$

$$\frac{1}{x-b} = \frac{1}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{b^2}{x^3} + \frac{b^3}{x^4} + \ldots\ldots,$$

$$\frac{1}{x-c} = \frac{1}{x} + \frac{c}{x^2} + \frac{c^2}{x^3} + \frac{c^3}{x^4} + \ldots\ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

zoodat, indien wij verder stellen:

$$S_1 = a + b + c + d + \ldots\ldots,$$
$$S_2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \ldots\ldots,$$
$$S_3 = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + \ldots\ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_m = a^m + b^m + c^m + d^m + \ldots\ldots,$$

de vergelijking (3) overgaat in:

$$\frac{mx^{m-1} - A_1(m-1)x^{m-2} + \ldots\ldots - A_{m-1}}{x^m - A_1x^{m-1} + \ldots\ldots + A_m} =$$

$$= \frac{m}{x} + \frac{S_1}{x^2} + \frac{S_2}{x^3} + \ldots\ldots \frac{S_m}{x^{m+1}} + \frac{S_{m+1}}{x^{m+2}} + \ldots\ldots \quad (4)$$

of, indien men met den noemer van het eerste lid vermenigvuldigt:

$$mx^{m-1} - (m-1)A_1x^{m-2} + (m-2)A_2x^{m-3} + \ldots\ldots - A_{m-1} =$$

$$= \left.\begin{matrix} mx^{m-1} - mA_1 \\ + S_1 \end{matrix}\right\} x^{m-2} \left.\begin{matrix} + mA_2 \\ - AS_1 \\ + S_2 \end{matrix}\right\} x^{m-3} \left.\begin{matrix} - mA_3 \\ + A_2S_1 \\ - A_1S_2 \\ + S_3 \end{matrix}\right\} x^{m-4} + \text{enz.}$$

Waaruit, omdat de vergelijking identiek is, onmiddellijk volgt:

$$\begin{aligned} m &= m \\ S_1 - mA_1 &= -(m-1)A_1 \\ S_2 - A_1S_1 + mA_2 &= (m-2)A_2 \\ S_3 - A_1S_2 + A_2S_1 - mA_3 &= -(m-3)A_3, \end{aligned}$$

welke vergelijkingen wederom herleid worden tot:

$$\left.\begin{aligned} &S_1 - A_1 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha) \\ &S_2 - A_1S_1 + 2A_2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (\beta) \\ &S_3 - A_1S_2 + A_2S_1 - 3A_3 = 0 \ldots\ldots\ldots (\gamma) \\ &S_4 - A_1S_3 + A_2S_2 - A_3S_1 + 4A_4 = 0 \ldots (\delta) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (5)$$

Men ziet gemakkelijk in, dat wanneer men het tweede lid der vergelijking (4) met x^m vermenigvuldigt, de term $\frac{S_m}{x^{m+1}}$ tot uitkomst geeft $S_m x^{-1}$, terwijl het product van A_m met $\frac{m}{x}$ gelijk is aan $mA_m x^{-1}$; indien wij m voorstellen door S_0, wordt de geheele coëfficiënt van x^{-1}

$$S_m - A_1 S_{m-1} + A_2 S_{m-2} - \ldots\ldots + A_m S_0 \ldots\ldots (6)$$

Op dergelijke wijze vinden wij voor den coëfficiënt van x^{-2}:

$$S_{m+1} - A_1 S_m + A_2 S_{m-1} + \ldots\ldots A_m S_1 = 0, \ldots (7)$$

omdat de coëfficiënt van x^{-2} in het eerste lid gelijk is aan nul.

De beide formules (6) en (7) zijn begrepen in eene meer algemeene, die verkregen wordt door de primitieve vergelijking (1) $f(x) = 0$ met x^n te vermenigvuldigen, x achtereenvolgens door a, b, c, d, te vervangen enz. Deze meer algemeene formule, waarvan de verdere uitwerking aan den Lezer gelaten wordt, is:

$$S_{m+n} - A_1 S_{m+n-1} + A_2 S_{m+n-2} - \ldots\ldots + A_m S_n = 0.$$

Stelt men in de primitieve vergelijking

$$f(x) = x^m - A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} - A_3 x^{m-3} + \ldots + A_m = 0$$

$x = \frac{1}{y}$, dan vindt men eene vergelijking, die $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$..... tot wortels heeft; berekent men dus uit de waarden der coëfficiënten van $f(y)$ volgens formule (5) de waarden van S_1, S_2, S_3,..... dan heeft men de sommen van negatieve machten van wortels der vergelijking. Men zou ook voor de negatieve machten der wortels rechtstreeks formulen kunnen opsporen, die met de bovenstaanden analoog zijn; daartoe hadde men slechts de breuken

$$\frac{1}{(x-a)},\ \frac{1}{(x-b)},\ \frac{1}{(x-c)},\ \frac{1}{(x-d)} \cdots\cdots$$

te ontwikkelen volgens de positieve machten van x, om dan te vinden:

$$\frac{mx^{m-1} - A_1(m-1)x^{m-2} + \ldots - A_{m-1}}{x^m - A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} - \ldots + A_m} =$$

$$-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\ldots\right)-\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}\right)x^2 - \ldots$$

$$= -S'_1 - S'_2 x - S'_3 x^2 - \ldots$$

waarin S'_1, S'_2, S'_3 de sommen voorstellen der eerste, tweede,.. negatieve machten van de wortels.

2. De formule (5), die wij in het vorige nummer gevonden hebben, geeft aanleiding tot de oplossing van het volgende

Vraagstuk. *Van vier getallen is gegeven de som hunner eerste machten gelijk aan* 10, *hunner tweede machten gelijk aan* 30, *hunner derde machten gelijk aan* 100, *hunner vierde machten gelijk aan* 354, *men vraagt naar die getallen?*

Aangezien hier gegeven is $S_1 = 10$, $S_2 = 30$, $S_3 = 100$, $S_4 = 354$, vinden wij uit de formule (5) van het vorige N°.:

$$A_1 = S_1 = 10$$
$$A_2 = \tfrac{1}{2}(-S_2 + A_1 S_1) = 35$$
$$A_3 = \tfrac{1}{3}(S_3 - A_1 S_2 + A_2 S_1) = 50$$
$$A_4 = \tfrac{1}{4}(-S_4 + A_1 S_3 - A_2 S_2 + A_3 S_1) = 24.$$

Beschouwen wij dus S_1, S_2, S_3, S_4 als de machten van de

wortels eener vergelijking, dan zal op grond van het vorige die vergelijking tot coëfficiënten hebben A_1, A_2, A_3, A_4; om de gevraagde getallen te vinden, heeft men dus op te lossen de vergelijking

$$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0.$$

Uit deze oplossing ziet men, dat men in het algemeen *n getallen kan vinden, indien gegeven is de som hunner eerste, tweede, ... n^{de}-machten.*

Aanmerking. „Deze handelwijze is bekend onder den naam van *theorema van* ALBERT GIRARD, een Nederlandsch Wiskundige der 17de eeuw." LOBATTO, *Lessen over de Hoogere Algebra*, pag. 276. SERRET geeft in zijnen *Court d'Alg. sup.* dezelfde formules op onder den titel van *Formules de* NEWTON *pour le calcul des sommes de puissances semblables des racines d'une équation.* Vergel. het aangeh. werk pag. 373 van het eerste deel sqq. Het is mogelijk dat NEWTON, onbekend met GIRARD's werk, deze formulen op nieuw gevonden heeft; zeker is het, dat ze gevonden worden in het zeer zeldzame, maar hoogst merkwaardige werkje: *Invention nouvelle en l'Algebre, tant pour la solution des equations, que pour recognoistre le nombre des solutions quelles reçoivent, avec plusieurs choses qui sons necessaires à la perfection de ceste diuine science, par* ALB. GIRARD. *A.* Amsterdam MDCXXIX. Ook DE GELDER heeft GIRARD recht doen wedervaren.

VRAAGSTUKKEN TER OPLOSSING.

1. Aan welke voorwaarden moet voldaan worden, opdat de reeksen:

$a)$ $\frac{x}{1+x} + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^3}{1+x^3} + \ldots\ldots \frac{x^n}{1+x^n} +$ enz.

$b)$ $\frac{1}{m^a} + \frac{n}{(m+n-1)^a} + \frac{n^2}{(m+n^2-1)^a} + \cdots \frac{n^q}{(m+n^q-1)^a} +$ enz.

$c)$ $1 + \frac{2.3}{1.6}x + \frac{2.3.3.4}{1.2.6.7}x^2 + \frac{2.3.4.3.4.5}{1.2.3.6.7.8}x^3 + \frac{2.3.4.5.3.4.5.6}{1.2.3.4.6.7.8.9}x^4 +$ e

convergeeren?

2. Men bepale de convergentie of divergentie der volgende reeksen:

$a)$ $1 + \frac{2.3}{1.2}x + \frac{3.4}{1.2}x^2 + \frac{4.5}{1.2}x^3 + \frac{5.6}{1.2}x^4 +$ enz.

$b)$ $\frac{1}{(4a^2+4.1^2+1)^2-16.1^2} + \frac{2}{(4a^2+4.2^2+1)^2-16.2^2} +$
$+ \frac{3}{(4a^2+4.3^2+1)^2-16.3^2} + \ldots\ldots$

$c)$ $2 + \frac{7}{4}x + \frac{12}{9}x^2 + \frac{17}{16}x^3 + \frac{22}{25}x^4 + \ldots\ldots$

$d)$ $\frac{4(a^2-1^2)+1}{(4a^2+4.1^2+1)^2-16.1^2} + \frac{4(a^2-2^2)+1}{(4a^2+4.2^2+1)^2-16.2^2} +$
$+ \frac{4(a^2-3^2)+1}{(4a^2+4.3^2+1)^2-16.3^2} +$ enz.

$$e)\ \frac{a}{c}+\frac{a(a+b)(2a+b)}{c(c+d)(2c+d)}+\frac{a(a+b)(2a+b)}{c(c+d)(2c+d)}\cdot\frac{(2a+b)(4a+b)}{(2c+d)(4c+d)}+$$
$$+\frac{a(a+b)(2a+b)(3a+b)}{c(c+d)(2c+d)(3c+d)}\cdot\frac{(2a+b)(4a+b)(6a+b)}{(2c+d)(4c+d)(6c+d)}+\text{enz.}$$

$$f)\quad 1+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot3}{4\cdot6}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3+$$
$$+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5}{4\cdot6\cdot8}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4+\text{enz.}$$

$$g)\ 1+\frac{2}{x}\left\{\nu\left(1+\frac{x}{2}\right)-1\right\}+\frac{2\cdot3}{x^2}\left\{\nu\left(1+\frac{x}{2}\right)-1\right\}$$
$$\left\{\nu\left(1+\frac{x}{3}\right)-1\right\}+\frac{2\cdot3\cdot4}{x^3}\left\{\nu\left(1+\frac{x}{2}\right)-1\right\}$$
$$\left\{\nu\left(1+\frac{x}{3}\right)-1\right\}\left\{\nu\left(1+\frac{x}{4}\right)-1\right\}+\text{enz.}$$

$$h)\ 1+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1-\cos^2x}{\sin^2\frac{x}{2}}+\tfrac{1}{4}\frac{(1-\cos^2x)\left(1-\cos^2\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\frac{x}{2}\cdot\sin^2\frac{x}{4}}+$$
$$+\tfrac{1}{8}\frac{(1-\cos^2x)\left(1-\cos^2\frac{x}{2}\right)\left(1-\cos^2\frac{x}{3}\right)}{\sin^2\frac{x}{2}\cdot\sin^2\frac{x}{4}\cdot\sin^2\frac{x}{6}}+\text{enz.}$$

$$i)\ 1+\frac{boog\sin\frac{1}{x}}{boog\,tang\frac{ax}{b+2ax^2}}+\frac{boog\sin\frac{1}{x}}{boog\,tang\frac{ax}{b+2ax^2}}\cdot\frac{boog\sin\frac{1}{2x}}{boog\,tang\frac{ax}{b+8ax^2}}$$
$$+\frac{boog\sin\frac{1}{x}}{boog\,tang\frac{ax}{b+2ax^2}}\cdot\frac{boog\sin\frac{1}{2x}}{boog\,tang\frac{ax}{b+8ax^2}}\cdot\frac{boog\sin\frac{1}{3x}}{boog\,tang\frac{ax}{b+18ax^2}}+$$
$$+\frac{boog\sin\frac{1}{x}}{boog\,tg\frac{ax}{b+2ax^2}}\cdot\frac{boog\sin\frac{1}{2x}}{boog\,tg\frac{ax}{b+8ax^2}}\cdot\frac{boog\sin\frac{1}{3x}}{boog\,tg\frac{ax}{b+18ax^2}}\cdot\frac{boog\sin\frac{1}{4x}}{boog\,tg\frac{ax}{b+32ax^2}}$$
$$+\text{enz.}$$

N. B. De convergentie van de bovenstaande reeksen, kan bepaald worden door toepassing van § 23, 6.

3. Door toepassing van § 23, 8 uitspraak te doen over de convergentie of divergentie van de volgende reeksen:

a) $log\,1 + log\sqrt{2} + log\sqrt[3]{3} + log\sqrt[4]{4} + log\sqrt[5]{5} + \text{enz.}$

b) $1 + (\sqrt{e}-1) + (\sqrt[3]{e}-1) + (\sqrt[4]{e}-1) + (\sqrt[5]{e}-1) + \text{enz.}$

c) $1 + \left\{a^{\frac{e}{2}} - (a+1)^{-\frac{e}{2}}\right\} + \left\{a^{\frac{e}{3}} - (a+1)^{-\frac{e}{3}}\right\} + \left\{a^{\frac{e}{4}} - (a+1)^{-\frac{e}{4}}\right\} + \text{enz.}$

d) $1 + \frac{\sqrt[4]{(1+2x)} - \sqrt[4]{2x}}{\sqrt[4]{2}} + \frac{\sqrt[4]{(1+3x)} - \sqrt[4]{3x}}{\sqrt[4]{3}} + \frac{\sqrt[4]{(1+4x)} - \sqrt[4]{4x}}{\sqrt[4]{4}} + \text{enz.}$

e) $sin\,x + \frac{1}{4}\,sin\,\frac{x}{2} + \frac{1}{9}\,sin\,\frac{x}{3} + \frac{1}{16}\,sin\,\frac{x}{4} + \ldots\ldots$

4. Door de stellingen van § 28, N°. 10, 11 of 12 te beoordeelen of de volgende reeksen convergent of divergent zijn:

a) $1 + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2\sqrt{5}-\sqrt{8}}{2\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2\sqrt{5}-\sqrt{8}}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{3\sqrt{7}-\sqrt{11}}{3\sqrt{7}} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2\sqrt{5}-\sqrt{8}}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{3\sqrt{7}-\sqrt{11}}{3\sqrt{7}} \cdot \frac{4\sqrt{9}-\sqrt{14}}{4\sqrt{9}} + \text{enz.}$

b) $1 + (1-\sqrt{x}) + \left\{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{x} + \frac{x}{\sqrt{(1.2)}}\right\} + \left\{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{x} + \left(\frac{1}{\sqrt{(1.2)}} + \frac{1}{\sqrt{(1.3)}} + \frac{1}{\sqrt{(2.3)}}\right)x - \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{(1.2.3)}}\right\} + \left\{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}}\right)\sqrt{x} + \left(\frac{1}{\sqrt{(1.2)}} + \frac{1}{\sqrt{(1.3)}} + \frac{1}{\sqrt{(1.4)}} + \frac{1}{\sqrt{(2.3)}} + \frac{1}{\sqrt{(2.4)}} + \frac{1}{\sqrt{(3.4)}}\right)x - \left(\frac{1}{\sqrt{(1.2.3)}} + \frac{1}{\sqrt{(1.2.4)}} + \frac{1}{\sqrt{(1.3.4)}} + \frac{1}{\sqrt{(2.3.4)}}\right)x\sqrt{x} + \frac{x^2}{\sqrt{(1.2.3.4)}}\right\} + \text{enz.}$

c) $\sin 1 + \frac{1}{2}\sin\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\sin\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\sin\frac{1}{5} + \text{enz.}$

d) $1 - x^2 - x^2\left\{1 - \frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}x^2)^2\right\} - x^2\left\{1 - \frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}x^2)^2\right\}$

$$\left\{1 - \frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}x^2)^2\right\} - x^2\left\{1 - \frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}x^2)^2\right\}$$

$$\left\{1 - \frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}x^2)^2\right\}\left\{1 - \frac{1}{4}(1+\frac{1}{4}x^2)^4\right\} - x^2\left\{1 - \frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}x^2)^2\right\}$$

$$\left\{1 - \frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}x^2)^2\right\}\left\{1 - \frac{1}{4}(1+\frac{1}{4}x^2)^4\right\}\left\{1 - \frac{1}{5}(1+\frac{1}{5}x^2)^5\right\} - \text{enz.}$$

e) $1 + \frac{1}{a^{\sqrt{elog2}}} + \frac{1}{a^{\sqrt{elog3}}} + \frac{1}{a^{\sqrt{elog4}}} + \text{enz.}$

f) $1 + (1 - tang\, x) + (1 - tang x)(1 - \frac{1}{2}\, tang\, \frac{1}{2}\, x) +$
$+ (1 - tang\, x)(1 - \frac{1}{3}\, tang\, \frac{1}{3}\, x)(1 - \frac{1}{3}\, tang\, \frac{1}{3}\, x) +$
$+ (1 - tg\, x)(1 - \frac{1}{3}\, tg\, \frac{1}{3}\, x)(1 - \frac{1}{3}\, tg\, \frac{1}{3}\, x)(1 - \frac{1}{4}\, tg\, \frac{1}{4}\, x) + \text{enz.}$

5. Door middel van § 23, N°. 9 uitspraak te doen over de convergentie of divergentie der volgende reeksen:

a) $2 + \frac{3^3}{2^4} + \frac{4^3}{3^5} + \frac{5^4}{4^6} + \frac{6^5}{5^7} + \text{enz.}$

b) $\frac{1}{2^{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}}} \cdot \frac{1+2x}{1+3x} + \frac{1}{2^{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}}} \cdot \frac{2+2x}{2+3x} + \frac{1}{2^{\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}}} \cdot \frac{3+2x}{3+3x} +$

$$+ \frac{1}{2^{\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}}} \cdot \frac{4+2x}{4+3x} + \text{enz.}$$

c) $\frac{a^{\sin x} - 1}{1\, tang\, x} + \frac{a^{\sin\frac{1}{2}x} - 1}{2^{\frac{1}{2}}\, tang\, \frac{1}{2}\, x} + \frac{a^{\sin\frac{1}{3}x} - 1}{3^{\frac{1}{3}}\, tang\, \frac{1}{3}\, x} + \frac{a^{\sin\frac{1}{5}x} - 1}{4^{\frac{1}{5}}\, tang\, \frac{1}{4}\, x} + \text{enz.}$

d) $\frac{1}{2^2} \cdot e^{\sqrt{e^x}} + \frac{1}{3^2} \cdot e^{\sqrt[3]{e^{2x}}} + \frac{1}{4^2} \cdot e^{\sqrt[4]{e^{3x}}} + \frac{1}{5^2} \cdot e^{\sqrt[5]{e^{4x}}} + \text{enz.}$

6. Door middel van § 23, N°. 11 over de convergentie of divergentie der volgende reeksen uitspraak te doen:

a) $1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{4}} + \text{enz.}$

b) $1 + \frac{1}{2\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{4}} + \frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{2}{4}\frac{3}{5}} + \frac{1}{5}\sqrt[3]{\frac{3}{4}\frac{3.4}{5.6}} + \text{enz.}$

$c)\ 1+\frac{2}{1.2}\sqrt{\left\{1-\frac{1}{\sqrt{a}}\right\}}+\frac{2.5}{1.2.2.3}\sqrt{\left\{1-\frac{1}{\sqrt{a}}\right\}\left\{1-\frac{1}{2\sqrt{a}}\right\}}+$

$+\frac{2.5.10}{1.2.2.3.3.4}\sqrt{\left\{1-\frac{1}{\sqrt{a}}\right\}\left\{1-\frac{1}{2\sqrt{a}}\right\}\left\{1-\frac{1}{3\sqrt{a}}\right\}}+$

$+\frac{2.5.10.17}{1.2.2.3\ 3.4.4.5}\sqrt{\left\{1-\frac{1}{\sqrt{a}}\right\}\left\{1-\frac{1}{2\sqrt{a}}\right\}\left\{1-\frac{1}{3\sqrt{a}}\right\}\left\{1-\frac{1}{4\sqrt{a}}\right\}}+$ enz.

$d)\ 1+\frac{1}{e}+\frac{1}{2e^{1+\frac{1}{2}}}+\frac{1}{3e^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}}+\frac{1}{4e^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}}+$ enz.

$e)\ 1+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\cos x\,.\,\cos\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\cos x\,.\,\cos\frac{x}{2}\,,\,\cos\frac{x}{3}+$

$+\frac{1}{8}\cos x\,.\,\cos\frac{x}{2}\,.\,\cos\frac{x}{3}\,.\,\cos\frac{x}{4}.$

7. Men bepale eindelijk de convergentie of divergentie der volgende reeksen, door toepassing van een der in den tekst opgegeven eigenschappen:

$a)\ x^3+\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{5}\left(1+\frac{1}{3^2}\right)x^5+\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{7}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}\right)x^7+$

$+\frac{3.5.7}{4.6.8}\cdot\frac{3}{9}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}\right)x^9+$

$+\frac{3.5.7.9}{4.6.8.10}\cdot\frac{3}{11}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}\right)x^{11}+$ enz.

$b)\ \frac{x}{a_0+a_1+a_2+\ldots\ldots a_p}+\frac{x^2}{a_0 2^p+a_1 2^{p-1}+a_2 2^{p-2}+\ldots\ldots a_p}+$

$+\frac{x^3}{a_0 3^p+a_1 3^{p-1}+a_2 3^{p-2}+\ldots\ldots a_p}+$

$+\frac{x^4}{a_0 4^p+a_1 4^{p-1}+a_2 4^{p-2}+\ldots\ldots a_p}+$ enz.

$c)\ 1\mp\frac{a+2}{2}\left(\frac{a}{2}\right)\times\frac{1}{2bx}+\frac{a+2}{2}\times\frac{a+4}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2\times\frac{1}{4b^2x^2}+$

$\mp\frac{a+2}{2}\times\frac{a+4}{2}\times\frac{a+6}{2}\times\left(\frac{a}{2}\right)^3\times\frac{1}{8b^3x^3}+$

$+\frac{a+2}{2}\times\frac{a+4}{2}\times\frac{a+6}{2}\times\frac{a+8}{2}\times\left(\frac{a}{2}\right)^4\times\frac{1}{16b^4x^4}+$ enz.

$d)$ $\frac{3}{3}C\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \frac{4}{4}\frac{4}{3}C\left(\frac{x}{1+x}\right)^4 + \frac{1}{4.5}\cdot\frac{5}{3}C\left(\frac{x}{1+x}\right)^5 +$

$+ \frac{1}{4.5.6}\frac{6}{3}C\left(\frac{x}{1+6}\right)^6 + \ldots\ldots$

$e)$ $\frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} + \frac{3}{2}\left\{\frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\right\}^3 + \frac{2.6}{2.3}\left\{\frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\right\}^5 +$

$\frac{2.6.10}{2.3.4}\left\{\frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\right\}^7 + \text{enz.}$

$f)$ $x\sin\varphi + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2\sin 2\varphi + \frac{1}{3}\cdot\frac{1.3}{2.4}x^3\sin 3\varphi +$

$+ \frac{1}{4}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}x^4\sin 4\varphi + \text{enz.}$

$g)$ $\frac{1}{2} + e^{\left(-\frac{1}{2a}\right)^2}\times\cos x + e^{\left(-\frac{2}{2a}\right)^2}\times\cos 2x +$

$+ e^{\left(-\frac{3}{2a}\right)^2}\times\cos 3x + e^{\left(-\frac{4}{2a}\right)^2}\times\cos 4x + \text{enz.}$

$h)$ $\frac{x\cos x}{1} + 1\,\frac{x^2\sin 2x}{1.2} - 2^2\frac{x^3\cos 3x}{1.2.3} + 3^2\frac{x^4\cos 4x}{1.2.3.4} + \text{enz.}$

8. Wanneer de reeks

$$\frac{t_1}{t_0} + \frac{t_2}{t_0+t_1} + \frac{t_3}{t_0+t_1+t_2} + \frac{t_4}{t_0+t_1+t_2+t_3} + \text{enz.}$$

convergeert, convergeert ook de reeks

$$t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + \text{enz.}$$

terwijl deze laatste reeks zal divergeeren indien zulks het geval is met de reeks

$$\frac{t_1}{t_0+t_1} + \frac{t_2}{t_0+t_1+t_2} + \frac{t_3}{t_0+t_1+t_2+t_3} + \ldots.$$

Men vraagt dit te bewijzen.

9. Wanneer men uit de reeks

$$t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + \ldots\ldots,$$

die slechts positieve termen bevat, de volgende limieten berekent:

$$A_1 = lim \left(\frac{^{e}log \left(\frac{1}{t_n} \right)}{n} \right)$$

$$A_2 = lim \left(\frac{^{e}log \left(\frac{1}{nt_n} \right)}{elog\, n} \right)$$

$$A_3 = lim \left(\frac{^{e}log \left(\frac{1}{n\, ^{e}log\, n\, t_n} \right)}{elog_2\, n} \right)$$

$$A_4 = lim \left(\frac{^{e}log \left(\frac{1}{n\, ^{e}log\, n\, ^{e}log_2\, n\, t_n} \right)}{^{e}log_3\, n} \right)$$

enz.

dan zal de reeks convergeeren of divergeeren, naarmate de eerste grootheid A_1, A_2, A_3 ....., welke niet nul is, positief of negatief is.

10. Men vraagt door de methode van FOURRIER (zie § 24, 1—10) de grenzen te bepalen van de wortels van de volgende vergelijkingen:

a) $x^7 - 2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 = 0$

b) $x^5 + 3x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 2x - 2 = 0$

c) $x^5 - 10x^3 + 6x + 1 = 0$

d) $x^6 - 12x^5 + 60x^4 + 123x^2 + 4567x - 89012 = 0$

e) $x^5 + x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0.$

N.B. In *a*) zijn twee, in *b*) twee, in *d*) vier, in *e*) vier imaginaire wortels, die bij eene eerste bewerking in 't oog vallen, over de andere wortels, die paarsgewijze voorkomen, moet men door nadere splitsing trachten te beslissen.

11. Men vraagt naar de grenzen van den grootsten positieven wortel van de vergelijkingen:

$$x^5 + 7x^4 + 4x^2 - 20x - 276 = 0$$
$$x^7 - 24x^3 + 12x - 27 = 0$$
$$x^6 + 4x^3 - 12x^2 - 275x + 14 = 0.$$

12. Men vraagt de limiet van den kleinsten negatieven wortel van de vergelijkingen:

$$x^4 - 12x^2 + 7 = 0$$
$$x^3 - 6x^2 + 2x - 8 = 0$$
$$x^5 - 5x^4 - 17 = 0.$$

13. Welke zijn de limieten van de wortels van de vergelijking:

$$f_1(x) = 0,$$

indien gegeven is:

$$f(x) = (x-3)(x+4)(x+5)(x+6)(x+7) = 0?$$

14. Door middel van het theorema van STURM (§ 25) te beslissen over den aard der wortels van de vergelijkingen:

$2x^4 - 11x^2 + 8x - 16 = 0$
$x^5 - 7x^4 + 13x^3 + x^2 - 16x + 4 = 0$ (Twee gelijke wortels).
$x^6 - 2x^5 - 4x^3 + x - 7 = 0$
$x^8 + x^4 - x^3 - x - 1 = 4.$

15. Pas ook het theorema van STURM toe op de vergelijkingen, die opgegeven zijn onder N°. 10.

16. Door hetzelfde theorema de wortels te scheiden van de vergelijkingen:

$$x^3 + 11x^2 - 102x + 181 = 0$$
$$x^3 - 49x^2 + 658x - 1379 = 0.$$

17. Men vraagt door toepassing van § 26 de wortels op te sporen van de volgende vergelijkingen:

$$x^4 - 27x^3 - 556x^2 + 10092x - 15120 = 0$$
$$x^6 - 2x^5 - 8x^4 + 26x^3 - 29x^2 - 72x + 180 = 0$$
$$x^4 - 3x^3 + 350x^2 + 384x - 2160 = 0.$$

N.B. *a*) Heeft tot wortels 12 en 35 en de beide wortels van de vergelijking $x^2 + 20x - 36 = 0$;

b) heeft tot wortels $+3$, $+2$, -2, -3, en de imaginaire wortels van de vergelijking $x^2 - 2x + 5 = 0$;

c) heeft tot wortels 2 en -3 en de imaginaire wortels van de vergelijking $x^2 - 4x + 360 = 0$.

18. Men vraagt door de benaderingsmethoden van NEWTON, LAGRANGE, FOURRIER, HORNER en RUTHERFORD op te lossen de volgende vergelijkingen:

a) $x^3 - 3x - 1 = 0$ (Zie ook § 14.)
b) $x^3 - 22x - 24 = 0$ (Zie ook § 14.)
c) $x^3 + x^2 + x - 100 = 0$
d) $2x^3 + 2x^2 - 4x - 10 = 0$
e) $x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 4 = 0$
f) $x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 2x - 2 = 0$
g) $x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x - 20 = 0$
h) $x^6 + 4x^5 - 3x^4 - 16x^3 + 11x^2 + 12x - 9 = 0$.

Antwoorden:

a) $+1{,}879385242$
$-1{,}532088886$
$-0{,}347296355$

b) $5{,}1622776601$
$-1{,}1622776601$
-4

c) $4{,}2644299731$
2 imaginaire wortels.

d) $1{,}6248190836$
2 imaginaire wortels.

e) $+1{,}146994592$
$-1{,}090593586$
2 imag. wortels.

f) $1{,}059109003461882$
4 imag. wortels.

g) $1{,}125790$
4 imaginaire.

h) $-1, -3, -3, +1, +1, +1$.

19. Welke zijn de wortels van de volgende vergelijkingen:

a) $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$;
b) $4x^5 - 21x^4 + 25x^3 - 25x^2 + 21x - 4 = 0$;
c) $2x^4 + 3x^3 + x^2 + 3x + 2 = 0$;
d) $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$?

20. Herleidt tot de som of het verschil van eenvoudige gebrokens de volgende vormen :

a) $\dfrac{a^2 - bx^2}{x(a-x)(a+x)}$;

b) $\dfrac{3x - 5}{x^2 - 6x + 8}$;

c) $\dfrac{4a^2x^2 - 4bx^3}{a^4 - x^4}$;

d) $\dfrac{2ax}{(x+a)^2}$;

e) $\dfrac{x^2}{x^3 - ax^2 - a^2x + a^3}$;

f) $\dfrac{a}{(x-1)^3(x+1)^2}$;

g) $\dfrac{a+bx}{(x-1)(x^2+x+1)}$;

h) $\dfrac{5 - 3a}{(3 + 2a + 4a^2)^3}$;

i) $\dfrac{9x^4 - 4x^3 + 13x^2 - 2x + 4}{(x^2+1)(3x^2 - x + 2)^2}$;

k) $\dfrac{4x^8 + 57x^6 + 10x^5 + 256x^4 + 44x^3 + 165x^2 + 68x + 259}{(2x^2+3)^2(x^3 + x^2 + 5x + 5)^2}$;

l) $\dfrac{Px^m + P_1x^{m-1} + P_2x^{m-2} + \text{enz.}}{R.R_1 \ldots S.S_1 \ldots T.T \ldots U.U_1 \ldots}$;

waarin :

$$\left.\begin{array}{l} R = x - a \\ R_1 = x - b \\ R_2 = x - c \\ \ldots\ldots \end{array}\right\}$$ ongelijke reëele factoren ,

$$\left.\begin{array}{l} S = (x-d)^r \\ S_1 = (x-e)^s \\ \ldots\ldots \end{array}\right\}$$ gelijke reëele factoren ,

$$\left.\begin{array}{l} T = x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 \\ T_1 = x^2 + 2\alpha' x + \alpha'^2 + \beta'^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \text{imaginaire ongel. fact.}$$

$$\left.\begin{array}{l} U = (x^2 + 2\gamma x + \gamma^2 + \delta^2)^t \\ U_1 = (x^2 + 2\gamma' x + \gamma'^2 + \delta'^2)^u \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \text{gel. imag. factoren.}$$

voorstellen.

21. Men vraagt de volgende breuken zonder rechtstreeksche optelling of aftrekking tot eene breuk te herleiden:

a) $\frac{1}{x-6} + \frac{4}{4x-5} - \frac{3}{3x-4} + \frac{1}{x-2}$;

b) $\frac{1}{x-2} + \frac{2}{2x-3} + \frac{3}{3x-5} + \frac{4}{4x-5}$.

22. Herleidt tot wederkeerende reeksen:

a) $\frac{2x+2}{x^2+4x-1}$;

b) $\frac{1}{(1+x)(1-x)^2}$;

c) $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$;

d) $\frac{1-5x+8x^2}{\sqrt{x}-8x\sqrt{x}+21x^2\sqrt{x}-18x^3\sqrt{x}}$;

e) $\frac{1-\sqrt[3]{x}}{-6-\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}$.

23. Welke is de voortbrengende breuk van de reeksen:

a) $1+3x+4x^2+7x^3+11x^4+18x^5+$ enz.,

b) $1+2x^2+2x^3+6x^4+10x^5+$ enz.,

c) $1+4x+14x^2+46x^3+146x^4+$ enz.,

indien men weet, dat de noemer van den tweeden graad is?

24. Welke is de voortbrengende breuk van de reeksen

a) $1+2x+3x^2+8x^3+13x^4+38x^5+$ enz.

b) $1+3x+9x^2+23x^3+57x^4+135x^5+$ enz.,

indien de noemer der beide breuken van den derden graad is?

25. De derde term eener wederkeerige reeks is $17x^2$. Men vraagt naar de voortbrengende breuk, indien de noemer der voortbrengende breuk $1 - 6x - 5x^2$ is.

26. Eene wederkeerige reeks heeft tot eersten term 9, tot tweeden $-7x$, tot 15den $-31x^{14}$ en tot zestienden $+33x^{15}$. Men vraagt naar die reeks, indien de noemer der voortbrengende breuk $1 - 2x - x^2$ is.

27. Men vraagt de voortbrengende breuk van de wederkeerige reeks

$$1 + 32x + 243x^2 + 1024x^3 + \text{enz.}$$

28. Hoe bewijst men dat

$$a)\quad \sqrt{2} = \tfrac{7}{5}\left(1 + \tfrac{1}{100} + \frac{1.3}{100.200} + \frac{1.3.5}{100.200.300} + \text{enz.}\right);$$

$$b)\quad \sqrt{(4+\sqrt{7})} + \sqrt{(4-\sqrt{7})} = \tfrac{11}{3}\left(1 + \tfrac{5}{252} + \frac{5.15}{252.504} + \right.$$

$$\left. + \frac{5.15.25}{252.504.756} + \text{enz.}\right)?$$

29. Ontwikkelt in eene reeks de uitdrukkingen:

$$a)\quad \left\{\sqrt{(1+x^2)} + 1\right\}^m.$$

$$b)\quad \frac{1 - 2x\cos\varphi + x^2\cos 2\varphi}{(1 - 2x\cos\varphi + x^2)^2}.$$

30. Men trachte te bewijzen:

$$a)\quad {}^e\log 2 = \tfrac{1}{2}\left\{\tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{2}(\tfrac{3}{4})^2 + \tfrac{1}{3}(\tfrac{3}{4})^3 + \tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{4})^4 + \ldots\ldots\right\} =$$

$$= \tfrac{1}{3}\left\{\tfrac{7}{8} + \tfrac{1}{2}(\tfrac{7}{8})^2 + \tfrac{1}{3}(\tfrac{7}{8})^3 + \tfrac{1}{4}(\tfrac{7}{8})^4 + \ldots\ldots\right\} =$$

$$= \left\{\tfrac{1}{8} - \frac{1}{2.8^2} + \frac{1}{3.8^3} - \frac{1}{4.8^4} + \ldots\ldots\right\} +$$

$$+ 2\left\{\tfrac{1}{4} + \frac{1}{2.4^2} + \frac{1}{3.4^3} + \ldots\ldots\right\} =$$

$$= \tfrac{1}{2} + \frac{1}{2.2^2} + \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{4.2^4} + \text{enz.} =$$

$$= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{4^5} + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{6^4} + \frac{1}{6^5} + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{1}{8^2} + \frac{1}{8^3} + \frac{1}{8^4} + \frac{1}{8^5} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

b) $\pi = 16\sqrt{3}\left(\frac{1}{1.3.3} + \frac{2}{3.7.3^2} + \frac{3}{9.11.3^3} \ldots\ldots\right)$

$$= 8\left\{\frac{26}{3.3^2} + \frac{58}{5.7.37} + \frac{90}{9.11.3^{11}} + \ldots\ldots\right\} +$$
$$+ 8\left\{\frac{73}{3.7^2} + \frac{169}{5.7.7^7} + \frac{265}{9.11.7^{11}} \ldots\ldots\right\} =$$
$$= \frac{24}{10}\left(1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{10} + \frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{1}{10^2} + \frac{2.4.6}{3.5.7}\cdot\frac{1}{10^3} + \ldots\right)$$
$$+ \frac{56}{100}\left\{1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{100} + \frac{2.4}{3.5}\left(\frac{2}{100}\right)^2 + \frac{2.4.6}{3.5.7}\left(\frac{2}{100}\right)^3 + \ldots.\right\}$$
$$= \frac{32}{17}\left\{1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{17} + \frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{1}{17^2} + \frac{2.4.6}{3.5.7}\cdot\frac{1}{17^3} + \ldots.\right\} +$$
$$+ \frac{28}{50}\left\{1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{50} + \frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{1}{50^2} + \frac{2.4.6}{3.5.7}\cdot\frac{1}{50^3}\right\} +$$
$$+ \frac{104}{170}\left\{1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{170} + \frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{1}{170^2} + \frac{2.4.6}{3.5.7}\cdot\frac{1}{170^3} + \ldots.\right\} =$$
$$= 3 + 4\left\{\frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{3^7} + \frac{1}{3^9} + \ldots.\right\}.$$

31. Men bewijze:

a) $\frac{2}{\pi} = \frac{1}{2}\,tang\,\frac{\pi}{2^2} + \frac{1}{2^2}\,tang\,\frac{\pi}{2^3} + \frac{1}{2^3}\,tang\,\frac{\pi}{2^4} +$ enz.

b) $\frac{4}{\pi} = \frac{1}{2}\,tang\,\frac{\pi}{2^2} + \frac{1}{2^2}\,tang\,\frac{\pi}{2^3} + \frac{1}{2^3}\,tang\,\frac{\pi}{2^4} +$ enz.

32. Men doe uitspraak over de convergentie of divergentie der volgende producten:

a) $(1+\frac{1}{4})^4(1-\frac{1}{8})^9(1+\frac{1}{16})^{16}(1-\frac{1}{32})^{25}\ldots\ldots$

b) $(1+{}^{e}log\,\frac{1}{2})(1-{}^{e}log\sqrt[3]{\frac{8}{2}})^3(1+{}^{e}log\sqrt[9]{\frac{8}{2}})^9(1-{}^{e}log\sqrt[27]{\frac{8}{2}})^{27}\ldots.$

c) $\left\{1+\frac{1}{8}\,sin\,\frac{\pi+6}{\pi+7}\right\}^8\left\{1+\frac{1}{16}\,sin\frac{\pi+8}{\pi+9}\right\}^{16}\left\{1+\frac{1}{32}\,sin\,\frac{\pi+10}{\pi+11}\right\}^{32}\ldots.$

d) $\left(\frac{1-q^2}{1-q}\right)^2\left(\frac{1-q^4}{1-q^3}\right)^2\left(\frac{1-q^6}{1-q^5}\right)^2\left(\frac{1-q^8}{1-q^7}\right)^2\ldots\ldots$

33. Men ontwikkele:

a) $\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{6}{11}\cdot\frac{6}{13}\cdot\frac{8}{15}\cdot\frac{8}{17}\cdot\frac{10}{19}\cdot\frac{10}{21}\ldots\ldots$

b) $\frac{\pi}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{6}{13}\cdot\frac{6}{17}\cdot\frac{8}{19}\cdot\frac{8}{23}\ldots\ldots$

c) $\sqrt{3}=\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{4}{13}\cdot\frac{6}{17}\cdot\frac{6}{19}\ldots\ldots$

34. Men vraagt te bewijzen:

a) $\frac{e^x-e^{-x}}{2}=x\left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{16\pi^2}\right)\ldots.$

b) $e^x+e^{-x}=2\left(1+\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{4\pi^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\left(1+\frac{4x^2}{49\pi^2}\right).$

35. Indien gegeven is:

$$2\,cos\,x=y+\frac{1}{y},$$

vraagt men te bewijzen, dat men voor geheele positieve waarden van n, altijd heeft:

$$2\,cos\,nx=y^n+\frac{1}{y^n}.$$

36. Men vraagt naar de waarden van x in de vergelijkingen:

a) $4x^3-1=0$
b) $2x^7-1=0$
c) $5x^3+9=0$
d) $2x^8+7=0$

e) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2...6} + \text{enz.}$

f) $tang\, x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3.5}x^5 + \frac{17}{3^2.5.7}x^7 \text{ enz.}$

g) $sec\, x = \frac{1}{x} + \frac{1}{2.3}x + \frac{7}{2.3^2 4.5}x^3 + \text{enz.}$

37. Bewijs dat de complexe vormen $cos\,(a+bi)$, $tang\,(a+bi)$, $sec\,(a+bi)$, $cosec\,(a+bi)$, $sin\,vers\,(a+bi)$ allen van de gedaante $A+Bi$ zijn.

38. Men beslisse over de convergentie of divergentie der volgende dubbele reeksen:

a)
$$\begin{array}{l}
1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \cdots\cdots \\
-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \frac{1}{12} - \frac{1}{14} \cdots\cdots \\
+\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{14} \cdots\cdots \\
-\frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{12} - \frac{1}{15} + \frac{1}{18} - \frac{1}{21} \cdots\cdots \\
+\frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{12} + \frac{1}{15} - \frac{1}{18} + \frac{1}{21} \cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

b)
$$\begin{array}{l}
{}^e log\, 2 + {}^e log\, \frac{3}{2} + {}^e log\, \frac{3}{4} + {}^e log\, \frac{1}{3} + \cdots\cdots \\
+ {}^e log_{\sqrt{}} 2 + {}^e log_{\sqrt{}} \frac{3}{2} + {}^e log_{\sqrt{}} \frac{3}{4} + {}^e log_{\sqrt{}} \frac{1}{3} + \cdots\cdots \\
+ {}^e log_{\sqrt[3]{}} 2 + {}^e log_{\sqrt[3]{}} \frac{3}{2} + {}^e log_{\sqrt[3]{}} \frac{3}{4} + {}^e log_{\sqrt[3]{}} \frac{1}{3} + \cdots\cdots \\
+ {}^e log_{\sqrt[8]{}} 2 + {}^e log_{\sqrt[8]{}} \frac{1}{3} + {}^e log_{\sqrt[8]{}} \frac{1}{2} + {}^e log_{\sqrt[8]{}} \frac{3}{4} + {}^e log_{\sqrt[8]{}} \frac{1}{3} + \cdots\cdots \\
+ {}^e log_{\sqrt[10]{}} 2 + {}^e log_{\sqrt[10]{}} \frac{1}{3} + {}^e log_{\sqrt[10]{}} \frac{1}{2} + {}^e log_{\sqrt[10]{}} \frac{3}{4} + {}^e log_{\sqrt[10]{}} \frac{1}{3} + \cdots\cdots \\
+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

c)
$$\begin{array}{l}
1 - \frac{1.6}{2.5} + \frac{1.6}{2.5}\cdot\frac{2.7}{3.6} - \frac{1.6}{2.5}\cdot\frac{2.7}{3.6}\cdot\frac{3.8}{4.7} + \cdots\cdots \\
-\frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.5} - \frac{1.3}{2.5}\cdot\frac{2.7}{3.6} + \frac{1.3}{2.5}\cdot\frac{2.7}{3.6}\cdot\frac{3.8}{4.7} - \cdots\cdots \\
+\frac{1}{4} - \frac{1.3}{4.5} + \frac{1.3}{4.5}\cdot\frac{2.7}{3.6} + \frac{1.3}{4.5}\cdot\frac{2.7}{3.6}\cdot\frac{3.8}{4.7} + \cdots\cdots \\
-\frac{1}{8} + \frac{1.3}{8.5} - \frac{1.3}{8.5}\cdot\frac{2.7}{3.6} + \frac{1.3}{8.5}\cdot\frac{2.7}{3.6}\cdot\frac{3.8}{4.7} - \cdots\cdots \\
\vdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

$$1-\frac{2.3}{3.4}+\frac{2.3}{3.4}\cdot\frac{3.6}{4.5}-\frac{2.3}{3.4}\cdot\frac{3.6}{4.5}\cdot\frac{4.7}{5.6}+\frac{2.3}{3.4}\cdot\frac{3.6}{4.5}\cdot\frac{4.7}{5.6}\cdot\frac{5.8}{6.7}-\text{enz.}$$

$$\tfrac{1}{2}+\frac{2.3}{9.4}-\frac{2.3}{12.4}\cdot\frac{3.6}{4.5}+\frac{2.3}{15.4}\cdot\frac{3.6}{4.5}\cdot\frac{4.7}{5.6}-\frac{2.3}{18.4}\cdot\frac{3.6}{4.5}\cdot\frac{4.7}{5.6}\cdot\frac{5.8}{6.7}+\ldots.$$

$$\tfrac{1}{3}-\frac{2.3}{27.4}+\frac{2.3}{48.4}\cdot\frac{3.6}{4.5}-\frac{2.3}{75.4}\cdot\frac{3.6}{4.5}\cdot\frac{4.7}{5.6}+\frac{2.3}{108.4}\cdot\frac{3.6}{4.5}\cdot\frac{4.7}{5.6}\cdot\frac{5.8}{6.7}+\ldots$$

$$\tfrac{1}{4}+\frac{2.3}{81.4}-\frac{2.3}{192.4}\cdot\frac{3.6}{4.5}+\frac{2.3}{375.4}\cdot\frac{3.6}{4.5}\cdot\frac{4.7}{5.6}-\frac{2.3}{648.4}\cdot\frac{3.6}{4.5}\cdot\frac{4.7}{5.6}\cdot\frac{5.8}{6.7}+$$

. . . . . .

$$^{e}log\left(\tfrac{1}{1}\right)-{}^{e}log\left(\tfrac{2}{2}\right)+{}^{e}log\left(\tfrac{3}{3}\right)-{}^{e}log\left(\tfrac{1^0}{4}\right)+{}^{e}log\left(\tfrac{1^2}{5}\right)-\ldots..$$

$$+{}^{e}log\sqrt{\left(\tfrac{1}{1}\right)}-{}^{e}log\sqrt{\left(\tfrac{2}{2}\right)}+{}^{e}log\sqrt{\left(\tfrac{3}{3}\right)}-{}^{e}log\sqrt{\left(\tfrac{1^0}{4}\right)}+{}^{e}log\sqrt{\left(\tfrac{1^2}{5}\right)}-\ldots$$

$$+{}^{e}log\sqrt[3]{\left(\tfrac{1}{1}\right)}-{}^{e}log\sqrt[3]{\left(\tfrac{2}{2}\right)}+{}^{e}log\sqrt[3]{\left(\tfrac{3}{3}\right)}-{}^{e}log\sqrt[3]{\left(\tfrac{1^0}{4}\right)}+{}^{e}log\sqrt[3]{\left(\tfrac{1^2}{5}\right)}-\ldots$$

$$+{}^{e}log\sqrt[8]{\left(\tfrac{1}{1}\right)}-{}^{e}log\sqrt[8]{\left(\tfrac{2}{2}\right)}+{}^{e}log\sqrt[8]{\left(\tfrac{3}{3}\right)}-{}^{e}log\sqrt[8]{\left(\tfrac{1^0}{4}\right)}+{}^{e}log\sqrt[8]{\left(\tfrac{1^2}{5}\right)}-\ldots$$

. . . . . .

39. Uit de convergeerende dubbele reeks:

$$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\ldots..$$

$$-\tfrac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{2}{2\sqrt{4}}-\frac{1}{2\sqrt{5}}+\frac{1}{2\sqrt{6}}-\ldots..$$

$$+\tfrac{1}{3}-\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}-\frac{1}{3\sqrt{4}}+\frac{1}{3\sqrt{5}}-\frac{1}{3\sqrt{6}}+\ldots..$$

$$-\tfrac{1}{4}+\frac{1}{4\sqrt{2}}-\frac{1}{4\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{4}}-\frac{1}{4\sqrt{5}}+\frac{1}{4\sqrt{6}}-\ldots..$$

. . . . . .

ontstaan door andere rangschikking de reeksen:

$$1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots..$$

$$-\tfrac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{2\sqrt{4}}-\frac{1}{2\sqrt{5}}+\frac{1}{2\sqrt{6}}-\ldots..$$

$$+\tfrac{1}{1}+\frac{1}{3\sqrt{3}}-\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{5}}+\frac{1}{3\sqrt{7}}-\frac{1}{3\sqrt{4}}+\ldots\ldots$$

$$-\tfrac{1}{1}+\frac{1}{4\sqrt{2}}-\frac{1}{4\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{4}}-\frac{1}{4\sqrt{5}}+\frac{1}{4\sqrt{6}}-\ldots\ldots$$

$$+\tfrac{1}{1}+\frac{1}{5\sqrt{3}}-\frac{1}{5\sqrt{2}}+\frac{1}{5\sqrt{5}}+\frac{1}{5\sqrt{7}}-\frac{1}{5\sqrt{4}}+\ldots\ldots$$

. . . . . .

en $$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\ldots\ldots$$

$$+\tfrac{1}{1}-\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}-\frac{1}{3\sqrt{4}}+\frac{1}{3\sqrt{5}}-\frac{1}{3\sqrt{6}}+\ldots\ldots$$

$$-\tfrac{1}{1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{2\sqrt{4}}-\frac{1}{2\sqrt{5}}+\frac{1}{2\sqrt{6}}-\ldots\ldots$$

$$+\tfrac{1}{1}-\frac{1}{5\sqrt{2}}+\frac{1}{5\sqrt{3}}-\frac{1}{5\sqrt{4}}+\frac{1}{5\sqrt{5}}-\frac{1}{5\sqrt{6}}+\ldots\ldots$$

$$+\tfrac{1}{1}-\frac{1}{7\sqrt{2}}+\frac{1}{7\sqrt{3}}-\frac{1}{7\sqrt{4}}+\frac{1}{7\sqrt{5}}-\frac{1}{7\sqrt{6}}+\ldots\ldots$$

$$-\tfrac{1}{1}+\frac{1}{4\sqrt{2}}-\frac{1}{4\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{4}}-\frac{1}{4\sqrt{5}}+\frac{1}{4\sqrt{6}}-\ldots\ldots$$

. . . . . .

Zijn deze beide reeksen met de eerste te gelijk convergent of niet?

40. Men vraagt de breuken, die de volgende betrekkingswijzers hebben:

a) $\{1, 3, 3, 4, 2, 3, 1, 2\}$.

b) $\{1, 2, 1, 1, 1, 3, 2, 1, 1, 2, 3\}$.

c) $\{4; 1, 3, 1, 8\}$.

d) $\{8; 5, 2, 1, 1, 7, 1, 1, 2, 5, 16\}$.

e) $\{6; 4, 12\}$.

f) $\{2, 1, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

41. Herleidt tot kettingbreuken:

a) $\dfrac{1+3x-4x^2}{1-2x+3x^2-4x^3}$.

b) $\dfrac{1+x+x^2+x^3+x^4+x^5}{1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5+7x^6}$.

c) $\sqrt{51}$, $\sqrt{53}$, $\sqrt{65}$.

42. Zijn de volgende kettingbreuken convergent of divergent:

a) $\left\{\frac{3^2}{1}, \frac{4^2}{2}, \frac{5^2}{3}, \frac{6^2}{4} \ldots\right\}$.

b) $\left\{\frac{1.2}{2}, \frac{2.3}{2^2}, \frac{3.4}{2^3}, \frac{4.5}{2^4} \ldots\right\}$.

c) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1.2^2}{3^2}, \frac{2^2.3^2}{4^3}, \frac{3^2.4^4}{5^4} \ldots\right\}$.

d) $\left\{\frac{1}{1.2}, \frac{1}{2.3}, \frac{1}{3.4}, \frac{1}{4.5}, \ldots\right.$
$\left.\sin\frac{\pi}{2}, \sin\frac{\pi}{3}, \sin\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{5}\right\}$

e) $\left\{\frac{^e\log\frac{1}{2}}{a-(a-1)}, \frac{^e\log\frac{1}{3}}{a+(a-1)}, \frac{^e\log\frac{1}{4}}{\sqrt{a-\sqrt{(a-1)}}}, \frac{^e\log\frac{1}{5}}{\sqrt{a+\sqrt{(a-1)}}}, \ldots\right\}$?

43. Men bewijze:

$$\sqrt{2} = \tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2}\{-6, -6, -6, \ldots\} =$$
$$= \tfrac{17}{1} - \tfrac{1}{2}\{-34, -34, -34, \ldots\} =$$
$$= \tfrac{7}{1} + \tfrac{1}{2}\{14, 14, 14, \ldots\}.$$
$$\sqrt{17} = 3 + \tfrac{3}{17}\left(6 + \left\{\frac{8}{45}, \frac{8}{45}, \frac{8}{45}, \ldots\right\}\right)$$

44. Men vraagt in kettingbreuken te ontwikkelen de volgende reeksen:

a) $1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\ldots$

b) $\frac{a_0}{x} + \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_2}{x^3} + \frac{a_3}{x^4} + \ldots\ldots$

c) $1 + \frac{1.4}{2.6} + \frac{1.3.4.6}{2.5.6.9} + \frac{1.3\,5\,4.6.8}{2.5.8.6.9.12} + \ldots\ldots$

45. Men bewijze:

$$e^x = \cfrac{1}{1 - \cfrac{x}{1 + \cfrac{x}{2 - \cfrac{x}{3 + \cfrac{2x}{4 - \cfrac{2x}{5 + \cfrac{3x}{6 - \cfrac{3x}{7 + \text{enz.}}}}}}}}}$$

46. Eveneens toone men aan:

$$^e log\,(1+x) = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x}{2 + \cfrac{x}{3 + \cfrac{2x}{2 + \cfrac{2x}{5 + \cfrac{3x}{2 + \cfrac{3x}{7 + \cfrac{4x}{2 + \text{enz.}}}}}}}}}$$

47. Hoe vindt men:

$$tang\, x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \cfrac{x^2}{9 - \text{enz.}}}}}}$$

48. Indien men in de functie

$$\frac{2x - \sin 2x}{\sin^3 x}$$

$\sin \frac{1}{2}x$ gelijk neemt aan y, dan is zij ontwikkelbaar in de reeks

$$\frac{4}{3} + \frac{4.6}{3.5}y + \frac{4.6.8}{3.5.7}y^2 + \frac{4.6.8.10}{3.5.7.9}y^3 + \ldots\ldots$$

en in de kettingbreuk

$$\cfrac{\frac{4}{3}}{1-\cfrac{\frac{6}{5}y}{1+\cfrac{\frac{2}{5.7}y}{1-\cfrac{\frac{5.8}{7.9}y}{1-\cfrac{\frac{1.4}{9.11}y}{1-\cfrac{\frac{7.10}{11.13}y}{1-\text{enz.}}}}}}}$$

Men vraagt naar het bewijs.

49. Indien gegeven is

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x) = 1 + \frac{(1-q^\alpha)(1-q^\beta)}{(1-q)(1-q^\gamma)}x +$$

$$+ \frac{(1-q^\alpha)(1-q^{\alpha+1})(1-q^\beta)(1-q^{\beta+1})}{(1-q)(1-q^2)(1-q^\gamma)(1-q^{\gamma-1})}x^2 + \ldots\ldots$$

dan vraagt men deze reeks in eene kettingbreuk te ontwikkelen.

50. Men vraagt de som der volgende reeksen

a) $$x\cos\varphi + \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2}x^2\cos 2\varphi + \tfrac{1}{3}.\frac{1.3}{2.4}x^3\cos 3\varphi +$$

$$\frac{1}{4}.\frac{1.3.5}{2.4.6}x^4\cos 4\varphi + \ldots\ldots$$

$$b) \quad x \sin\varphi + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} x^2 \sin 2\varphi + \tfrac{1}{3} \cdot \frac{1.3}{2.4} x^3 \sin 3\varphi +$$

$$+ \frac{1}{4} \cdot \frac{1.3.5}{2.4.6} x^4 \sin 4\varphi + \ldots\ldots$$

$$c) \quad x \sin\varphi + \frac{1}{1.2} x^2 \sin 2\varphi + \frac{1}{2.3} \cdot \tfrac{1}{2} x^3 \sin 3\varphi$$

$$+ \frac{1}{3.4} \cdot \frac{1.3}{2\,4} x^4 \sin 4\varphi . + \ldots\ldots$$

ERRATA.

Den Lezer wordt verzocht de volgende misstellingen met de pen te verbeteren.

EERSTE DEEL.

Bl. 22, regel 14 v. o., *staat:* $\frac{a_2^2}{b_1^2}$; *moet zijn:* $\frac{a_1^2}{b_1^2}$.

" 112, is in de figuur de lijn *EC* vergeten.

" 115, regel 21 v. b., *staat:* middellijnen; *moet zijn:* stralen.

" 116, " 1 v. b., " $p^2 - p$; " " $p' - p$

" " " 3 v. b., " $p - p$; " " $p' - p$

" " " 7 v. o., " $y = \frac{b}{a}$; " " $y = \frac{b}{x}$

" 117, " 9 v. b., " $y = \frac{1}{2}\{\mp\sqrt{}$; " " $y = \frac{1}{2}\{\pm\sqrt{}$.

" 120, " 13 v. o., " $zvu = cxy$; " " $zvu = cxy$

" " " 5 v. o., " $uxy = ezv$; " " $uxy = ezv$

" " " 3 v. o., " $u = \pm\sqrt{}ce$, enz.; " " $u = \pm\sqrt{}ce$.

" 128, " 16 v. b., " (A) ; " " (1)

" " " 18 v. b., " $-\frac{1}{27}yB^3$; " " $\frac{1}{27}B^3$

" " " 24 v. b., " $+DA$; " " DA^3

" 131, " 4 v. b., " $x_2 = ap + aq$; " " $x_2 = ap + a_1 q$

" " " 5 v. b., " $x_3 = a^2 p + aq$; " " $x_3 = a_1 p + aq$

" " " 12 v. o., " $a(a^2 - P) > P$; " " $a(a^2 - P) > Q$

" 133, " 3 v. o., " $\frac{x_1}{2} \mp \{1 - \frac{5}{27}k^2 + \frac{22}{243}k^2$; *moet zijn:* $-\frac{x_1}{2} \mp \{1 - \frac{5}{27}k + \frac{22}{243}k^2$

" 134, " 5 v. o., " $\frac{55918}{4782969}$; *moet zijn:* $\frac{55913}{4782969}$

" 135, " 6 v. b., " *log* k^6 ; " " *log* k^5

Bl. 135, regel 6 v. b., *staat*: $\frac{55913}{4782069}$; *moet zijn*: $\frac{55913}{4782969}$

" 136, " 14 v. b. *te veranderen in den volgenden*:

$$y_1 = \sqrt[3]{\left\{-\tfrac{1}{2}Q + \sqrt{(\tfrac{1}{4}Q^2 - \tfrac{1}{27}P^3)}\right\}} + \sqrt[3]{\left\{-\tfrac{1}{2}Q - \sqrt{(\tfrac{1}{4}Q^2 - \tfrac{1}{27}P^3)}\right\}}.$$

" 138, regel 10 v. b., *staat*: $\frac{1}{4}Q^2 < \frac{1}{27}P^3$; *moet zijn*: $\frac{1}{4}Q^2 < \frac{1}{27}P^3$

" " " 13 v. b., " $3\varphi = \frac{4Q}{p^2}$; " " $3\varphi = \frac{4Q}{p^3}$

" 143, " 9 v. b., " voor " " door

" " " 12 v. b., " $\frac{Q}{\left(2\sqrt{\frac{P}{3}}\right)^3}$ " " $\frac{4Q}{\left(2\sqrt{\frac{P}{3}}\right)^3}$

" 156, " 1 v. b., " $1\frac{1}{8}(P-4R)r^2$ " " $1\frac{1}{8}(P^2-4R)r^2$

" " " 7 v. o., " $p^2+q^2=\frac{10}{7}$ " " $p^2+q^2=\frac{10}{9}$

" " " 5 v. o., " $2pq=\frac{24}{7}$ " " $2pq=\frac{24}{9}$

" 157, " 10 v. b., " $s^2=\frac{1}{2}P^2$ " " $s^2=\frac{1}{4}P^2$

" 163, " 3 v. o., " $(b^4-x^4)^{\frac{1}{4}}$ " " $(b^4+x^4)^{\frac{1}{4}}$

" 166, 3e antw., *moet zijn*: $x = \pm\frac{1}{a}\sqrt{\frac{b^4-a^4}{2}}$

" " regel 1 v. o., *staat*: 18 *moet zijn*: 12.

" 174, " 7 v. b., " $z=2p+\frac{5p+3}{}$ " " $z=2p+\frac{5p+3}{8}$

" 185, " 4 v. o., " $(2rx+s)$ " " $rx+s$

" 236, " 4 v. b., " $\frac{f_2(p)}{1}$ " " $\frac{f_1(p)}{1}$

" " " 4 v. b., " A_{n-1} " " A'_{n-1}

" " " 12 v. b., " x_n^{-2} " " x^{n-2}

" " " 13 v. b., " $\frac{f_2(p)}{1.2}\Big\}y$ " " $\frac{f_2(p)}{1.2}\Big\}$

" 238, " 6 v. o., " $+17$ " " -17

" " " 1 v. o., " $f(y)=y^3$ " " $f(y)=2y^3$

" 239, " 9 v. b., " $x=-1$ " " $p=-1$

" " " 10 v. o., " $a-p$ " " $x-p$

" 243, " 3 v. b., moet *of* weggelaten worden.

" 244, " 8 v. o., *staat*: $2na_{n-2}x$; *moet zijn*: $2a_{n-1}x$

bl. 244,	regel 7 v. o.,	*staat:*	$2va_{\nu-2}x$;	*moet zijn:*	$2a_{\nu-2}x$
„ 245,	„ 14 v. b.,	„	$\varphi_1 x = P_m x^{m-1}$;	„	„	$\varphi_1(x) = mPx^{m-1}$
„ 255,	„ 2 v. o.,	„	$+2x^3$	„	„	$-12x^3$
„ 256,	„ 6 v. b.,	„	$39x$	„	„	$49x$
„	„ 7 v. b.,	„	4 eenheden;	„	„	ééne eenheid.

De fouten in het 2e deel zullen later opgegeven worden. — Voor de aanwijzing van misrekeningen, enz. houdt de schrijver zich intusschen aanbevolen.

INHOUD VAN HET EERSTE DEEL.

Blz.

§ 1. Inleiding. . . . . 1.

AFDEELING I.

§ 2. Verdeeling der vergelijkingen en herleiding tot hare algemeene gedaante. . . . . 5.

§ 3. Over de imaginaire getallen en eenige hunner voornaamste eigenschappen. . . . . 12.

§ 4. Over de gemiddelde waarde. . . . . 17.

§ 5. Algemeene eigenschappen der vergelijkingen met ééne onbekende. . . . . 22.

§ 6. Oplossing van vergelijkingen van den eersten graad met ééne onbekende. . . . . 56.

§ 7. Vergelijkingen van den eersten graad met twee of meer onbekenden. . . . . 62.

§ 8. Over de zuivere vergelijkingen van den eersten, tweeden, derden en vierden graad. . . . . 79.

§ 9. Over de vergelijkingen van den tweeden graad met ééne onbekende. . . . . 81.

§ 10. Over de oneindig kleinen en oneindig grooten. Over de beteekenis van het teeken $\frac{0}{0}$. . . . . 89.

§ 11. Oplossing van eenige vraagstukken en bespreking van de verschillende uitkomsten. . . . . 98.

§ 12. Opgave van vergelijkingen, die door kunstgrepen kunnen worden opgelost. . . . . 116.

§ 13. Over de oplossing der vergelijkingen van den derden graad. . . . . 128.

§ 14. Rechtstreeksche oplossing der vierde-machtsvergelijkingen. . . . . 146.

Blz.

AFDEELING II.

OVER DE ONBEPAALDE VRAAGSTUKKEN.

§ 15. Onbepaalde vraagstukken van den eersten graad met ééne onbekende. . . . . 168.
§ 16. Onbepaalde vraagstukken van den eersten graad met twee en meer onbekenden. . . . . 170.
§ 17. Onbepaalde vraagstukken met twee onbekenden, waarin eene onbekende van den eersten graad is. . 177.
§ 18. Over het rationeel maken van eenige polynomia. . 179.
§ 19. Oplossing van eenige onbepaalde vraagstukken, getrokken uit de werken van DIOPHANTUS, van MOHAMMED BEN ALHAÇAN ALKARKHÎ e. a. . . . . 192.

AFDEELING III.

DE LEER DER FUNCTIËN.

§ 20. Over de functiën en hare karakters. . . . . 217.
§ 21. Over het vermeerderen en verminderen van de wortels eener vergelijking — Afgeleide functiën. . . . . 231.
§ 22. Theorie der teekens, waardoor de termen eener vergelijking $f(x) = 0$ verbonden zijn. . . . . 257.
§ 23. Theorie der limieten. Convergeerende reeksen. . . 265.
§ 24. Over de limieten van de wortels der vergelijking $f(x) = 0$. . . . . 297.
§ 25. Theorie van Sturm. . . . . 326.

INHOUD VAN HET TWEEDE DEEL.

Blz.

§ 26. Over het opsporen van de meetbare wortels eener vergelijking. . . . . 1.

§ 27. Verschillende methoden ter benadering der irrationeele reëele wortels eener getallen-vergelijking. . . . . 5.

§ 28. Over het opsporen van de reëele en imaginaire wortels der getallen-vergelijkingen. . . . . 33.

§ 29. Over wederkeerige vergelijkingen. . . . . 40.

§ 30. Over de ontbinding van rationeele gebrokens in meer eenvoudige. . . . . 42.

§ 31. Over de wederkeerige reeksen. . . . . 54.

§ 32. De exponentiale functiën en hare toepassing. . . 60.

§ 33. Goniometrische functiën. . . . . 83.

§ 34. De kettingbreuken. . . . . 153.

§ 35. Over de determinanten. . . . . 188.

BIJLAGEN.

I. Over de machtsverheffing van polynomia. . . . . 217.

II. Het theorema van GIRARD. . . . . 221.

VRAAGSTUKKEN TER OPLOSSING. . . . . 226.